**Métodos Matemáticos de la Física 2**
**Examen Parcial**
**Observables y Series**
Abril 2006

Nombre________________________________________

1. Un operador Cantidad de Movimiento Generalizado se define como aquel conjunto de operadores hermíticos que cumplen con

$$[\mathbf{J}_x, \mathbf{J}_y] = i\hbar\mathbf{J}_z \quad [\mathbf{J}_y, \mathbf{J}_z] = i\hbar\mathbf{J}_x \quad [\mathbf{J}_z, \mathbf{J}_x] = i\hbar\mathbf{J}_y \quad \text{es decir} \quad [\mathbf{J}_i, \mathbf{J}_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}\mathbf{J}_k$$

con $\epsilon_{ijk}$ el símbolo de Levy Civita y los 'indices repetidos NO indican suma. Adicionalmente, definimos los siguientes operadores

$$\mathbf{J}^2 = \mathbf{J}_x^2 + \mathbf{J}_y^2 + \mathbf{J}_z^2; \quad \mathbf{J}_+ = \mathbf{J}_x + i\mathbf{J}_y \quad \mathbf{J}_- = \mathbf{J}_x - i\mathbf{J}_y$$

*a*) Muestre que

$$\left[\mathbf{J}^2, \mathbf{J}_+\right] = \left[\mathbf{J}^2, \mathbf{J}_-\right] = \left[\mathbf{J}^2, \mathbf{J}_z\right] = 0 \qquad \text{(3 ptos)}$$

**Solución:** Para probar esta propiedad se puede demostrar de forma genérica que $\left[\mathbf{J}_k^2, \mathbf{J}_m\right] = 0$ con $k, m = 1, 2, 3 \equiv x, y, z$ esto es

$$\left[\mathbf{J}_k^2, \mathbf{J}_m\right] = [\mathbf{J}_k\mathbf{J}_k, \mathbf{J}_m] = \mathbf{J}_k\mathbf{J}_k\mathbf{J}_m - \mathbf{J}_m\mathbf{J}_k\mathbf{J}_k = \mathbf{J}_k\mathbf{J}_k\mathbf{J}_m - (i\hbar\epsilon_{mkl}\mathbf{J}_l + \mathbf{J}_k\mathbf{J}_m)\,\mathbf{J}_k$$

con lo cual

$$\left[\mathbf{J}_k^2, \mathbf{J}_m\right] = \mathbf{J}_k\mathbf{J}_k\mathbf{J}_m - i\hbar\epsilon_{mkl}\mathbf{J}_l\mathbf{J}_k - \mathbf{J}_k\left(i\hbar\epsilon_{mkn}\mathbf{J}_n + \mathbf{J}_k\mathbf{J}_m\right)$$

y claramente se anula por cuanto los 'indices no suman pero si son mudos, y $\epsilon_{mkl} = -\epsilon_{mlk}$

$$\left[\mathbf{J}_k^2, \mathbf{J}_m\right] = \mathbf{J}_k\mathbf{J}_k\mathbf{J}_m - i\hbar\epsilon_{mkl}\mathbf{J}_l\mathbf{J}_k - i\hbar\epsilon_{mkn}\mathbf{J}_k\mathbf{J}_n - \mathbf{J}_k\mathbf{J}_k\mathbf{J}_m$$

al conmutar los cuadrados de las componentes con cualquiera de las componentes, y dado que los comutadores son lineales entonces queda demostrado que

$$\left[\mathbf{J}^2, \mathbf{J}_\pm\right] = \left[\mathbf{J}_x^2 + \mathbf{J}_y^2 + \mathbf{J}_z^2, \mathbf{J}_x \pm i\mathbf{J}_y\right] = \left[\mathbf{J}_y^2, \mathbf{J}_x\right] + \left[\mathbf{J}_z^2, \mathbf{J}_x\right] \pm i\left[\mathbf{J}_x^2, \mathbf{J}_y\right] \pm i\left[\mathbf{J}_z^2, \mathbf{J}_y\right] = 0$$

*b*) Si definimos los autovectores comunes a $\mathbf{J}^2$ y $\mathbf{J}_z$ como $|j, m\rangle$ como

$$\mathbf{J}^2\,|j, m\rangle = j\,(j+1)\,\hbar^2\,|j, m\rangle \qquad \mathbf{J}_z\,|j, m\rangle = m\hbar\,|j, m\rangle \qquad \text{con } \langle j, m\,|j', m'\rangle = \delta_{jj'}\delta_{mm'}$$

adicionalmente tenemos que

$$\mathbf{J}_-\,|j, m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m-1)}\,|j, m-1\rangle \qquad \mathbf{J}_+\,|j, m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m+1)}\,|j, m+1\rangle$$

y si suponen (es fácil demostrarlo) que $-j \leq m \leq j$ esto quiere decir que dado el valor un $j$, $m$ varía entre $-j$ y $j$ de uno en uno, esto es $m = -j, -j+1, -j+2, \cdots, j-2, j-1, j$. Suponga ahora que $j = \frac{1}{2}$ Encuentre

1) la representación matricial para $\mathbf{J}_z, \mathbf{J}_-, \mathbf{J}_+, \mathbf{J^2}$ en la base de autovectores de $\mathbf{J}_z, \mathbf{J^2}$ (4 puntos)

**Solución:** Si $|j,m\rangle$ son autovectores de $\mathbf{J}^2$ y $\mathbf{J}_z$ su representaci'on matricial ser'a diagonal y como $m$ var'ia entre $-j$ y $j$ con incrementos de 1 tendremos que ser'an matrices $2\times 2$. La base ortogonal de autovectores ser'a $\left\{ \left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle, \left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle \right\}$

$$\begin{pmatrix} \left\langle \frac{1}{2},\frac{1}{2}\right| \mathbf{J}_z \left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle & \left\langle \frac{1}{2},\frac{1}{2}\right| \mathbf{J}_z \left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle \\ \left\langle \frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right| \mathbf{J}_z \left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle & \left\langle \frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right| \mathbf{J}_z \left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle \end{pmatrix} \equiv \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \left\langle \frac{1}{2},\frac{1}{2}\right| \mathbf{J}^2 \left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle & \left\langle \frac{1}{2},\frac{1}{2}\right| \mathbf{J}^2 \left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle \\ \left\langle \frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right| \mathbf{J}^2 \left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle & \left\langle \frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right| \mathbf{J}^2 \left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle \end{pmatrix} \equiv \frac{3}{4}\hbar^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La representaci'on matricial para $\mathbf{J}_-, \mathbf{J}_+$ obviamente no ser'a diagonal

$$\begin{pmatrix} \left\langle \frac{1}{2},\frac{1}{2}\right| \mathbf{J}_+ \left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle & \left\langle \frac{1}{2},\frac{1}{2}\right| \mathbf{J}_+ \left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle \\ \left\langle \frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right| \mathbf{J}_+ \left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle & \left\langle \frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right| \mathbf{J}_+ \left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle \end{pmatrix} \equiv \hbar\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \left\langle \frac{1}{2},\frac{1}{2}\right| \mathbf{J}_- \left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle & \left\langle \frac{1}{2},\frac{1}{2}\right| \mathbf{J}_- \left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle \\ \left\langle \frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right| \mathbf{J}_- \left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle & \left\langle \frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right| \mathbf{J}_- \left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle \end{pmatrix} \equiv \hbar\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2) Encuentre los autovalores y autovalores para $\mathbf{J}_z, \mathbf{J}_-, \mathbf{J}_+, \mathbf{J^2}$ (6 puntos).

**Solución:** Otra vez, $\left\{ \left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle, \left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle \right\}$ son autovectores de $\mathbf{J}^2$ y $\mathbf{J}_z$. En el caso de $\mathbf{J}^2$ con un autovalor de $\frac{3}{4}\hbar^2$ para ambos autovectores y en el caso de $\mathbf{J}_z$ los autovalores ser'an $\pm\frac{\hbar}{2}$ respectivamente. Para $\mathbf{J}_-, \mathbf{J}_+$ no tendr'an autovalor distinto de cero en esta base.

2. Un ocioso puede calcular

$$\sum_{n=1}^{100} n^{-3} = 1{,}202007 \qquad \text{(4 ptos)}$$

Muestre que

$$1{,}202056 \leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{-3} \leq 1{,}202057$$

**Soluci'on:** Acotando el error seg'un el criterio de la integral tenemos que

$$\int_{101}^{\infty} \mathrm{d}x\, x^{-3} \leq \sum_{n=101}^{\infty} \frac{1}{n^3} \leq \int_{101}^{\infty} \mathrm{d}x\, x^{-3} + \frac{1}{101^3} \Rightarrow 0{,}4901480247\times 10^{-4} \lesssim \sum_{n=101}^{\infty} \frac{1}{n^3} \lesssim 0{,}4998539262\times 10^{-4}$$

con lo cual al sumar 1,202007 se acota la precisi'on

3. Si $t \ll 1$ expanda en Series de Taylor $\sqrt{1-2tz+t^2}$ encuentre los coeficientes para los t'erminos $t^0$, $t^1$, y $t^2$, (4 ptos)

**Soluci'on:** Expandiendo tendremos que

$$1 - zt + \frac{1}{2}\left(1 - z^2\right)t^2 + \frac{1}{2}\left(z - z^3\right)t^3 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + 3z^2 - \frac{z^4}{2}\right)t^4 + \frac{1}{4}\left(-\frac{z}{2} + 5z^3 - \frac{7z^5}{2}\right)t^5 + O\left(t^6\right)$$