Ecuaciones Diferenciales y Series... [1]

L. A. Núñez [2]
Centro de Física Fundamental,
Departamento de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad de Los Andes, Mérida 5101, Venezuela y
Centro Nacional de Cálculo Científico, Universidad de Los Andes,
(CeCalCULA),
Corporación Parque Tecnológico de Mérida, Mérida 5101, Venezuela

Versión β 1.0 Mayo 2006

[1] **ADVERTENCIA: El presente documento constituye una guía para los estudiantes de Métodos Matemáticos de la Física de la Universidad de Los Andes. Es, en el mejor de los casos, un FORMULARIO y de ninguna manera sustituye a los líbros de texto del curso. La bibliografía de la cual han surgido estas notas se presenta al final de ellas y debe ser consultada por los estudiantes. Adicionalmente este documento en plena evolución, Posiblemente existan versiones más recientes en este mismo sitio web** `http://webdelprofesor.ula.ve/ciencias/nunez/`

[2] e-mail: `nunez@ula.ve` Web: `http://webdelprofesor.ula.ve/ciencias/nunez/`

Índice

1. Otra vez Algebra de Series

- Las series se suman

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)(x-x_0)^n$$

- Las series se multiplican

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$$

  con

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_j b_{n-j} + \cdots + a_{n-2} b_2 + a_{n-1} b_1 + a_n b_0$$

- Las series se derivan

$$\frac{\mathrm{d}\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n\right]}{\mathrm{d}x} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\ n\ (x-x_0)^{n-1}$$

  Nótese como cambia el comienzo de la serie.

- Los índices en las series son mudos

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\ n\ (x-x_0)^{n-1} = \sum_{j=1}^{\infty} a_j\ j\ (x-x_0)^{j-1} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1}\ (k+1)\ (x-x_0)^k$$

  en la última sumatoria hemos hecho $k = j-1$, por lo cual $j = k+1$.

- Las series se igualan

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\ n\ (x-x_0)^{n-1}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1}\ (k+1)\ (x-x_0)^k = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}\ (n+1)\ (x-x_0)^n$$

  por lo cual

$$b_n = a_{n+1}\ (n+1)$$

  si la igualdad hubiera sido

$$\sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x-x_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\ n\ (x-x_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}\ (n+1)\ (x-x_0)^n \quad \Longrightarrow \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{(n+1)}$$

2. Un Ejemplo conocido.

Consideremos la conocidad ecuación diferencial

$$y'' + y = 0$$

se propone encontrar una solución entorno a $x = 0$ por lo tanto

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n \\ \\ y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\, a_n x^{n-2} \end{array} \right.$$

$$y'' + y = 0 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\, a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$y'' + y = 0 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)\,(k+1)\, a_{k+2} x^k + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$y'' + y = 0 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} \left[(k+2)\,(k+1)\, a_{k+2} + a_k\right] x^k = 0$$

entonces

$$(k+2)\,(k+1)\, a_{k+2} + a_k = 0 \quad \Longrightarrow \quad a_{k+2} = \frac{-a_k}{(k+2)\,(k+1)} \quad \text{con} \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

por lo que

$$a_2 = \frac{-a_0}{2 \cdot 1}; \quad a_4 = \frac{-a_2}{4 \cdot 3} = \frac{-1}{4 \cdot 3} \cdot \frac{(-a_0)}{2} = \frac{a_0}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{a_0}{4!};$$

$$a_6 = \frac{-a_4}{6 \cdot 5} = \frac{-a_0}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = -\frac{a_0}{6!}$$

en general

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!} a_0$$

Similarmente, para los impares se obtiene

$$a_3 = \frac{-a_1}{3 \cdot 2}; \quad a_5 = \frac{-a_3}{5 \cdot 4} = \frac{-1}{5 \cdot 4} \cdot \frac{(-a_1)}{3 \cdot 2} = \frac{a_1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{a_1}{5!};$$

$$a_7 = \frac{-a_5}{7 \cdot 6} = \frac{-a_1}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{-a_1}{7!}$$

de donde

$$a_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} a_1$$

De este modo, la solución deseada queda como

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+\frac{(-a_0)}{2!}x^2+\frac{(-a_1)}{3!}x^3+\frac{a_0}{4!}x^4+\frac{a_1}{5!}x^4+\frac{(-a_0)}{6!}x^6+\frac{(-a_1)}{7!}x^7+\cdots$$

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0\left[\underbrace{1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots}_{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}}\right]+a_1\left[\underbrace{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots}_{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}}\right]$$

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}+a_1\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}=a_0\cos x+a_1\operatorname{sen}x$$

3. Otro Ejemplo menos conocido pero importante

Considere ecuación de Hermite[1] la cual aparece en la solución del oscilador armónico cuántico

$$y''-2xy'+\lambda y=0$$

Para resolver esta ecuación alrededor del punto $x_0=0$, proponemos la siguiente expansión en series de potencias como solución:

$$y(x)=\sum_{j=0}^{\infty}a_jx^j\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}y'(x)=\sum_{j=1}^{\infty}ja_jx^{j-1}\\ \\ y''(x)=\sum_{j=2}^{\infty}j(j-1)a_jx^{j-2}\end{array}\right.$$

entonces la ecuación de Hermite queda como

$$\left[\sum_{j=2}^{\infty}j(j-1)a_jx^{j-2}\right]-2\left[\sum_{j=1}^{\infty}ja_jx^j\right]+\lambda\left[\sum_{j=0}^{\infty}a_jx^j\right]=0$$

reacomodando índices queda como

$$\left[\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)a_{k+2}x^k\right]-2\left[\sum_{j=1}^{\infty}ja_jx^j\right]+\lambda\left[\sum_{j=0}^{\infty}a_jx^j\right]=0$$

o equivalentemente

$$(2a_2+\lambda a_0)+\sum_{j=1}^{\infty}\left[(j+2)(j+1)a_{j+2}-2ja_j+\lambda a_j\right]x^j=0$$

$$a_0=-\frac{2a_2}{\lambda}\qquad\text{y}\qquad a_{j+2}=\frac{-(\lambda-2j)}{(j+2)(j+1)}a_j\qquad n\geq1$$

[1] **Charles Hermite**, (1822-1901). Matemático francés, especializado en el estudio de teoría de funciones. Profesor en la Universidad de París, ofreció importantes aportaciones al álgebra, las funciones abelianas y la teoría de las formas cuadráticas.

y tendrá como solución

$$y(x) = a_0 \left[\underbrace{1 - \frac{\lambda}{2!}x^2 - \frac{(4-\lambda)\,\lambda}{4!}x^4 - \frac{(8-\lambda)\,(4-\lambda)\,\lambda}{6!}x^6 - \cdots}_{y_0} \right]$$

$$+ a_1 \left[\underbrace{x + \frac{(2-\lambda)}{3!}x^3 + \frac{(6-\lambda)\,(2-\lambda)}{5!}x^5 + \frac{(10-\lambda)\,(6-\lambda)\,(2-\lambda)}{7!}x^7 + \cdots}_{y_1} \right]$$

nótese que para valores pares de λ una u otra serie se corta y genera polinomios de la forma

λ	Ecuación de Hermite	Polinomio asociado
0	$y'' - 2xy' = 0$	$y_0(x) = 1$
2	$y'' - 2xy' + 2y = 0$	$y_1(x) = x$
4	$y'' - 2xy' + 4y = 0$	$y_0(x) = 1 - 2x^2$
6	$y'' - 2xy' + 6y = 0$	$y_1(x) = x - \frac{2}{3}x^3$
8	$y'' - 2xy' + 8y = 0$	$y_0(x) = 1 - 10x^2 + \frac{35}{3}x^4$

También, puede ser definido a partir de una ecuación:

$$H_\lambda(x) = (-1)^\lambda e^{x^2} \frac{\mathrm{d}^\lambda}{\mathrm{d}x^\lambda} e^{-x^2}, \qquad \lambda = 0, 1, 2, ... \tag{1}$$

o a través de una relación de recurrencia

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0$$

Las ecuaciones antes mencionadas son ecuaciones homogéneas. En el caso que la ecuación diferencial a resolver por series sea una ecuación inhomogéna, se procederá del mismo modo como se propuso en el caso de que los coeficientes de la ecuación diferencial fueran constantes. Esto es se resuelve, por series la homogénea y luego se propone una solución particular, en forma de serie de potencias, la cual se iguala con la expansión, también en series de potencias, del término inhomogéneo. Como ejemplo, antes de proceder a casos más generales resolvamos la ecuación de Airy[2], pero inhomogéna planteada arriba. A pesar de su simplicidad, esta ecuación admite sólo soluciones en forma de serie. ahora el caso de la ecuación homogénea de Airy

$$y'' - xy = 0$$

Luego, compruebe, siguiendo el procedimiento arriba expuesto que una posible ecuación inhomogénea de Airy

$$y'' - xy = \exp(x)$$

tiene como solución la siguiente serie de potencias

$$y(x) = \underbrace{y(0) \underbrace{\left\{1 + \frac{1}{6}x^3 + \cdots\right\}}_{y_1} + y'(0) \underbrace{\left\{x + \frac{1}{12}x^4 + \cdots\right\}}_{y_2}}_{y_h} + \underbrace{\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \cdots}_{y_{ih}}$$

[2]**George Biddell Airy** (1801-1892) Matemático y Astrónomo Inglés con contribuciones importantes en la solución de ecuaciones diferenciales y su utilización en Astronomía. Mejoró significativamente las estimaciones teóricas de la orbita de Venus y la Luna. Igualmente realizó estudios matemáticos de la formación del arcoiris y la densidad de la tierra.

Nótese que los dos primeros términos corresponden a la solución de la ecuación homogénea y el último representa la serie que anula el término inhomogéneo. Hemos hecho patente la dependencia de las constantes de integracón de las condiciones iniciales.

4. Método de Diferenciaciones Sucesiva

En general, dada la Ecuación diferencial

$$a_0(x)\ y(x) + a_1(x)\ y'(x) + \cdots + a_{n-1}(x)\ y^{n-1}(x) + a_n(x)\ y^n(x) = \sum_{i=o}^{n} a_i(x)\ y^{(i)}(x) = \mathcal{F}(x) \qquad (2)$$

Si los coeficientes $a_0(x) \cdots a_n(x)$ son funciones analíticas en $x = x_0$ (se pueden expresar como una serie de Taylor de $(x - x_0)$ que converge al valor de la función con un radio de convergencia de $|x - x_0| < \rho$), entonces, la ecuación diferencial 2 tendrá como solución única, $y = y(x)$ de la ecuación homogéna una serie de potencias la cual satisface las n condiciones iniciales

$$y(x_0) = c_1; \qquad y'(x_0) = c_2; \qquad y''(x_0) = c_3; \cdots \qquad y''(x_0) = c_n$$

Adicionalmente, se expandirá en Taylor la función inhomogénea, esto es $\mathcal{F}(x) = \sum_{i=o}^{n} \mathcal{F}^{(i)}(x_0) \frac{(x - x_0)^i}{i!}$ y se propondrá una solución particular de la inhomogénea, también en términos de una serie $y_{ih}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$.

Otra forma de hacerlo es proceder directamente y conservar el término inhomogéneo y a partir de la ecuación completa encontrar los coeficientes de la expansión por Taylor alrededor del punto en el cual se disponga de las condiciones iniciales. La solución en series de Taylor será

$$y_h(x) = y(0) + y'(0)x + y''(0)\frac{x^2}{2!} + y'''(0)\frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Así para la siguiente ecuación diferencial

$$y'' - (x+1)\, y' + x^2 y = x; \qquad con \quad y(0) = 1; \quad \text{y} \quad y'(0) = 1.$$

los coeficientes de la expansión se obtienen de los valores de las derivadas en $x_0 = 0$, los cuales salen de las condiciones iniciales, de la ecuación diferencial esto es

$$y(0) = 1; \quad y'(0) = 1; \quad y''(0) = (0) + (0+1)\, y'(0) - 0^2 y(0) = 1$$

y de las derivadas de la ecuación diferencial

$$\begin{aligned}
y'''(x) &= y'(x) + (x+1)\, y''(x) - 2x\ y(x) - x^2 y'(x) + 1 \\
y'''(0) &= y'(0) + (0+1)\, y''(0) - 2(0)\ y(0) - 0^2 y'(0) + 1 \\
y'''(0) &= 1 + 1 + 1 = 3
\end{aligned}$$

finalmente, la solución

$$y_h(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + \cdots$$

Esta solución contiene las dos soluciones (la homogénea y la particular de la inhomogénea) sumadas

Dado $|x| < 1$ y la ecuación diferencial

$$y'' + \frac{x}{1-x^2} y' - \frac{1}{1-x^2}\ y = \exp(2x)\,; \qquad con \quad y(0) = 1; \quad \text{y} \quad y'(0) = 1.$$

compruebe que tiene como solución general por series

$$y(x) = y(0)\left\{1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{80}x^6 + \cdots\right\} + y'(0)\,x + \left\{\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{8}x^4 + \cdots\right\}$$

y al incorporar los valores de las condiciones iniciales se obtiene

$$y(x) = 1 + x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{30}x^5 + \frac{1}{180}x^6 - \frac{4}{315}x^7 - \frac{79}{10\,080}x^8 + \cdots$$

5. Métodos de los Coeficientes Indeterminados

En general, para encontrar la solución a la ecuación antes mencionada

$$\sum_{i=o}^{n} a_i(x)\; y^{(i)}(x) = \mathcal{F}(x)$$

Se expanden por series de potencias cada uno de los coeficientes $a_0(x)\cdots a_n(x)$, la función $\mathcal{F}(x)$ y se expande también la serie

$$y(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \frac{(x-x_0)^j}{j!}$$

luego de bastante transpiración se despejan los coeficiente $c_0 \cdots c_n \cdots$ veamos el ejemplo con la misma ecuación del ejemplo anterior.

$$y'' - (x+1)\,y' + x^2 y = x; \qquad \mathit{con} \quad y(0) = 1; \quad \text{y} \quad y'(0) = 1.$$

Como $x_0 = 0$, proponemos la siguiente expansión en series de potencias como solución:

$$y(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j \qquad \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} y'(x) = \sum_{j=1}^{\infty} j c_j x^{j-1} \\ \\ y''(x) = \sum_{j=2}^{\infty} j(j-1) c_j x^{j-2} \end{array} \right.$$

y al sustituir

$$\sum_{j=2}^{\infty} j(j-1)c_j x^{j-2} - (x+1)\sum_{j=1}^{\infty} j c_j x^{j-1} + x^2 \sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j = x$$

expandiendo

$$\sum_{j=2}^{\infty} j(j-1)c_j x^{j-2} - \sum_{j=1}^{\infty} j c_j x^j - \sum_{j=1}^{\infty} j c_j x^{j-1} + \sum_{j=0}^{\infty} c_j x^{j+2} = x$$

si hacemos $j - 2 = l$ en el primer término, $j - 1 = k$ en el tercero y $j + 2 = m$ en el cuarto, tenemos

$$\sum_{l=0}^{\infty} (l+2)(l+1)\, c_{l+2} x^l - \sum_{j=1}^{\infty} j c_j x^j - \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\, c_{k+1} x^k + \sum_{m=2}^{\infty} c_{m-2} x^m = x$$

acomodando

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left((n+2)(n+1)\, c_{n+2} - n c_n - (n+1)\, c_{n+1}\right) x^n + \sum_{m=2}^{\infty} c_{m-2} x^m = x$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} c_2 - c_1 &= 0 \\ 3 \cdot 2\ c_3 - c_1 - 2\ c_2 &= 1 \end{aligned}$$

y la relación de recurrencia para $n \geq 2$

$$(n+2)\,(n+1)\,c_{n+2} - nc_n - (n+1)\,c_{n+1} - c_{n-2} = 0$$

con la cual se obtienen todos los demás coeficientes.

Si la ecuación es

$$y'' + (\sin x)\,y' + (\exp x)\,y = 0$$

se expanden los coeficientes

$$y'' + \left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \cdots\right)y' + \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \cdots\right)y = 0$$

se propone la solución en términos de series de potencias

$$y(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} y'(x) = \sum_{j=1}^{\infty} j c_j x^{j-1} \\ \\ y''(x) = \sum_{j=2}^{\infty} j(j-1) c_j x^{j-2} \end{array} \right.$$

por lo cual

$$\left[\sum_{j=2}^{\infty} j(j-1)c_j x^{j-2}\right] + \left(x - \frac{1}{6}x^3 + \cdots\right)\left[\sum_{j=1}^{\infty} j c_j x^{j-1}\right] + \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots\right)\left[\sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j\right] = 0$$

acomodando

$$(2c_2 + c_0) + (6c_3 + 2c_1 + c_0)\,x + (12c_4 + 3c_2 + c_1 + c_0)\,x^2 + (20c_5 + 4c_3 + c_2 + c_1 + c_0)\,x^3 + \cdots = 0$$

$$\begin{aligned} 2c_2 + c_0 &= 0 \\ 6c_3 + 2c_1 + c_0 &= 0 \\ 12c_4 + 3c_2 + c_1 + c_0 &= 0 \\ 20c_5 + 4c_3 + c_2 + c_1 + c_0 &= 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Ejercicio. Utilice el mismo método para la ecuación ejercicio anterior

$$y'' + \frac{x}{1-x^2}y' - \frac{1}{1-x^2}\ y = \mathrm{e}^{2x}; \qquad \textit{con} \quad y(0) = 1; \quad \text{y} \quad y'(0) = 1.$$

6. Los Puntos y las Estrategias

Dada una ecuación diferencial del tipo

$$P(x)\,y'' + Q(x)\,y' + R(x)\;\; y = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y'' + \frac{Q(x)}{P(x)}y' + \frac{R(x)}{P(x)}\; y = 0$$

Puntos ordinarios Un punto ordinario $x = x_0$ será aquel alrededor del cual $p(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}$ y $q(x) = \frac{R(x)}{P(x)}$ sean analíticas en ese punto o

$$\lim_{x \to x_0} p(x) \equiv \lim_{x \to x_0} \frac{Q(x)}{P(x)} = l_1 \qquad \text{con } l_1 \text{ finito}$$

$$\lim_{x \to x_0} q(x) \equiv \lim_{x \to x_0} \frac{R(x)}{P(x)} = l_2 \qquad \text{con } l_2 \text{ finito}$$

O también, lo que es lo mismo, que $p(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}$ y $q(x) = \frac{R(x)}{P(x)}$ tengan una expansión en Taylor alrededor de ese punto $x = x_0$.

Puntos singulares regulares Un punto $x = x_0$ se llamará punto singular regular si

$$\lim_{x \to x_0} (x - x_0)\,p(x) \equiv \lim_{x \to x_0} (x - x_0)\,\frac{Q(x)}{P(x)} = l_3 \qquad \text{con } l_3 \text{ finito}$$

$$\lim_{x \to x_0} (x - x_0)^2\,q(x) \equiv \lim_{x \to x_0} (x - x_0)^2\,\frac{R(x)}{P(x)} = l_4 \qquad \text{con } l_4 \text{ finito}$$

O también, lo que es lo mismo, que $p(x)\,(x - x_0) = (x - x_0)\,\frac{Q(x)}{P(x)}$ y $q(x)\,(x - x_0)^2 = (x - x_0)^2\,\frac{R(x)}{P(x)}$ tengan una expansión en Taylor alrededor de ese punto.

Puntos singulares irregulares Ninguna de las anteriores

7. Ecuaciónes e intervalos en puntos regulares

La ecuación de Legendre[3]

$$(1 - x^2)\; y'' - 2x\; y' + \lambda(\lambda + 1)\; y = 0$$

tiene puntos regulares en $x \neq \pm 1$ y puntos singulares regulares en $x = \pm 1$. Pero es analítica en $x \in (-1, 1)$ lo tanto, todos los x son ordinarios si $x \in (-1, 1)$. En ese intervalo se propone una solución

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

[3] **Adrien Marie Legendre** (1752-1833). Matemático francés, encuadrado en la escuela de París, que surgió tras la revolución de 1789. Realizó una teoría general de las funciones elipticas y divulgó numerosos trabajos de investigadores jóvenes en el campo del análisis matemático.

por lo tanto

$$(1-x^2)\ \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 2x\ \sum_{n=1}^{\infty} n\ a_n x^{n-1} + \lambda(\lambda+1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

multiplicando y acomodando

$$\sum_{j=0}^{\infty}(j+2)(j+1)a_{j+2}x^j - \ \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - 2\ \sum_{n=1}^{\infty} n\ a_n x^n + \lambda(\lambda+1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

expandiendo

$$\begin{aligned} 0 =& 2a_2 + \lambda(\lambda+1)a_0 \left\{(\lambda+2)(\lambda-1)a_1 + (3\cdot 2)a_3\right\} x + \\ &+ \ \sum_{n=2}^{\infty}\left\{(n+2)(n+1)a_{n+2} + (\lambda+n+1)(\lambda-n)a_n\right\} x^n \end{aligned}$$

donde hemos utilizado

$$-n(n-1) - 2n + \lambda(\lambda+1) = (\lambda+n+1)(\lambda-n)$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{(\lambda+1)\lambda}{2}\ a_0 \\ a_4 &= \frac{(\lambda+3)(\lambda+1)\lambda(\lambda-2)}{4!}\ a_0 \\ a_{2n} &= (-1)^n \frac{(\lambda+2n-1)(\lambda+2n-3)\cdots(\lambda+1)\lambda(\lambda-2)\cdots(\lambda-2n+2)}{(2n)!}\ a_0 \end{aligned}$$

y las potencias impares serán

$$\begin{aligned} a_3 &= -\frac{(\lambda+2)(\lambda-1)}{3!}\ a_1 \\ a_5 &= \frac{(\lambda+4)(\lambda+2)(\lambda-1)(\lambda-3)}{5!}\ a_1 \\ a_{2n+1} &= (-1)^n \frac{(\lambda+2n)(\lambda+2n-2)\cdots(\lambda+2)(\lambda-1)\cdots(\lambda-2n+1)}{(2n+1)!}\ a_1 \end{aligned}$$

y su solución general de la forma

$$y(x) = a_0\ y_0(x) + a_1 y_1(x)$$

con

$$\begin{aligned} y_0(x) &= 1 - \frac{(\lambda+1)\lambda}{2}\ x^2 + \frac{(\lambda+3)(\lambda+1)\lambda(\lambda-2)}{4!}\ x^4 + \cdots \\ y_1(x) &= x - \frac{(\lambda+2)(\lambda-1)}{3!}\ x^3 + \frac{(\lambda+4)(\lambda+2)(\lambda-1)(\lambda-3)}{5!}\ x^5 + \cdots \end{aligned}$$

si $\lambda = 2n$ una de las series se corta solución es un polinomio de potencias pares y si $\lambda = 2n+1$ la otra se corta en uno de potencias impares

λ	Ecuación de Legendre	Polinomio Asociado
0	$(1-x^2)\ y''-2x\ y'=0$	$y_0(x)=1$
1	$(1-x^2)\ y''-2x\ y'+2\ y=0$	$y_1(x)=x$
2	$(1-x^2)\ y''-2x\ y'+6\ y=0$	$y_0(x)=1-3x^2$
3	$(1-x^2)\ y''-2x\ y'+12\ y=0$	$y_1(x)=x-\frac{5}{3}x^3$
4	$(1-x^2)\ y''-2x\ y'+20\ y=0$	$y_0(x)=1-10x^2+\frac{35}{3}x^4$

Los polinomios de Legendre son funciones que surgen en problemas de electrostática como solución de la ecuación de Legendre y son efectivamente polinomios para λ entero. Los Polinomios de Legendre también pueden ser generados a partir de la Fórmula de Rodrígues

$$P_n(x)=\frac{1}{n!2^n}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n, \qquad n=0,1,2,.....$$

con $P_0(x)=1$. También se dispone de una relación de recurrencia

$$(n+1)\,P_{n+1}(x)=\ (2n+1)\,xP_n(x)-nP_{n-1}(x)$$

8. El Método de Frobenius

Para la solución de ecuaciones diferenciales lineales ordinarias alrededor de puntos singulares regulares se utiliza el método de Frobenius[4]. Dada una ecuación diferencial

$$y''+F_1\left(x\right)y'+F_2\left(x\right)\ y=0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad y''+\frac{f_1\left(x\right)}{\left(x-x_0\right)}y'+\frac{f_2\left(x\right)}{\left(x-x_0\right)^2}\ y=0 \tag{3}$$

donde $F_1\left(x\right)$ y $F_2\left(x\right)$ tienen singularidades regulares en$x=x_0$ y por lo tanto $f_1\left(x\right)$ y $f_2\left(x\right)$ son analíticas alrededor de ese punto entonces, la propuesta de solución será una serie de Frobenius

$$y(x)=\left(x-x_0\right)^m\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(x-x_0\right)^n \tag{4}$$

donde n es entero positivo, pero m puede ser entero positivo (entonces la serie de Frobenius es una serie de Taylor) o entero negativo (entonces la serie de Frobenius es una serie de Laurent), o un racional. Por lo cual una serie de Frobenius incluye a las serie de Taylor y Laurent. Para hacer las cosas más simples supongamos, sin perder generalidad, $x_0=0$. Además, como $f_1\left(x\right)$ y $f_2\left(x\right)$ son analíticas entonces

$$f_1\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n \qquad \text{y} \qquad f_2\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n \tag{5}$$

por lo tanto

$$x^2y''+x\ f_1\left(x\right)\ y'+f_2\left(x\right)\ y=0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2y''+x\ \left[\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n\right]\ y'+\left[\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n\right]\ y=0$$

[4]**Ferdinand Georg Frobenius** (1849-1917) Matemático Alemán famoso por sus contribuciones en Teoría de Grupos y métodos para resolver ecuaciones difernecidales.

y con la propuesta de serie de Frobenius

$$y(x)=x^m\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \qquad \Longrightarrow y'(x)=mx^{m-1}\left[\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right]+x^m\left[\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}\right]$$

$$\Downarrow$$

$$y''(x)=m\left(m-1\right)x^{m-2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right]+2mx^{m-1}\left[\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}\right]+x^m\left[\sum_{n=2}^{\infty}n\left(n-1\right)a_nx^{n-2}\right]$$

sustituyendo

$$0=x^2\left\{m\left(m-1\right)x^{m-2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right]+2mx^{m-1}\left[\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}\right]+x^m\left[\sum_{n=2}^{\infty}n\left(n-1\right)a_nx^{n-2}\right]\right\}+$$

$$+x\left[\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n\right]\left\{mx^{m-1}\left[\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right]+x^m\left[\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}\right]\right\}+\left[\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n\right]\left\{x^m\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right\}$$

acomodando

$$0=\left\{m\left(m-1\right)x^m\left[\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right]+2mx^m\left[\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n\right]+x^m\left[\sum_{n=2}^{\infty}n\left(n-1\right)a_nx^n\right]\right\}+$$

$$+\left[\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n\right]\left\{mx^m\left[\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right]+x^m\left[\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n\right]\right\}+\left[\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n\right]\left\{x^m\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right\}$$

o

$$0=x^m\left(\left\{m\left(m-1\right)\left[\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right]+2m\left[\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n\right]+\left[\sum_{n=2}^{\infty}n\left(n-1\right)a_nx^n\right]\right\}+\right.$$

$$\left.+\left[\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n\right]\left\{m\left[\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right]+\left[\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n\right]\right\}+\left[\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n\right]\left\{\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right\}\right)$$

Expandiendo las series tendremos

$$0 = x^m \left\{ a_0 \underbrace{\left[m\,(m-1) + b_0 m + c_0 \right]}_{EI(m)} \right\} + \tag{6}$$

$$+\, x^{m+1} \left\{ a_1 \underbrace{\left[m\,(m+1) + b_0\,(m+1) + c_0 \right]}_{EI(m+1)} + a_0\,[b_1 m + c_1] \right\} + \tag{7}$$

$$+\, x^{m+2} \left\{ a_2 \underbrace{\left[(m+2)\,(m+1) + b_0\,(m+2) + c_0 \right]}_{EI(m+2)} + a_1\,[b_1\,(m+1) + c_1] + a_0\,[b_2 m + c_2] \right\} \tag{8}$$

$$+\, x^{m+3} \left\{ a_3 \underbrace{\left[(m+3)\,(m+2) + b_0\,(m+3) + c_0 \right]}_{EI(m+3)} + a_2\,[b_1\,(m+2) + c_1] + \right. \tag{9}$$

$$\left. + a_1\,[b_2\,(m+1) + c_2] + a_0\,[b_3 m + c_3] \right\} + \cdots$$

$$\vdots$$

$$+\, x^{m+n} \left\{ a_n \underbrace{\left[(m+n)\,(m+n-1) + b_0\,(m+n) + c_0 \right]}_{EI(m+n)} + a_{n-1}\,[b_1\,(m+n-1) + c_1] + \right. \tag{10}$$

$$+\, a_{n-2}\,[b_2\,(m+n-2) + c_2] + a_{n-3}\,[b_3\,(m+n-3) + c_3] + \cdots \tag{11}$$

$$\left. + a_1\,[b_{n-1}\,(m+1) + c_{n-1}] + a_0\,[b_n m + c_n] \right\} \tag{12}$$

$$+ \cdots$$

la cual puede ser reacomodada aún más, y toma la forma elegante y compacta de

$$0 = x^m \left\{ a_0\ EI\,(m) \right\} + \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ a_i\ EI\,(m+i) + \sum_{k=0}^{i-1} a_k\ \left[(m+k)\, b_{i-k} + c_{i-k} \right] \right\} x^{m+i} \tag{13}$$

donde hemos identificado$EI\,(m) = m\,(m-1) + b_0 m + c_0$. Como es de esperarse, este polinomio se anula si los coeficientes de $x^m \cdots x^{m+i}$ se anulan. La primera de las ecuaciones que surge es la ecuación indicadora o índice

$$a_0 \neq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad EI\,(m) = m\,(m-1) + b_0 m + c_0 = 0 \tag{14}$$

que no es otra cosa que un polinomio de segundo grado en m. Al anular el coeficiente de x^{m+i}

$$\left\{ a_i\ EI\,(m+i) + \sum_{k=0}^{i-1} a_k\ \left[(m+k)\, b_{i-k} + c_{i-k} \right] \right\} = 0 \tag{15}$$

obtendremos la relación de recurrencia para la serie de Frobenius, correspondientes a cada raíz de la ecuación indicadora (14). Dato que la ecuación indicadora es un polinomio de segundo grado para m, entonces de allí se derivan dos raíces m_1 y m_2. Dependiendo de como sean estas raíces distinguiremos tres casos:

1. $m_1 \neq m_2 \wedge m_1 - m_2 \neq N$ con N entero.
   En este caso, la solución en términos de la serie de Frobenius para la ecuación diferencial será

$$y(x) = C_1 \underbrace{\|x\|^{m_1} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\,(m_1)\,x^n\right]}_{y_1(x)} + C_2 \underbrace{\|x\|^{m_2} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\,(m_2)\,x^n\right]}_{y_2(x)} \tag{16}$$

2. $m_1 = m_2$
   En este caso, la solución en términos de la serie de Frobenius para la ecuación diferencial será

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1 \underbrace{\|x\|^{m} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\,(m)\,x^n\right]}_{y_1(x)} \\ &+ C_2 \underbrace{\left\{ \underbrace{\|x\|^{m} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\,(m)\,x^n\right]}_{y_1(x)} \ln x + \|x\|^{m} \left[\sum_{n=0}^{\infty} B_n\,(m)\,x^n\right] \right\}}_{y_2(x)} \end{aligned} \tag{17}$$

3. $m_1 \neq m_2 \wedge m_1 - m_2 = N$ con N entero positivo.
   En este caso, la solución en términos de la serie de Frobenius para la ecuación diferencial será

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1 \underbrace{\|x\|^{m_1} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\,(m_1)\,x^n\right]}_{y_1(x)} \\ &+ C_2 \underbrace{\left\{ f\ \underbrace{\|x\|^{m_1} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\,(m_1)\,x^n\right]}_{y_1(x)} \ln x + \|x\|^{m_2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(m_2)\,x^n\right] \right\}}_{y_2(x)} \end{aligned} \tag{18}$$

Donde las constantes $a_n\,(m_1)\,, a_n\,(m_2)\,, B_n\,(m_1)$ y f, surgen de sustituir estas soluciones en la ecuación diferencial y resolver por el método de los coeficientes indeterminados. Nótese que hemos indicado explícitamente que los coeficientes $a_n = a_n\,(m_1)\,; a_n = a_n\,(m_2)\,; B_n = B_n\,(m_2)$ corresponden a las series de cada una de las raíces de la ecuacion indicadora.

En resumen, si una ecuación diferencial $y'' + F_1\,(x)\,y' + F_2\,(x)\ \ y = 0$ presenta puntos sigulares regulares para $F_1\,(x)$ y $F_2\,(x)$ en $x = x_0$. Lo que se traduce en que

$$y'' + \frac{f_1\,(x)}{(x - x_0)} y' + \frac{f_2\,(x)}{(x - x_0)^2}\ y = 0 \qquad \text{con} \qquad \left\{ \begin{array}{l} f_1\,(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n\,(x - x_0)^n \\ \\ f_2\,(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(x - x_0)^n \end{array} \right.$$

es decir, que $f_1(x)$ y $f_2(x)$ sean analíticas en torno a $x = x_0$. Entonces se aplica el método de Frobenius. Para ello,

1. se propone una solución en series de potencias de Frobenius:

$$y(x) = x^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

   con $m \in \Re \wedge n \in N$,

2. se sustituye en la ecuación diferencial y se aisla el término independiente (de orden cero en n). El coeficiente de este término se anula e implica la ecuación la indicadora o índice

$$a_0 \neq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad EI(m) = m(m-1) + b_0 m + c_0 = 0$$

   que no es otra cosa que un polinomio de segundo grado en m. De esta ecuación emergen dos raíces $m_2 \wedge m_1$,en función de estas raíces, procedemos de distinto modo

   a) si $m_1 \neq m_2 \wedge m_1 - m_2 \neq N$ con N entero entonces tendremos dos series de Frobenius

$$y(x) = C_1\ x^{m_1} \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n(m_1)x^n\right] + C_2\ x^{m_2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n(m_2)x^n\right]$$

   b) si $m_1 = m_2$ tenemos que insertar un logaritmo

$$y(x) = \ x^{m_1} \left\{(C_1 + C_2 \ln x) \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n(m)x^n\right] + C_2\ \left[\sum_{n=0}^{\infty} B_n(m)x^n\right]\right\}$$

   c) $m_1 \neq m_2 \wedge m_1 - m_2 = N$ con N entero positivo, entoces, como por arte de magia

$$y(x) = \ x^{m_1} \left\{(C_1 + f \ln x) \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n(m_1)x^n\right]\right\} + C_2 x^{m_2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n(m_2)x^n\right]$$

3. Seguidamente se determina, según el caso, se determinan las relaciones de recurrecias para los distintos coeficientes $a_n = a_n(m_1)\,; a_n = a_n(m_2)\,; B_n = B_n(m_2)\,; G_n = G_n(m_2)$ a partir de la ecuación (15)

$$\left\{a_n\ EI(m+n) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k\ \ [(m+k)\,b_{n-k} + c_{n-k}]\right\} = 0$$

   tomando en cuenta los coeficientes de los desarrollos en series de potencias de las funciones

$$f_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \qquad \text{y} \qquad f_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

   si anulamos los coeficientes de x^{m+n}

$$a_n\ EI(m+n) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k\ \ [(m+k)\,b_{n-k} + c_{n-k}] = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad a_n = -\frac{\sum_{k=0}^{n-1} a_k\ \ [(m+k)\,b_{n-k} + c_{n-k}]}{EI(m+n)}$$

   entonces se obtiene la relación de recurrencia, al menos para los casos (16) y (17) en los cuales $EI(m+n) \neq 0$. El caso $EI(m+n) = 0$, vale decir $m_1 \neq m_2 \wedge m_1 - m_2 = N$ con N será analizado en detalle más adelante.

8.1. $m_1 \neq m_2 \wedge m_1 - m_2 \neq N$ con N entero.

En ese caso es claro que la resolver la ecuación indicadora y sustituir m_1 en el resto de los coeficientes, se va despejando todos los coeficientes $a_0 \cdots a_n$ en términos de a_0. Igualmente al sustituir m_2 encontramos la otra solución y ambas son linealmente independientes y la solución será

$$y(x) = C_1 \; x^{m_1} \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right] + C_2 \; x^{m_2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right]$$

Ejemplo, encuentre la solución en términos de series de Frobenius de la siguiente ecuación

$$x^2 \; y'' + x \left(x + \frac{1}{2} \right) y' - \left(x^2 + \frac{1}{2} \right) \; y = 0$$

al dividir por x^2 identificamos que a $x = 0$ es un punto singular regular. Proponemos por lo tanto una serie de Frobenius $y(x) = x^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ como posible solución. La ecuación indicadora $EI\,(m) = m\,(m-1) + b_0 m + c_0 = 0$ queda ahora, como

$$\left. \begin{array}{c} m = 1 \\ \\ m = \frac{-1}{2} \end{array} \right\} \Longleftarrow m\,(m-1) + \frac{1}{2} m - \frac{1}{2} = 0 \qquad \Longleftarrow \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{c} b_0 = \frac{1}{2} \\ \\ b_1 = 1 \end{array} \right\} \Longleftarrow f_1\,(x) = \frac{1}{2} + x \\ \\ \left\{ \begin{array}{c} c_0 = -\frac{1}{2} \\ \\ c_1 = 0 \\ \\ c_2 = -1 \end{array} \right\} \Longleftarrow f_2\,(x) = -\frac{1}{2} - x^2 \end{array} \right.$$

los demás coeficientes $b_2 = b_3 = \cdots = b_n = \cdots = 0$ y $c_3 = c_4 = \cdots = c_n = \cdots = 0$.

- El primer término del coeficiente de x^{m+n}, puede ser escrito en términos de genéricos, como

$$EI\,(m+n) = (m+n)\,(m+n-1) + \underbrace{\frac{1}{2}}_{b_0}\,(m+n) + \underbrace{\left(-\frac{1}{2} \right)}_{c_0} = m^2 + 2mn - \frac{1}{2} m + n^2 - \frac{1}{2} n - \frac{1}{2} \quad (19)$$

- El segundo término de ese mismo coeficiente, es una sumatoria en la cual inervienen los coeficientes de las expansiones de $f_1\,(x)$ y $f_2\,(x)$ (ecuación (5)). Como de esta expansión sobrevive $b_1 = 1$ significa que sólo aparecen el coeficiente para el cual $n - k = 1 \Rightarrow k = n - 1$ y como también sobrevive $c_2 = -1$, tendremos que $n - k = 2 \Rightarrow k = n - 2$,también estará presente. Esto es

$$a_{n-1} \left[(m+n-1) \cdot \underbrace{1}_{b_1} \right] + a_{n-2} \left[\underbrace{(-1)}_{c2} \right] \quad (20)$$

En definitiva el coeficiente completo se escribe como

$$a_n \left[m^2 + 2mn - \frac{1}{2} m + n^2 - \frac{1}{2} n - \frac{1}{2} \right] + a_{n-1}\,[m+n-1] - a_{n-2} = 0 \quad (21)$$

con lo cual la relación de recurrencia general será

$$a_n = \frac{a_{n-2} - a_{n-1}\left[m+n-1\right]}{m^2 + 2mn - \frac{1}{2}m + n^2 - \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}} \qquad \text{para } n \geq 2 \tag{22}$$

Dependiendo del valor de m tendremos una relación de recurrencia para la primera de las series $m = 1$ o para la segunda, $m = -\frac{1}{2}$. Analicemos cado por caso. Para el caso particular $m = 1$, se obtiene la relación de recurrencia:

$$a_n = \left(a_{n-2} - n a_{n-1}\right)\frac{2}{2n^2 + 3n} \qquad \text{para } n \geq 2$$

y se encuentra a_1 al utilizar el coeficiente de x^{m+1} (ecuación (7))

$$a_1\left[1\left(1+1\right) + \frac{1}{2}\left(1+1\right) - \frac{1}{2}\right] + a_0\left[1+0\right] = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad a_1 = -\frac{2}{5}a_0$$

con lo cual

$$\begin{array}{lll}
n=2 \;\Longrightarrow\; a_2 = \frac{1}{7}\left(-2a_1 + a_0\right) = \frac{1}{7}\left(\frac{4}{5}a_0 + a_0\right) = \frac{9}{35}a_0 & \Longrightarrow & a_2 = \frac{9}{35}a_0 \\
n=3 \;\Longrightarrow\; a_3 = \frac{2}{27}\left(-3a_2 + a_1\right) = \frac{2}{27}\left(\frac{-27}{35}a_0 - \frac{2}{5}a_0\right) = -\frac{82}{945}a_0 & \Longrightarrow & a_3 = -\frac{82}{945}a_0 \\
n=4 \;\Longrightarrow\; a_4 = \frac{1}{22}\left(-4a_3 + a_2\right) = \frac{1}{22}\left(\frac{328}{945}a_0 - \frac{9}{35}a_0\right) = \frac{571}{20790}a_0 & \Longrightarrow & a_4 = \frac{571}{20790}a_0 \\
\vdots & & \vdots
\end{array}$$

Así la primera solución será

$$y_1(x) = a_0\; x\left(1 - \frac{2}{5}x + \frac{9}{35}x^2 - \frac{82}{945}x^3 + \frac{571}{20790}x^4 + \cdots\right)$$

Del mismo modo se construye la segunda solución linealmente independiente a partir de $m = -\frac{1}{2}$. Así, la relación de recurrencia para los coficientes de la serie de Frobenius $m = -\frac{1}{2}$ será:

$$a_n = \left(a_{n-2} - \left(n - \frac{3}{2}\right)a_{n-1}\right)\frac{2}{2n^2 - 3n} \qquad \text{para } n \geq 2$$

y

$$a_1\left[\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\right] + a_0\left[-\frac{1}{2}\right] = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad a_1 = -a_0$$

por lo cual

$$\begin{array}{lll}
n=2 \;\Longrightarrow\; a_2 = -\frac{1}{2}a_1 + a_0 = \frac{1}{2}a_0 + a_0 = \frac{3}{2}a_0 & \Longrightarrow & a_2 = \frac{3}{2}a_0 \\
n=3 \;\Longrightarrow\; a_3 = \frac{2}{9}\left(-\frac{3}{2}a_2 + a_1\right) = \frac{2}{9}\left(\frac{-9}{4}a_0 - a_0\right) = -\frac{13}{18}a_0 & \Longrightarrow & a_3 = -\frac{13}{18}a_0 \\
n=4 \;\Longrightarrow\; a_4 = \frac{1}{10}\left(-\frac{5}{2}a_3 + a_2\right) = \frac{1}{10}\left(\frac{65}{36}a_0 + \frac{3}{2}a_0\right) = \frac{119}{360}a_0 & \Longrightarrow & a_4 = \frac{119}{360}a_0 \\
\vdots & & \vdots
\end{array}$$

Por lo cual, la solución general será

$$y(x) = C_1\ x\left(1 - \frac{2}{5}x + \frac{9}{35}x^2 - \frac{82}{945}x^3 + \frac{571}{20790}x^4 + \cdots\right)$$

$$+ C_2\ x^{-\frac{1}{2}}\left(1 - x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{13}{18}x^3 + \frac{119}{360}x^4 + \cdots\right)$$

Nótese que esta solución vale para $0 < \|x\| < \infty$ por cuanto para $x < 0$, la segunda solución se hace imaginaria pero se puede resolver haciendo $C_2 = i\ C_3$

Como ejercicio resuelva

$$2x^2\ y'' - x\ y' - (x+1)\ y = 0$$

8.2. $m_1 = m_2$.

Del mismo modo, si tenemos una ecuación diferencial

$$x^2\ y'' + x\ \underbrace{\left[x\ F_1(x)\right]}_{f_1(x)} y' + \underbrace{\left[x^2\ F_2(x)\right]}_{f_2(x)}\ y = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad L\{y\} = x^2\ y'' + x\ f_1(x)\, y' + f_2(x)\ y = 0 \tag{23}$$

donde en la cual $F_1(x)$ y $F_2(x)$ tienen singularidades regulares en $x = 0$ pero $f_1(x)$ y $f_2(x)$ son analíticas para ese punto, vale decir

$$f_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \qquad \text{y} \qquad f_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

se aplica el Método de Frobenius. Pero antes de proceder a ilustrar este caso en al cual ambas raíces coinciden, veamos, un poco de dónde surge la forma general de la solución (17). Para ello reacomodemos la ecuación diferencial (23) de la forma

$$x^2\ y'' + x\ f_1(x)\, y' + f_2(x)\ y = \left\{x^2\ \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + x\ f_1(x)\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + f_2(x)\right\} y \equiv \mathcal{L}\{y\} = 0$$

donde $\mathcal{L}\{\bullet\}$ está concebido como un operador lineal. Es ilustrador mostrar de dónde sale la forma curiosa de la solución de la ecuación diferencial (17). Para ello, recordamos que

$$\mathcal{L}\{y\} \equiv = x^m\{a_0\ EI(m)\} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\ EI(m+n) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k\ \left[(m+k)\, b_{n-k} + c_{n-k}\right]\right\} x^{m+n}$$

si anulamos los coeficientes de x^{m+n} entonces

$$a_n\ EI(m+n) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k\ \left[(m+k)\, b_{n-k} + c_{n-k}\right] = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad a_n = -\frac{\sum_{k=0}^{n-1} a_k\ \left[(m+k)\, b_{n-k} + c_{n-k}\right]}{EI(m+n)}$$

considerando $EI(m+n) \neq 0$ por lo tanto, para los a_n seleccionados (que anulen el coeficiente x^{m+n}) y considerando el caso $m_1 = m_2$

$$\mathcal{L}\{y\}(m,x) = \{a_0\ EI(m)\}\, x^m = a_0\,(m - m_1)^2\ x^m$$

Nótese que estamos considerando $\mathcal{L}\{y\}(m,x)$ como una función de m, y x. Por lo cual evaluando en $m = m_1$

$$\mathcal{L}\{y\}(m,x)\big|_{m=m_1} = a_0 (m-m_1)^2 \; x^m\Big|_{m=m_1} = 0$$

pero además podemos intentar derivar respecto a la constante m

$$\frac{\partial\{\mathcal{L}\{y\}(m,x)\}}{\partial m} = \frac{\partial}{\partial m}\left\{x^2 \; \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + x \; f_1(x) \; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + f_2(x)\right\} y = \left\{x^2 \; \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + x \; f_1(x) \; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + f_2(x)\right\} \frac{\partial y}{\partial m}$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial y}{\partial m}\right\}(m,x) = \frac{\partial}{\partial m}\left(a_0 (m-m_1)^2 \; x^m\right) = a_0\left[(m-m_1)^2 \; x^m \ln x + 2(m-m_1) \; x^m\right]$$

y comprobamos que también se anula al evaluarla en $m = m_1$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial y}{\partial m}\right\}(m,x)\Big|_{m=m_1} = a_0\left[(m-m_1)^2 \; x^m \ln x + 2(m-m_1) \; x^m\right]\Big|_{m=m_1} = 0$$

por lo tanto $\left\{\frac{\partial y}{\partial m}\right\}(m,x)\Big|_{m=m_1}$ también es solución, con lo cual la segunda toma la forma

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial y}{\partial m}\right\}(m,x)\Big|_{m=m_1} = \frac{\partial}{\partial m}\left\{\|x\|^m \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(m)\, x^n\right]\right\}\Big|_{m=m_1}$$

$$= (x^{m_1}\ln x)\left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(m_1)\, x^n\right] + x^{m_1}\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial a_n(m)}{\partial m}\Big|_{m=m_1} x^n\right]$$

y la solución general tendrá la forma

$$y(x) = C_1 \underbrace{\|x\|^{m_1}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(m_1)\, x^n\right]}_{y_1(x)}$$

$$+ C_2 \underbrace{\left\{\underbrace{\|x\|^{m_1}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(m_1)\, x^n\right]}_{y_1(x)} \ln x + \|x\|^{m_1}\left[\sum_{n=0}^{\infty} b_n(m_1)\, x^n\right]\right\}}_{y_2(x)}$$

Analicemos, como ejemplo un caso particular de la ecuación de Bessel[5]

$$x^2 \; y'' + x \; y' + \left(x^2 + \nu^2\right) \; y = 0$$

[5]**Fredrich Wilhel Bessel** (1784-1846). Astrónomo y matemático alemán. Aportó notables contribuciones a la astronomía posicional, la geodesia y la mecánica celeste. Particularmente, se dedicó a aumentar la exactitud de las mediciones de la posición y el movimiento de los astros. La precisión de sus mediciones hizo posible que determinara pequeñas irregularidades en los movimientos de Urano lo condujo a predecir la existencia de Neptuno. Análogos razonamientos lo llevaron a especular sobre la presencia de estrellas compañeras en Sirio y Procyon. A partir de datos registrados en el siglo XVII, calculó la órbita del cometa Halley

Una vez más, la ecuación viene parametrizada por ν y dependiendo de su valor tendremos una familia de soluciones. Consideremos el caso $\nu = 0$

$$x^2\ y'' + x\ y' + x^2\ y = 0$$

la ecuación indicadora $EI\,(m) = m\,(m-1) + b_0 m + c_0 = 0$ nos queda como

$$m = 0 \Longleftarrow m\,(m-1) + m = 0 \qquad \Longleftarrow \left\{ \begin{array}{l} b_0 = 1 \Longleftarrow f_1\,(x) = 1 \\ \\ \left. \left\{ \begin{array}{l} c_0 = 0 \\ \\ c_1 = 0 \\ \\ c_2 = 1 \end{array} \right. \right\} \Longleftarrow f_2\,(x) = x^2 \end{array} \right.$$

los demás coeficientes $b_1 = b_2 = b_3 = \cdots = b_n = 0$ y $c_3 = c_4 = \cdots = c_n = 0$. Con lo cual $EI\,(n) = n\,(n-1) + n = n^2$, Por lo tanto, la relación de recurrencia se obtiene del coeficiente de x^{m+n}

$$a_n = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} a_k\ \left[(m+k)\,b_{n-k} + c_{n-k}\right]}{EI\,(m+n)} \qquad \text{dado que} \left\{ \begin{array}{l} b_1 \neq 0 \Rightarrow n-k = 1 \Rightarrow k = n-1 \\ \\ c_2 \neq 0 \Rightarrow n-k = 2 \Rightarrow k = n-2 \end{array} \right.$$

$$a_n\,(m) = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} a_k\,(m)\ \left[(m+k)\,b_{n-k} + c_{n-k}\right]}{(m+n)\,(m+n-1) + (m+n)} = \frac{a_{n-1}\,(m)\ \ (m+n-1) + a_{n-2}\,(m)}{(m+n)^2}$$

tomando $m = 0$, se tiene

$$a_n\,(0) = -\frac{\sum_{k=0}^{n-1} a_k\ \ (0)\,[k b_{n-k} + c_{n-k}]}{n^2} \qquad \text{con} \left\{ \begin{array}{l} b_1 \neq 0 \Rightarrow n-k = 1 \Rightarrow k = n-1 \\ \\ c_2 \neq 0 \Rightarrow n-k = 2 \Rightarrow k = n-2 \end{array} \right.$$

con lo cual

$$a_n\,(0) = -\frac{a_{n-2}\ \ (0)\,[c_2] + a_{n-1}\ \ (0)\,[(n-1)\,b_1]}{n^2} = -\frac{a_{n-2}\,(0) + a_{n-1}\,(0)\ \ (n-1)}{n^2} \qquad \text{para } n \geq 2$$

Otra vez, al anular el coeficiente para x^{m+1} (ecuación (7)) se obtiene $a_1\,[0\,(0+1) + 1 \cdot (0+1) + 0] + a_0\,[0 \cdot 0 + 0] = 0 \Rightarrow a_1 = 0$. Con lo cual es claro que se anulan todos los coeficientes impares, y así

$$a_{2n}\,(0) = -\frac{a_{2n-2}\,(0)}{(2n)^2} \qquad \text{para } n = 1, 2, 3, \cdots$$

con lo cual

$$n=1 \quad \Longrightarrow \quad a_2(0) = -\frac{1}{4}a_0(0) \qquad \Longrightarrow \quad a_2(0) = -\tfrac{1}{4}a_0(0)$$

$$n=2 \quad \Longrightarrow \quad a_4(0) = -\frac{1}{(2\cdot 2)^2}a_2(0) = \frac{1}{(2\cdot 2)^2\, 2^2}a_0(0) \qquad \Longrightarrow \quad a_4(0) = \frac{1}{(2\cdot 2)^2\, 2^2}a_0(0)$$

$$n=3 \quad \Longrightarrow \quad a_6(0) = -\frac{1}{(2\cdot 3)^2}a_4(0) = -\frac{1}{(2\cdot 3)^2}\left[\frac{1}{(2\cdot 2)^2\, 2^2}a_0(0)\right] \quad \Longrightarrow \quad a_6(0) = \frac{-1}{(2\cdot 3)^2\, 2^3}a_0(0)$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$n=l \quad \Longrightarrow \quad a_{2l}(0) = -\frac{a_{2l-2}(0)}{(2l)^2} = \frac{(-1)^l}{2^{2l}\,(l!)^2}a_0(0) \qquad \Longrightarrow \quad a_{2l}(0) = \frac{(-1)^l}{2^{2l}\,(l!)^2}a_0(0)$$

por lo tanto la primera de las soluciones será

$$y_1(x) = a_0 \underbrace{\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}\,(n!)^2} x^{2n}\right]}_{J_0(x)}$$

Donde $J_0(x)$ se conoce como la función de Bessel de primera especie de orden cero.

Para calcular la segunda solución de la ecuación de Bessel se sustituye

$$y_2(x) = J_0(x)\ln x + \sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n \qquad \text{en la ecuación } x^2\ y'' + x\ y' + x^2\ y = 0$$

para ello se requieren sus derivadas

$$y_2(x) = J_0(x)\ln x + \sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n \qquad \Rightarrow y_2'(x) = J_0'(x)\ln x + \frac{J_0(x)}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n(0)\, n x^{n-1} \qquad \text{y}$$

$$\Downarrow$$

$$y_2''(x) = J_0''(x)\ln x + 2\frac{J_0'(x)}{x} - \frac{J_0(x)}{x^2} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n n(n-1)\, x^{n-2}$$

entonces

$$0 = x^2\ \left[J_0''(x)\ln x + 2\frac{J_0'(x)}{x} - \frac{J_0(x)}{x^2} + \sum_{n=2}^{\infty} B_n n(n-1)\, x^{n-2}\right] +$$

$$+\, x\ \left[J_0'(x)\ln x + \frac{J_0(x)}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n n x^{n-1}\right] + x^2\ \left[J_0(x)\ln x + \sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n\right]$$

con lo cual

$$0 = \left(\underbrace{x^2\ J_0''(x) + x\ J_0'(x) + Jx^2\ {}_0(x)}_{=0}\right)\ln x + 2\ J_0'(x)\ \ x + \sum_{n=2}^{\infty} B_n n(n-1)\, x^n + \sum_{n=1}^{\infty} B_n n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} B_n x^{n+2}$$

y finalmente

$$B_1 x + 2^2 B_2 x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} \left(B_n n^2 + B_{n-2}\right) x^n = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \, 2n}{2^{2n} \, (n!)^2} x^{2n}$$

es claro que para los coeficientes impares se obtiene $b_1 = b_3 = b_5 = \cdots = b_{2n+1} \cdots = 0$ ya que

$$B_1 x + 2^2 B_2 x^2 + \left(3^2 B_3 + B_1\right) x^3 + \left(4^2 B_4 + B_2\right) x^4 + \left(5^2 B_5 + B_3\right) x^5 + \cdots = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \, 2n}{2^{2n} \, (n!)^2} x^{2n}$$

mientras que para las potencias pares tendremos la relación de recurrencia

$$B_{2n} = \frac{1}{(2n)^2} \left[\frac{(-1)^{n+1} \; n}{2^{2(n-1)} \, (n!)^2} - b_{2n-2} \right]$$

entonces

$$\begin{aligned}
B_2 &= 2 \frac{1}{2^2 \, (1!)^2} \\
B_4 &= \frac{1}{(2 \cdot 2)^2} \left(-\frac{4}{2^2 \, (2!)^2} - 2 \frac{1}{2^2 \, (1!)^2} \right) = -\frac{1}{4^2 2^2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) \\
B_6 &= \frac{1}{(6)^2} \left[\frac{3}{2^4 \, (3!)^2} - b_4 \right] = \frac{1}{6^2} \left[\frac{3}{2^4 \, (3!)^2} + \frac{1}{4^2 2^2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) \right] = \frac{1}{6^2 4^2 2^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \\
&\vdots \\
B_{2k} &= \frac{(-1)^{k+1}}{2^{2k} \, (k!)^2} \left(\underbrace{\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k-2} + \cdots + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1}_{H_k} \right) = \frac{(-1)^{k+1}}{2^{2k} \, (k!)^2} H_k
\end{aligned}$$

Así la segunda solución puede tomar la forma de

$$y_2(x) = J_0(x) \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n} \, (n!)^2} H_n \; x^{2n}$$

y por lo tanto la solución general tendrá la forma

$$y(x) = A_1 \; J_0(x) + A_2 \; \left[J_0(x) \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n} \, (n!)^2} H_n \; x^{2n} \right]$$

es costumbre en Física reacomodar la segunda solución de la forma

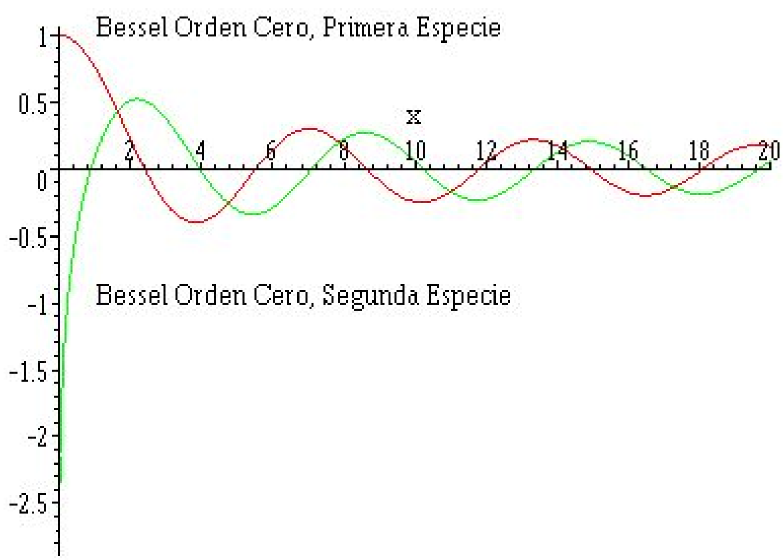
$$y_2(x) \equiv Y_0(x) = \frac{2}{\pi} \left[\left(\gamma + \ln\left(\frac{x}{2}\right) \right) J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n} \, (n!)^2} H_n \; x^{2n} \right]$$

donde γ se conoce como la constante de Euler-Mascheroni[6] y tiene un valor

$$\gamma = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \cdots + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 - \ln(n) \right) \cong 0{,}5772$$

[6] **Lorenzo Mascheroni** (1750-1800) Monje Italiano, nacido en Bergamo, Lombardo-Veneto. Profesor de Algebra y Geometría en la Universidad de Pavia y luego Rector de la misma. Además de poeta, se destaco por sus contribuciones al Cálculo y a la Mecánica.

y así, finalmente
$$y(x) = C_1 \ J_0(x) + C_2 \ Y_0(x)$$



Comportamiento de las funciones de Bessel de orden cero. De primera especie $J_0(x)$ y de segunda especie$Y_0(x)$

Nótese que tanto la función de Bessel de orden cero, de primera especie, $J_0(x)$, como la función de Bessel de orden cero, de segunda especie, $Y_0(x)$,tienen un comportamiento oscilatorio cuando $x \to \infty$, que $J_0(0) = 1$, mientras que $Y_0(x)$ se comporta como $\frac{2}{\pi} \ln x$ cuando $x \to 0$.

8.3. $m_1 \neq m_2 \wedge m_1 - m_2 = N$ con N entero.

En general, la ecuación indicadora para este caso, $m_1 - m_2 = N \Rightarrow m_1 = N + m_2$, con $m_1 > m_2$. Este caso nos lleva a la ecuación (13)

$$0 = x^m \{a_0 \ EI(m)\} + \sum_{n=1}^{N-1} \left\{ a_n \ EI(m+n) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \ \left[(m+k) b_{n-k} + c_{n-k}\right] \right\} x^{m+n} \tag{24}$$

$$+ \left\{ a_N \ EI(m+N) + \sum_{k=0}^{N-1} a_k \ \left[(m+k) b_{N-k} + c_{N-k}\right] \right\} x^{m+N} + \tag{25}$$

$$+ \sum_{n=N+1}^{\infty} \left\{ a_n \ EI(m+n) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \ \left[(m+k) b_{n-k} + c_{n-k}\right] \right\} x^{m+n} \tag{26}$$

donde esta m es la menor de las raíces y $m + N$ la mayor. Anulando el término $\{a_0 \ EI(m)\}$ coeficiente de x^m nos lleva a la ecuación indicadora:

$$EI(m+N) = (m+N)(m+N-1) + b_0(m+N) + c_0 = EI(m) = (m)(m-1) + b_0(m) + c_0 = 0.$$

por lo tanto $EI\,(m+N)=0$ anula al coeficiente del término a_n para $n=N$, esto es la ecuación (12), consecuentemente eso significa que se derivan dos casos

- $EI\,(m+N)=0 \wedge \sum_{k=0}^{N-1} a_k \;\; [(m+N+k)\, b_{n-k}+c_{n-k}]=0$
  En este caso la solución en serie de Frobenius, partiendo de la raíz mayor de la ecuación indicadora, $m+N$, quedará en términos de a_0 y no será linealmente independiente a la solución provista por la raíz menor, por consiguiente la solución proveniente de esta raíz menor, m, será la solución general. Esto quiere decir que en (18) la constante $f=0$ y por consiguiente la solución será
$$y(x)=a_0\underbrace{\;\|x\|^m\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\,(m)\,x^n\right]}_{y_1(x)}+a_N\underbrace{\;\|x\|^m\left[\sum_{n=0}^{\infty}a_n\,(m+N)\,x^n\right]}_{y_2(x)} \tag{27}$$

- $EI\,(m+N)=0 \wedge \sum_{k=0}^{N-1} a_k \;\; [(m+N+k)\, b_{n-k}+c_{n-k}]\neq 0$
  En este caso la raíz mayor de la ecuación indicadora $m+N$ determinará una de las soluciones, la constante $f\neq 0$ y la solución general tendrá la forma de
$$y(x)=C_1\underbrace{\;\|x\|^{m_1}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\,(m_1)\,x^n\right]}_{y_1(x)}$$
$$+\,C_2\underbrace{\left\{f\underbrace{\;\|x\|^{m_1}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\,(m_1)\,x^n\right]}_{y_1(x)}\ln x+\|x\|^{m_2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}a_n\,(m_2)\,x^n\right]\right\}}_{y_2(x)}$$

La ecuación de Bessel de orden fraccionario puede ilustrar el primero de estos casos, resolvámosla
$$x^2\;y''+x\;y'+\left(x^2-\frac{1}{4}\right)\;y=0$$
una vez más, le expansión en serie de Frobenius de $y\,(x)$ nos lleva a una ecuación indicadora del tipo
$$\left.\begin{array}{r} m=\dfrac{1}{2}\\[2ex] m=\dfrac{-1}{2}\end{array}\right\}\Longleftarrow m\,(m-1)+m-\frac{1}{4}=0 \qquad \Longleftarrow \left\{\begin{array}{c} b_0=1\Longleftarrow f_1\,(x)=1\\[2ex] \left\{\begin{array}{c} c_0=-\dfrac{1}{4}\\[2ex] c_1=0\\[2ex] c_2=1\end{array}\right\}\Longleftarrow f_2\,(x)=x^2-\dfrac{1}{4}\end{array}\right.$$
los demás coeficientes $b_1=b_2=b_3=\cdots=b_n=0$ y $c_3=c_4=\cdots=c_n=0$. Dado que $N=1$ se tiene que la ecuación (12)
$$\left\{a_1\underbrace{[(m+1)\,(m+1-1)+b_0\,(m+1)+c_0]}_{EI(m+N)}+a_0\,[b_1\,(m+1-1)+c_1]+\cdots\right\}=0 \tag{28}$$

$$\left\{ a_1 \underbrace{\left[\left(\left(-\frac{1}{2} \right) + 1 \right) \left(\left(-\frac{1}{2} \right) \right) + \left(\left(-\frac{1}{2} \right) + 1 \right) - \frac{1}{4} \right]}_{EI\left(\left(-\frac{1}{2} \right) + 1 \right)} + a_0 \left[0 \right] \right\} = 0 \Rightarrow a_1 \left[0 \right] + a_0 \left[0 \right] = 0 \tag{29}$$

con lo cual cualquier valor de a_1 y a_0 estarán permitidos. La relación de recurrencia proviene de anular el coeficiente de x^{m+n}, para $m = -\frac{1}{2}$. Vale decir

$$a_n \; EI\left(m + n \right) + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \; \left[\left(m + k \right) b_{n-k} + c_{n-k} \right] = 0 \Rightarrow \tag{30}$$

$$a_n \left[\left(\left(-\frac{1}{2} \right) + n \right) \left(\left(-\frac{1}{2} \right) + n - 1 \right) + \left(\left(-\frac{1}{2} \right) + n \right) - \frac{1}{4} \right] + a_{n-1} \left[0 \right] + a_{n-2} \left[1 \right] = 0 \tag{31}$$

$$a_n \left(n^2 - n \right) = -a_{n-2} \tag{32}$$

los coeficientes serán

$$\begin{array}{ll}
n = 2 \Longrightarrow \quad a_2 = -\frac{1}{2} a_0 & n = 3 \Longrightarrow \quad a_3 = -\frac{1}{6} a_1 \\
n = 4 \Longrightarrow \quad a_4 = -\frac{1}{12} a_2 = \frac{1}{24} a_0 & n = 5 \Longrightarrow \quad a_5 = -\frac{1}{20} a_3 = \frac{1}{120} a_1 \\
n = 6 \Longrightarrow \quad a_4 = -\frac{1}{30} a_4 = -\frac{1}{720} a_0 & n = 7 \Longrightarrow \quad a_7 == -\frac{1}{42} a_5 = -\frac{1}{5040} a_1 \\
\vdots & \vdots
\end{array}$$

Por lo cual, la solución general será

$$y(x) = a_0 \; x^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{24} x^4 - \frac{1}{720} x^6 + \cdots \right) + a_1 \; x^{-\frac{1}{2}} \left(-\frac{1}{6} x + \frac{1}{120} x^5 - \frac{1}{5040} x^7 + \cdots \right)$$

Para considerar el segundo caso, $EI\left(m + N \right) = 0 \wedge \sum_{k=0}^{N-1} a_k \; \left[\left(m + N + k \right) b_{n-k} + c_{n-k} \right] \neq 0$ analicemos la ecuación diferencial

$$x^2 \; y'' + x\left(2 - x \right) \; y' + \left(2 - x^2 \right) \; y = 0$$

una vez más, la expansión en serie de Frobenius de $y\left(x \right)$ nos lleva a una ecuación indicadora del tipo

$$\left. \begin{array}{l} m = 2 \\ \\ m = 1 \end{array} \right\} \Longleftarrow m\left(m - 1 \right) - 2m + 2 = 0 \qquad \Longleftarrow \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{c} b_0 = -2 \\ \\ b_1 = 1 \end{array} \right\} \Longleftarrow f_1\left(x \right) = -2 + x \\ \\ \left\{ \begin{array}{c} c_0 = 2 \\ \\ c_1 = 0 \\ \\ c_2 = 1 \end{array} \right\} \Longleftarrow f_2\left(x \right) = x^2 + 2 \end{array} \right.$$

los demás coeficientes $b_2 = b_3 = \cdots = b_n = 0$ y $c_3 = c_4 = \cdots = c_n = 0$. Dado que $N = 1$ se tiene que la ecuación (12) para $m = 1$

$$a_1 \left[(m+1)\, m - 2\,(m+1) + 2\right] + a_0\,[m] = a_1\,[2-4+2] + a_0\,[2] = a_1\,[0] + a_0\,[1] = 0 \tag{33}$$

y no conduce a nada por cuanto $a_0 = 0$, mientras que, para $m = 2$ se obtiene

$$a_1 \left[(m+1)\, m - 2\,(m+1) + 2\right] + a_0\,[m] = a_1\,[3\cdot 2 - 2\cdot 3 + 2] + a_0\,[1] = a_1\,[1] + a_0\,[1] = 0 \tag{34}$$

por lo cual la relación de recurrencia para $m = 2$ nos queda

$$a_n\ EI\,(m+n) + \sum_{k=0}^{\infty} a_k\ \left[(m+k)\, b_{n-k} + c_{n-k}\right] = 0 \Rightarrow \tag{35}$$

$$a_n \left[(2+n)\,(2+n-1) - 2\,(2+n) + 2\right] + a_{n-1}\,[1+n] + a_{n-2}\,[1] = 0 \tag{36}$$

$$a_n \left(n^2 + n\right) + a_{n-1}\,(n+1) = -a_{n-2} \tag{37}$$

los coeficientes serán

$$\begin{array}{llll} n = 2 \Longrightarrow & 6a_2 = -3a_1 - a_0 = 3a_0 - a_0 & \Longrightarrow & a_2 = \dfrac{1}{3} a_0 \\ n = 3 \Longrightarrow & 12a_3 = -4a_2 - a_1 = -\dfrac{4}{3} a_0 + a_0 & \Longrightarrow & a_3 = -\dfrac{1}{36} a_0 \\ \vdots & & & \vdots \end{array}$$

Por lo cual, la solución general será

$$y_1(x) = a_0\ x^2 \left(1 - x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{36}x^3 + \cdots\right)$$

y la segunda solución linealmente independiente será

$$y_2(x) = u\,(x) - B_1 y_1(x) \ln x \tag{38}$$

y queda como ejercicio demostrar la relación de recurrencia para los coeficientes B_n de la serie que describe

$$u\,(x) = x \left(\sum_{i=0}^{\infty} B_i x^i\right) \tag{39}$$

La Ecuación de Bessel es

$$x^2 y'' + x y' + \left(x^2 - k^2\right) y = 0; \qquad k \in \Re$$

obviamente $x = 0$ es una singularidad regular, por lo tanto el método de Frobenius nos permite afirmar que si $x = x_0$ corresponde a un polo regular de la ecuación

$$x^2 y'' + x \tilde{P}\,(x)\, y' + \tilde{Q}\,(x)\, y = 0;$$

la solución vendrá expresada de la forma

$$y(x) = (x - x_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x - x_0)^n$$

con r real y determinado a través de las raíces de la ecuación indicadora

$$r^2 + \left(\tilde{P}(x_0) - 1\right) r + \tilde{Q}(x_0) = 0$$

y donde $\tilde{P}\,(x)$ y $\tilde{Q}\,(x)$ son funciones analíticas en el entorno de $x = x_0$ y por lo tanto

$$\tilde{P}(x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \,(x - x_0)^n \quad \wedge \quad \tilde{Q}(x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \,(x - x_0)^n$$

Para la Ecuación de Bessel

$$\tilde{P}\,(x) = 1 \Rightarrow b_0 = 1 \quad \wedge \quad \tilde{Q}(x) = \left(x^2 - k^2\right) \Rightarrow c_0 = -k^2; \quad c_2 = 1$$

los demás coeficientes b's y c's se anulan. La ecuación indicadora y sus raíces quedan como

$$m\,(m-1) + m - k^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad m^2 = k^2 \quad \Rightarrow \quad r_{1,2} = \pm k$$

Donde, para $r = k$ proponemos

$$y_1(x) = x^k \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Al hacer las cuentas

$$\begin{aligned} \left(x^2 - k^2\right) y_1(x) &= x^k \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n - x^k \sum_{n=0}^{\infty} k^2 \; a_n x^n \\ x y_1'(x) &= x^k \sum_{n=0}^{\infty} (k+p)\, a_n x^n \\ x^2 y_1''(x) &= x^k \sum_{n=0}^{\infty} (k+p)\,(k+p-1)\, a_n x^n \end{aligned}$$

la ecuación de Bessel queda como

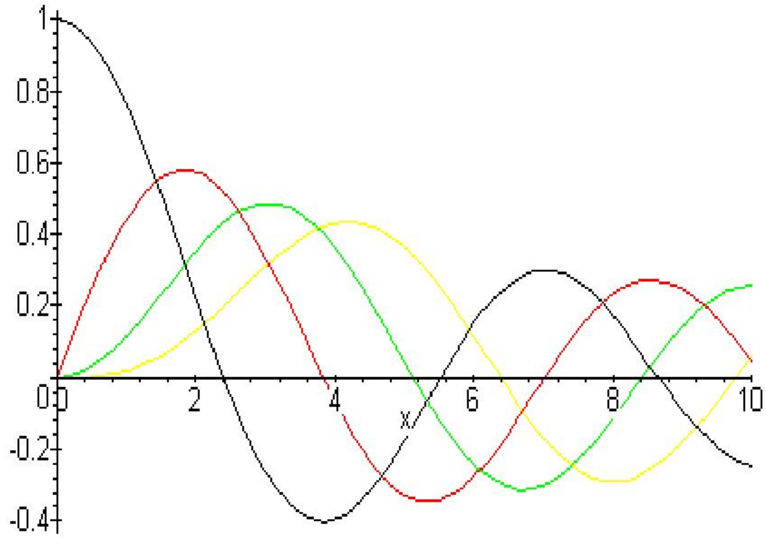
$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \left[(k+n)\,(k+n-1) + (k+n) - k^2\right] a_n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n = 0 \\ (2n+1)\, a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} \left[k\,(2n+k)\, a_k + a_{n-2}\right] x^n = 0 \end{aligned}$$

y por consiguiente obtenemos la relación de recurrencia

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n\,(2k+n)}$$

donde es claro que $a_1 = 0$. Adicionalmente, si suponemos

$$a_0 = \frac{1}{2^k \;\Gamma\,(k+1)}$$



tendremos

$$\begin{aligned}
a_1 &= a_3 = a_5 = \cdots = 0 \\
a_2 &= -\frac{a_0}{2\,(2k+2)} \\
a_4 &= \frac{a_0}{2 \cdot 4\,(2k+2)\,(2k+4)} \\
&\vdots \\
a_{2n} &= (-1)^n \,\frac{a_0}{2^{2n}\; n!\,(k+1)\,(k+2)\cdots(k+n)}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la primera de las soluciones será

$$J_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma\,(n+1)\,\Gamma\,(n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+k}$$

la *Función de Bessel, de orden k de primera especie.*

Si $k = 0$ entonces

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

Para el caso particular de $k = m$ entero positivo la función de Bessel de primera especie toma la forma de

$$J_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\;\,(n+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+m}$$

Para encontrar la segunda solución linealmente independiente de la ecuación de Bessel el método de Frobenius propone tres casos dependiendo el valor de k

$$\begin{cases} r_1 - r_2 \neq entero \Rightarrow \; k \neq entero \\ r_1 = r_2 = r \Rightarrow \; k = 0 \\ r_1 - r_2 = entero \Rightarrow \; k = entero \end{cases}$$

Caso 1: $r_1 - r_2 \neq entero \Rightarrow \; k \neq entero.$
La solución general será de la forma

$$y(x) = C_1 J_k(x) + C_2 J_{-k}(x)$$

donde

$$J_{-k}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(n-k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-k} \qquad x > 0$$

Para $x < 0$ se debe reemplazar x^{-k} por $\|x\|^{-k}$. Nótese que esta última expresión también es válida para k semientero, i.e. $k = n + \frac{1}{2}$.
Caso 2: $r_1 = r_2 = r \Rightarrow \; k = 0.$
La solución general será de la forma

$$K_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n x^n + J_0(x) \; \ln x$$

y los coeficientes $\tilde{a}_n$ se encuentran mediante el tradicional método de sustituirlos en la ecuación de Bessel para $k = 0$

$$xy'' + y' + xy = 0;$$

De donde se obtiene

$$\begin{aligned} xK_0(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n x^{n+1} + xJ_0(x) \; \ln x = \sum_{n=3}^{\infty} \tilde{a}_{n-2} x^{n-1} + xJ_0(x) \; \ln x \\ K_0'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} n\tilde{a}_n x^{n-1} + (J_0(x) \; \ln x)' = \sum_{n=1}^{\infty} n\tilde{a}_n x^{n-1} + J_0'(x) \; \ln x + \frac{J_0(x)}{x} \\ xK_0''(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\,\tilde{a}_n x^{n-1} + xJ_0''(x) \; \ln x + 2J_0'(x) - \frac{J_0(x)}{x} \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\tilde{a}_1 + 4\tilde{a}_2 x + \sum_{n=3}^{\infty} \left[n^2 \tilde{a}_n + \tilde{a}_{n-2}\right] x^{n-1} + \left[\underbrace{xJ_0'' + J_0' + xJ_0}_{=\,0}\right] \ln x + 2J_0'(x) = 0$$

Acomodando y derivando la expresión para J_0 tendremos

$$\tilde{a}_1 + 4\tilde{a}_2 x + \sum_{n=3}^{\infty} \left[n^2 \tilde{a}_n + \tilde{a}_{n-2}\right] x^{n-1} = -2J_0'(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{2^{2n-1}} \frac{(-1)^{n+1}}{(n!)^2} x^{2n-1}$$

Ahora multiplicando la expresión por x y separando las sumatorias en sus términos pares e impares, tendremos

$$\tilde{a}_1 x + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(2n+1)^2\,\tilde{a}_{2n+1} + \tilde{a}_{2n-1}\right] x^{2n+1} = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left[(2n)^2\,\tilde{a}_{2n} + \tilde{a}_{2n-2}\right] x^{2n} + 4\tilde{a}_2 x^2 = x^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n}{2^{2n}\,(n!)^2}x^{2n}$$

Por lo cual $\tilde{a}_1 = \tilde{a}_3 = \tilde{a}_5 = \cdots = 0$ mientras que

$$4\tilde{a}_2 = 1; \qquad (2n)^2\,\tilde{a}_{2n} + \tilde{a}_{2n-2} = (-1)^{n+1}\frac{2n}{2^{2n}\,(n!)^2} \qquad n > 1$$

De esta forma los coeficientes quedan como:

$$\tilde{a}_2 = \frac{1}{2^2}$$

$$\tilde{a}_4 = -\frac{1}{2^2\cdot 4^2}\left(1+\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2^4\cdot(2!)^2}\left(1+\frac{1}{2}\right)$$

$$\vdots$$

$$\tilde{a}_{2n} = \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n}\ (n!)^2}\left\{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{k}\right\}$$

La expresión para la solución general de la ecuación de Bessel para $k=0$ será

$$K_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n!)^2}\left\{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{k}\right\}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n} + J_0(x)\ \ln x$$

En Física, es costumbre expresar esta solución de una forma equivalente pero ligeramente diferente:

$$Y_0(x) = -\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left\{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}\right\}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n} + \frac{2}{\pi}J_0(x)\ \left[\ln\frac{x}{2}+\gamma\right]$$

donde, una vez más, $\gamma = 0{,}577215664901\cdots$ es la constante de Euler-Mascheroni.
Caso 3: $r_1 - r_2 = \mathit{entero} \Rightarrow\ k = \mathit{entero}$.
La solución general será de la forma

$$K_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\tilde{a}_n x^{k+n} + C J_n(x)\ \ln x$$

Procediendo de forma equivalente a la situación anterior tenemos que la solución general podrá expresarse (luego de una laboriosa faena) como

$$K_k(x) = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{k-1}\frac{(k-n-1)!}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-k} - \frac{H_k}{2k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{k} -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\left[H_n + H_{n+k}\right]}{n!\,(k+n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+k} + J_k(x)\ \ln x$$

Y finalmente la *Función de Bessel de orden k de segunda especie* o *Función de Neumann*

$$
\begin{aligned}
Y_k(x) = &-\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{k-1}\frac{(k-n-1)!}{(n!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-k} - \frac{H_k}{\pi k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{k} - \\
&-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\left[H_n + H_{n+k}\right]}{n!\,(k+n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+k} + \frac{2}{\pi}J_k(x)\ \left[\ln\frac{x}{2}+\gamma\right]
\end{aligned}
$$

En ambos casos

$$
H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}
$$

Más aún

$$
\begin{aligned}
Y_k(x) = &\frac{2}{\pi}J_k(x)\ \ln\frac{x}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{k-1}\frac{(k-n-1)!}{(n!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-k} \\
&-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,(k+n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+k}\left[\psi(n+1)+\psi(n+k+1)\right]
\end{aligned}
$$

donde $\psi(n) = \dfrac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)}$ es la función Digamma con

$$
\begin{aligned}
\psi(n+1) &= -\gamma + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \\
\psi(1) &= -\gamma
\end{aligned}
$$

También es costumbre definir la función de Bessel de segunda especie en terminos de las de primera especie

$$
N_k(x) = Y_k(x) = \frac{J_k(x)\cos k\pi - J_{-k}(x)}{\operatorname{sen} k\pi}
$$

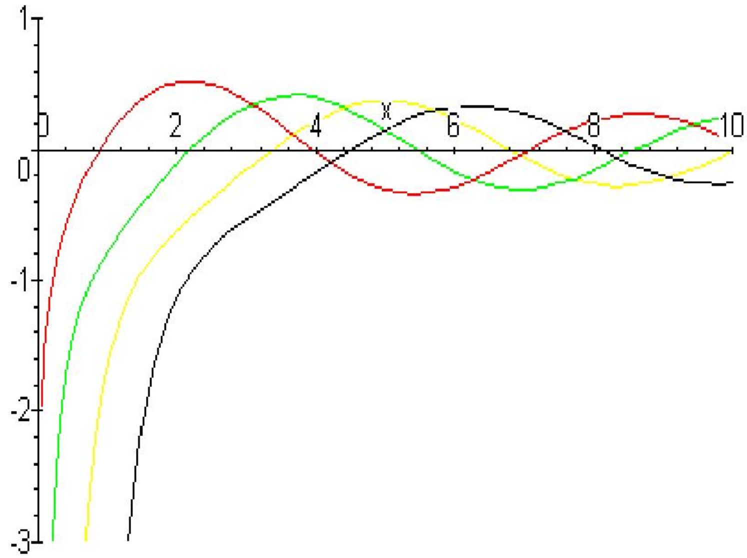
Nótese que para $k = m$ entero, aparentemente no esta definida. Pero, aplicando la regla de L'Hospital

$$
\begin{aligned}
N_m(x) &= \left.\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\left[J_k(x)\cos k\pi - J_{-k}(x)\right]}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\left[\operatorname{sen} k\pi\right]}\right|_{k=m} \\
&= \left.\frac{-\pi J_n(x)\operatorname{sen} n\pi + \left\{\cos n\pi\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}J_k(x) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}J_{-k}(x)\right\}}{\pi\cos n\pi}\right|_{k=m} \\
&= \frac{1}{\pi}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}J_k(x) - (-1)^n\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}J_{-k}(x)\right\}_{k=m}
\end{aligned}
$$

De este modo, la soluciónes generales para la ecuación de Bessel, se expresan según el caso en

$$
\begin{aligned}
Z_k(x) &= C_1 J_k(x) + C_2 J_{-k}(x); \qquad k \neq \mathit{entero} \\
\tilde{Z}_k(x) &= C_1 J_k(x) + C_2 Y_k(x); \qquad k = 0 \quad \vee \quad \mathit{entero}
\end{aligned}
$$

La funciones $Z_k(x)$ y $\tilde{Z}_k(x)$ se denominan *Funciones Cilíndricas de orden k*



Propiedades de las Funciones de Bessel

Otras Formas de la Ecuación de Bessel

Haciendo los cambios de variables correspondientes llegamos a

$$u''(x) + \frac{1-2\alpha}{x}u'(x) + \left[\left(\beta\nu\ x^{\nu-1}\right)^2 + \frac{\alpha^2 - k^2\nu^2}{x^2}\right]u(x) = 0$$

donde

$$u(x) = x^{\alpha} Z_k(\beta x^{\nu})$$

o también

$$u''(x) + \alpha x^{\nu}\ u(x) = 0$$

con

$$u(x) = \sqrt{x} Z_{\frac{1}{\nu+2}}\left(\frac{2\sqrt{\alpha}}{\nu+2}x^{1+\frac{\nu}{2}}\right)$$

Relaciones de Recurrencia:

Las funciones de Bessel tienen las siguientes relaciones de recurrencia

$$\begin{aligned} xJ_{k+1}(x) - 2k\ J_k(x) + xJ_{k-1}(x) &= 0 \\ J_{k+1}(x) + 2J_k'(x) - J_{k-1}(x) &= 0 \end{aligned}$$

Para demostrar estas relaciones partimos por demostrar la siguiente identidad

$$\begin{aligned} \left[x^k J_k(x)\right]' &= x^k J_{k-1}(x) \\ \left[x^{-k} J_k(x)\right]' &= -x^{-k} J_{k+1}(x) \end{aligned}$$

De la expresión para $J_k(x)$ se obtiene

$$
\begin{aligned}
\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+2k}\right]' &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, 2\,(n+k)\, x^{2n+2k-1}}{2^{2n+k}\Gamma(n+1)\Gamma(n+k+1)} \\
&= x^k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^{2n+(k-1)}}{2^{2n+(k-1)}\Gamma(n+1)\Gamma(n+k)} \\
&= x^k J_{k-1}(x)
\end{aligned}
$$

Unos cambios apropiados nos llevan a demostrar las segunda de las relaciones y al desarrollar las derivadas

$$
\begin{aligned}
\left[x^k J_k(x)\right]' &= k x^{k-1} J_k(x) + x^k J_k'(x) = x^k J_{k-1}(x) \\
\left[x^{-k} J_k(x)\right]' &= -k x^{-k-1} J_k(x) + x^{-k} J_k'(x) = -x^{-k} J_{k+1}(x)
\end{aligned}
$$

Por lo cual

$$
\begin{aligned}
kJ_k(x) + xJ_k'(x) &= xJ_{k-1}(x) \\
-kJ_k(x) + xJ_k'(x) &= -xJ_{k+1}(x)
\end{aligned}
$$

Al sumar y restar miembro a miembro obtenemos las relaciones de recurrencia. Es obvia la importancia que adquieren $J_1(x)$ y $J_0(x)$ para generar el resto de las funciones de Bessel.

Funciones de Bessel y Funciones Elementales

Las funciones de Bessel de órden semientero, $k = \frac{1}{2}$ se expresa como

$$
J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{x}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}
$$

pero como

$$
\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right) = \left\{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{2n+1}{2}\right\} = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}{2^n}
$$

se encuentra que

$$
\begin{aligned}
J_{1/2}(x) &= \sqrt{\frac{x}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n\; n!\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)} x^{2n} \\
&= \frac{x}{\sqrt{2x}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \left\{1 - \frac{x^2}{2\cdot 3} + \frac{x^4}{2\cdot 4\cdot 3\cdot 5} - \frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 3\cdot 5\cdot 7} + \cdots\right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2x}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \left\{1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right\} = \frac{1}{\sqrt{2x}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \operatorname{sen} x
\end{aligned}
$$

Finalmente, y otra vez invocando a las propiedades de la función Gamma: $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

$$
J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \operatorname{sen} x
$$

Equivalentemente se puede demostrar que

$$
J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x
$$

y ahora utilizando las relaciones de recurrencia tendremos que

$$\begin{aligned} J_{3/2}(x) &= -J_{-1/2}(x) + \frac{1}{x} J_{1/2}(x) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\frac{\operatorname{sen} x}{x} - \cos x \right] \end{aligned}$$

Así mismo

$$\begin{aligned} J_{5/2}(x) &= -J_{1/2}(x) + \frac{3}{x} J_{3/2}(x) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\frac{3 \operatorname{sen} x}{x^2} - \frac{3 \cos x}{x} - \operatorname{sen} x \right] \end{aligned}$$

En general

$$\begin{aligned} J_{n+\frac{1}{2}}(x) &= (-1)^n \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{n+\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}^n}{(x\mathrm{d}x)^n} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} \right) \qquad n = 1, 2, 3, \cdots \\ J_{n+\frac{1}{2}}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{n+\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}^n}{(x\mathrm{d}x)^n} \left(\frac{\cos x}{x} \right) \qquad n = -1, -2, -3, \cdots \end{aligned}$$

Las funciones de Bessel de órden semientero son las únicas funciones de Bessel que pueden ser expresadas en términos de funciones elementales.

Reflexión:

Las funciones de Bessel cumplen con

$$J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x)$$

Para el caso $k = m$ entero positivo la Función de Bessel de primera especie toma la forma de

$$J_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \ (n+m)!} \left(\frac{x}{2} \right)^{2n+m}$$

Si $k = -m$ es un entero negativo los primeros m términos de la serie anterior se anulan ya que $\Gamma(n) \to \infty$ para $n = -1, -2, -3, \cdots$ y la serie se arma como

$$\begin{aligned} J_{-m}(x) &= \sum_{n=m}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \ (n-m)!} \left(\frac{x}{2} \right)^{2n+m} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{l+m}}{(l+m)! \ l!} \left(\frac{x}{2} \right)^{2l+m} \\ J_{-m}(x) &= (-1)^m J_m(x) \end{aligned}$$

Función Generatriz

La función generatriz para las Funciones de Bessel es

$$\mathcal{B}(x,t) = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)}$$

desarrollando las dos series para las exponenciales

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\frac{xt}{2}} &= 1 + \frac{x}{2} t + \frac{x}{2^2 2!} t^2 + \cdots + \frac{x^n}{2^n n!} t^n + \cdots \\ \mathrm{e}^{\frac{x}{2t}} &= 1 - \frac{x}{2} t^{-1} + \frac{x}{2^2 2!} t^{-2} + \cdots + \frac{(-1)^n x^n}{2^n n!} t^{-n} + \cdots \end{aligned}$$

Por lo tanto multiplicando ambas series

$$\mathcal{B}(x,t) = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} = \left\{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n n!} t^n\right\} \left\{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2^n n!} t^{-n}\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\ t^n$$

Representación Integral para las Funciones de Bessel

En la expresión anterior para la función generatriz se realiza el siguiente cambio de varible $t = \mathrm{e}^{i\theta}$ de este modo

$$\mathrm{e}^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} = \mathrm{e}^{ix \operatorname{sen}\theta} = \cos\left(x \operatorname{sen}\theta\right) + i \operatorname{sen}\left(x \operatorname{sen}\theta\right)$$

y por lo tanto

$$\cos\left(x \operatorname{sen}\theta\right) + i \operatorname{sen}\left(x \operatorname{sen}\theta\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\ \left[\cos\left(n\theta\right) + i \operatorname{sen}\left(n\theta\right)\right]$$

igualando partes reales e imaginarias y recordando que $J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x)$, para anular los términos impares en la serie de la parte real y los pares en la de la parte imaginaria, podemos escribir

$$\cos\left(x \operatorname{sen}\theta\right) = J_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x) \cos\left(2n\theta\right)$$

$$\operatorname{sen}\left(x \operatorname{sen}\theta\right) = 2\sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1}(x) \operatorname{sen}\left(\left[2n+1\right]\theta\right)$$

Multiplicando miembro a miembro en la primera de ellas por $\cos\left(2k\theta\right)$ (y por $\cos\left(\left[2k+1\right]\theta\right)$) y la segunda por $\operatorname{sen}\left(\left[2k+1\right]\theta\right)$ (y por $\operatorname{sen}\left(2k\theta\right)$). Integrando (en $0 \leq \theta \leq \pi$), también miembro a miembro y término por término en las series, se obtienen

$$J_{2n}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos\left(x \operatorname{sen}\theta\right) \cos\left(2n\theta\right)\ \mathrm{d}\theta$$

$$0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos\left(x \operatorname{sen}\theta\right) \cos\left(\left[2n+1\right]\theta\right)\ \mathrm{d}\theta$$

$$J_{2n+1}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\left(x \operatorname{sen}\theta\right) \operatorname{sen}\left(\left[2n+1\right]\theta\right)\ \mathrm{d}\theta$$

$$0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\left(x \operatorname{sen}\theta\right) \operatorname{sen}\left(2n\theta\right)\ \mathrm{d}\theta$$

Sumando miembro a miembro primera con cuarta y segunda con tercera tendremos la expresión integral para las funciones de Bessel

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos\left(\cos\left(n\theta\right) - x \operatorname{sen}\theta\right)\ \mathrm{d}\theta$$

ya que todos sabemos que

$$\cos\left(n\theta - x \operatorname{sen}\theta\right) = \cos\left(2n\theta\right)\cos\left(x \operatorname{sen}\theta\right) + \operatorname{sen}\left(2n\theta\right)\operatorname{sen}\left(x \operatorname{sen}\theta\right)$$

Ortogonalidad de las Funciones de Bessel y Series de Bessel-Fourier

Ortogonalidad:
Haciendo el caso particular de $\alpha = 0$ y $\nu = 1$ en la primera de las expresiones equivalentes para la ecuación de Bessel, tendremos

$$u''(x) + \frac{1}{x}u'(x) + \left[\beta^2 - \frac{k^2}{x^2}\right] u(x) = 0$$

donde

$$u(x) = J_k(\beta x)$$

multiplicando por x la ecuacion diferencial puede ser reescrita como

$$\left[xJ_k'(\beta x)\right]' + \left[\beta^2 x - \frac{k^2}{x}\right] J_k(\beta x) = 0$$

suponiendo k real y positivo, planteamos la ecuación para dos índices diferentes β_1 y β_2 por lo tanto quedan como

$$\left[xJ_k'(\beta_1 x)\right]' + \left[\beta_1^2 x - \frac{k^2}{x}\right] J_k(\beta_1 x) = 0$$
$$\left[xJ_k'(\beta_2 x)\right]' + \left[\beta_2^2 x - \frac{k^2}{x}\right] J_k(\beta_2 x) = 0$$

Multiplicando apropiadamente por $J_k(\beta_1 x)$ y $J_k(\beta_2 x)$, Integrando y restando miembro a miembro tendremos que

$$\begin{aligned}
\left(\beta_2^2 - \beta_1^2\right) \int_0^1 xJ_k(\beta_1 x)J_k(\beta_2 x)\mathrm{d}x &= \int_0^1 \left\{ J_k(\beta_2 x)\left[xJ_k'(\beta_1 x)\right]' - J_k(\beta_1 x)\left[xJ_k'(\beta_2 x)\right]' \right\} \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left[J_k(\beta_2 x)xJ_k'(\beta_1 x) - J_k(\beta_1 x)xJ_k'(\beta_2 x)\right]' \mathrm{d}x \\
&= J_k(\beta_2 x)xJ_k'(\beta_1 x) - J_k(\beta_1 x)xJ_k'(\beta_2 x)\Big|_{x=0}^{x=1}
\end{aligned}$$

para β_i las raíces de los polinomios de Bessel, i.e. $J_k(\beta_i) = 0$ podemos deducir que las funciones de Bessel son ortogonales

$$\left(\beta_i^2 - \beta_j^2\right) \int_0^1 xJ_k(\beta_i x)J_k(\beta_j x)\mathrm{d}x \propto \delta_{ij}$$

Más aún partiendo de la ecuación de Bessel original se puede llegar a

$$\left\|J_k(\beta x)\right\|^2 = \frac{1}{2}\left[J_k'(\beta)\right]^2 + \frac{\beta^2 - k^2}{2\beta^2}\left[J_k(\beta)\right]^2$$