Métodos Matemáticos de la Física 2
Examen Parcial
Series de Funciones
Junio 2006

Nombre____

1. **Series de Taylor**

   a) El Límite $x \to x_0$ de la relación de dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ toma el valor indeterminado $\frac{0}{0}$. Usando la expansión en series de Taylor muestre la regla de *l'Hôpital* (4 puntos)

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \equiv \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Solución Para empezar Expandimos por Taylor alrededor de $x = x_0$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \frac{1}{3!}f'''(x_0)(x-x_0)^3 + \cdots}{g(x_0) + g'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}g''(x_0)(x-x_0)^2 + \frac{1}{3!}g'''(x_0)(x-x_0)^3 + \cdots}$$

Si suponemos que $f(x_0) = g(x_0) = 0$, que $\lim_{x\to x_0} f'(x) = f'(x_0)$, y $\lim_{x\to x_0} g'(x) = g'(x_0)$, al dividir numerador y denominador por $(x - x_0)$ tendremos que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{3!}f'''(x_0)(x-x_0)^2 + \cdots}{g'(x_0) + \frac{1}{2}g''(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{3!}g'''(x_0)(x-x_0)^2 + \cdots}$$

con lo cual, al tomar límite a ambos miembros tendremos

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0) + \cdots}{g'(x_0) + \frac{1}{2}g''(x_0)(x-x_0) + \cdots} \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

2. **Series de Polinomios Ortogonales**

   a) Si $H_n(x)$ es un polinomio de Hermite de orden n y pensando en la relación de recurrencia y en la ortogonalidad de los polinomios de Hermite, muestre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, x^2 e^{-x^2} H_n(x) H_n(x) = \sqrt{\pi} 2^n n! \left(n + \frac{1}{2}\right)$$

(4 puntos)

Solución. Es claro que esta integral se puede re-escribir

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, x^2 e^{-x^2} H_n(x) H_n(x) = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, e^{-x^2} \left(2x H_n(x)\right) \left(2x H_n(x)\right)$$

al utilizar la relación de recurrencia $H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$ tendremos que

$$\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, e^{-x^2} \left(H_{n+1}(x) + 2nH_{n-1}(x)\right)\left(H_{n+1}(x) + 2nH_{n-1}(x)\right)$$

y al desarrollar y utilizar la relación de ortogonalidad $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, e^{-x^2} H_n(x)H_m(x) = 0$ para $m \neq n$, entonces tendremos que

$$\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, e^{-x^2} \left(H_{n+1}(x)\right)^2 + n^2\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, e^{-x^2} \left(H_{n-1}(x)\right)^2 = \frac{2^{n+1}}{4}\pi^{1/2}(n+1)! + n^2\left(2^{n-1}\pi^{1/2}(n-1)!\right)$$

donde hemos utilizado la expresión, $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, e^{-x^2} \left(H_m(x)\right)^2 = 2^m\pi^{1/2}m!$, para la norma de los polinomios de Hermite, un poco de algebra llega al resultado que estamos buscando

b) Dado los siguientes puntos experimentales

x	y
-1.0000	13.0000
-0.50000	1.5625
0.50000	-1.4375
1.0000	1.0000

Encontrar el mejor ajuste para aproximar esta función en término de Polinomios de Legendre y, en función de ese ajuste determinar el valor interpolado para $x = 0{,}75$ (4 puntos)

Solución. Expandimos una función genérica en términos de polinomios de Legendre. Esto es

$$f(x) = C^0P_0(x) + C^1P_1(x) + C^2P_2(x) + C^3P_3(x) + \mathcal{R}(0^4)$$

y ahora se evalúa en los en los puntos experimentales para generar un sistema de ecuaciones algebráicas

$$\begin{array}{rcrrrr} 13{,}0000 &=& C^0 & -C^1 & +C^2 & -C^3 \\ 1{,}5625 &=& C^0 & -0{,}5000C^1 & -0{,}1250C^2 & +0{,}4375C^3 \\ -1{,}4375 &=& C^0 & +0{,}5000C^1 & +0{,}1250C^2 & -0{,}4375C^3 \\ 1{,}0000 &=& C^0 & +C^1 & +C^2 & +C^3 \end{array}$$

y tendrá como solución

$$C^0 = \frac{5}{6} \quad C^1 = -\frac{22}{5}, \quad C^2 = \frac{37}{6} \quad C^3 = -\frac{8}{5}$$

con lo cual

$$f(x) = \frac{5}{6}P_0 - \frac{22}{5}P_1 + \frac{37}{6}P_2 - \frac{8}{5}P_3 + \mathcal{R}(0^4) \quad \Rightarrow f(x) = -\frac{9}{4} - 2x + \frac{37}{4}x^2 - 4x^3 + \mathcal{R}(0^4)$$

para que finalmente,

$$f(0{,}75) \approx -\frac{15}{64}$$

3. **Series de Fourier**

   a) Una cuerda vibrante de longitud, l, está atada en sus dos extremos $x = l$ y $x = 0$. La amplitud del movimiento viene descrita por

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \quad \text{suponga la expansión de Fourier } u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

determine la expresión para los coeficientes, $b_n(t)$, dadas las condiciones iniciales.

$$u(x,0) = f(x) \qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = g(x)$$

(4 puntos)

Solución. Al sustituir la expresión para $u(x,t)$ en la ecuación de onda, nos queda

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \quad \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\partial^2 b_n(t)}{\partial t^2} + v^2 \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 b_n(t) \right) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) = 0$$

por lo cual, es claro que

$$b_n(t) = C_1 \cos\left(\frac{n\pi v}{l} t\right) + C_2 \text{sen}\left(\frac{n\pi v}{l} t\right)$$

ya que es solución a la ecuación diferencial. Entonces

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_1 \cos\left(\frac{n\pi v}{l} t\right) + C_2 \,\text{sen}\left(\frac{n\pi v}{l} t\right) \right) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

al utilizar las condiciones iniciales

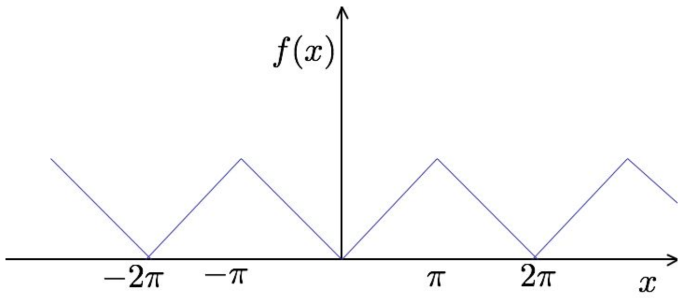
$$f(x) = C_1 \sum_{n=1}^{\infty} \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad \Rightarrow C_1 = \frac{f(x)}{\sum_{n=1}^{\infty} \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right)}$$

y equivalentemente

$$g(x) = C_2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi v}{l}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad \Rightarrow C_2 = \frac{g(x)}{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi v}{l}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right)}$$

para que finalmente

$$b_n(t) = \left(\frac{f(x)}{\sum_{m=1}^{\infty} \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{l}\right)} \right) \cos\left(\frac{n\pi v}{l} t\right) + \left(\frac{g(x)}{\sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{j\pi v}{l}\right) \text{sen}\left(\frac{j\pi x}{l}\right)} \right) \text{sen}\left(\frac{n\pi v}{l} t\right)$$



$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x \leq \pi \\ -x & -\pi \leq x \leq 0 \end{cases}$$

Figura 1: Función Periódica

b) Expanda en series de Fourier la siguiente expresión

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x \leq \pi \\ -x & -\pi \leq x \leq 0 \end{cases}$$

(4 puntos)

Solución. Tal y como podemos apreciar en la figura 1 hemos hecho periódica la función $f(x)$ y su expansión en series de Fourier vendrá dada por

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} \left[a_j \cos\left(\frac{2\pi j x}{T}\right) + b_j \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi j x}{T}\right) \right] \qquad \text{con } T \text{ el período de } f(x)$$

donde los coeficientes de Fourier pueden ser escritos como

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \mathrm{d}x\, f(x); \qquad \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix} = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \mathrm{d}x \begin{pmatrix} \cos kx \\ \operatorname{sen} kx \end{pmatrix} f(x) \qquad \text{con } k = 1, 2, 3, \cdots$$

Como $f(x)$ es par en el intervalo, $b_k = 0$ Con lo cual nos queda que

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \mathrm{d}x\,(-x) + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \mathrm{d}x\, x = \pi; \quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \mathrm{d}x\,(-x)\cos kx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \mathrm{d}x\, x\,\cos kx = -2\left(\frac{1-(-1)^k}{\pi k^2}\right);$$

es decir

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1-(-1)^k}{k^2}\right)\cos kx \equiv \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\cos(2j-1)x}{(2j-1)^2}$$

las integrales son más fáciles si se explota las propiedades de simetría $f(-x) = f(x)$ y se hubiera integrado en la mitad del período