Métodos Matemáticos de la Física 2
Examen Parcial
Ecuaciones Diferenciales Ordinarias 1er Orden
Julio 2006

Nombre____

1. En cada uno de los casos que ser presentan abajo, resuelva la ecuación diferencial propuesta:

   a) $y' - 3y = 2xe^x, \qquad y(0) = 1$; (3 ptos)

   Solución Es una ecuación diferencial de primer orden, lineal e inhomogénea.
   La solución de la homogénea será
   $$y_h(x) = C_0 e^{3x}$$
   la solución de la inhomogénea será
   $$y_{ih}(x) = -\frac{1}{2}(1+2x)\,e^x$$
   las solución general
   $$y(x) = \left(C_0 - \frac{1}{2}(1+2x)\,e^{-2x}\right)e^{3x}$$
   al evaluar las condiciones iniciales
   $$y(0) = 1 \quad \Rightarrow C_0 = \frac{3}{2} \quad \text{con lo cual } y(x) = \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}(1+2x)\,e^{-2x}\right)e^{3x}$$

   b) $y'(x) - y(x)^2 + y(x)\operatorname{sen}(x) - \cos(x) = 0$ (3 ptos)

   Solución: Es una ecuación de Riccati, de la forma $y'(x) = P(x) + Q(x)y(x) + R(x)y^2(x)$ con una solución particular $y_p(x) = \operatorname{sen}(x)$ con lo cual hacemos el siguiente cambio de variable
   $$y(x) = y_p(x) + \frac{1}{v(x)} \quad \Rightarrow v'(x) + \operatorname{sen}(x)v(x) + 1 = 0 \quad \Rightarrow v(x) = e^{\cos(x)}\left(C - \int \mathrm{d}x\, e^{-\cos(x)}\right)$$
   para que finalmente
   $$y(x) = \operatorname{sen}(x) + \frac{1}{e^{\cos(x)}\left(C - \int \mathrm{d}x\, e^{-\cos(x)}\right)}$$

   c) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{e^y - x}$ (3 ptos)

   Solución: Acomodando un poco tendremos que

   $(e^y - x)\,\mathrm{d}y - \mathrm{d}x = 0$ que no es exacta pero casi, sin embargo $e^y\,(e^y - x)\,\mathrm{d}y - e^y\mathrm{d}x = 0$ si lo es

   Con lo cual se integra
   $$\Phi(x,y) = M(x.y)\mathrm{d}x + N(x.y)\mathrm{d}y = 0 \Leftrightarrow M(x,y) = -e^y \quad N(x,y) = e^y\,(e^y - x)$$

tendremos que
$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = -e^{y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \quad \text{la ecuación es exacta}$$
por lo que
$$M(x.y) = \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial x} = -e^{y} \quad \Rightarrow \Phi(x,y) = \int \mathrm{d}x\,(-e^{y}) + f(y) = -xe^{y} + f(y)$$
es decir
$$N(x,y) = e^{y}\,(e^{y} - x) = \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial y} = -xe^{y} + \frac{\partial f(y)}{\partial y} \quad \Rightarrow e^{2y} = \frac{\partial f(y)}{\partial y} \quad \Rightarrow f(y) = \frac{1}{2}e^{2y}$$
entonces
$$-xe^{y} + \frac{1}{2}e^{2y} = C \quad \Rightarrow x = \frac{1}{2}e^{y} + Ce^{-y} \quad \Rightarrow y(x) = -\ln\left(\frac{x \pm \sqrt{x^2 - 2C1}}{2C}\right)$$
Ahora bien, también si pensamos esta ecuación de la forma $x = x(y)$ entonces nos queda sencilla
$$e^{y} - x(y) = \frac{\mathrm{d}x(y)}{\mathrm{d}y} \quad \Rightarrow x(y) = \frac{1}{2}e^{y} + Ce^{-y} \quad \Rightarrow y(x) = -\ln\left(\frac{x \pm \sqrt{x^2 - 2C1}}{2C}\right)$$

d) $\left(2x + \dfrac{x^2 + y^2}{x^2 y}\right)\mathrm{d}x = \dfrac{x^2 + y^2}{xy^2}\mathrm{d}y$ (3 ptos)

Solución: Verifiquemos si es exacta, para ello
$$\Phi(x,y) = M(x.y)\mathrm{d}x + N(x.y)\mathrm{d}y = 0 \quad \Rightarrow \Phi(x,y) = C \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$
entonces si consideramos
$$M(x,y) = \left(2x + \frac{x^2 + y^2}{x^2 y}\right) \qquad N(x,y) = -\frac{x^2 + y^2}{xy^2}$$
tendremos que
$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{x^2 y^2} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \quad \text{la ecuación es exacta}$$
por lo que
$$M(x.y) = \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial x} = \left(2x + \frac{x^2 + y^2}{x^2 y}\right) \quad \Rightarrow \Phi(x,y) = \int \mathrm{d}x\left(2x + \frac{x^2 + y^2}{x^2 y}\right) + f(y)$$
es decir
$$\Phi(x,y) = \frac{x^3 y - y^2 + x^2}{yx} + f(y) \quad \Rightarrow N(x,y) = -\frac{x^2 + y^2}{xy^2} = \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial y} = -\frac{x^2 + y^2}{xy^2} + \frac{\partial f(y)}{\partial y}$$
para que finalmente
$$\frac{\partial f(y)}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \Phi(x,y) = \frac{x^3 y - y^2 + x^2}{yx} = C \quad \Rightarrow y = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}C \pm \frac{1}{2}\sqrt{x^4 - 2\,x^2 C + C^2 + 4}\right)x$$

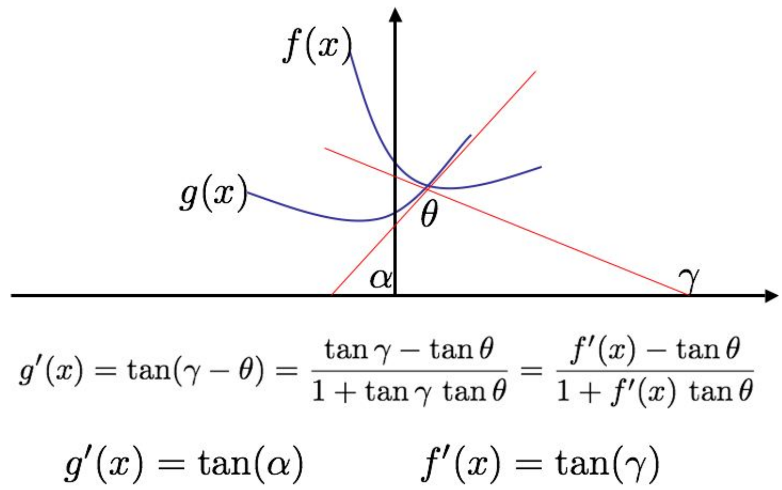

Figura 1: Trayectorias isogonales

e) $y = (y' - 1)e^{y'}$ (3 ptos)

Solución: Se debe resolover en forma paramétrica

$$y' = \phi(x) \Leftrightarrow \mathrm{d}y = \phi(x)\mathrm{d}x \quad \Rightarrow y = (\phi(x) - 1)e^{\phi(x)} \quad \Rightarrow \mathrm{d}y = \phi'(x)\phi(x)e^{\phi(x)}\mathrm{d}x = \phi(x)\mathrm{d}x$$

con lo cual

$$\phi'(x)e^{\phi(x)} = 1 \quad \Rightarrow e^{\phi(x)} = x + C \quad \Rightarrow \phi(x) = \ln(x + C) \quad \Rightarrow y(x) = \int \mathrm{d}x\, \ln(x + C)$$

para llegar

$$y(x) = \ln(x + C)(x + C) - x - C \qquad \text{y también tendrá como solución particular } y_p(x) = -1$$

2. Dada la familia de curvas uniparamétricas $y = ax^4 + bx$; con a y b ctes, encuentre la familia de curvas que en todo punto sus tangentes forman un ángulo de $\frac{\pi}{4}$. (4 ptos)

   Solución: Tal y como se puede apreciar en la figura 1 la familia de curvas, $\tilde{y}(x)$ que se cortan con $y(x) = ax^4 + bx$ y que cuyas tangentes entre si, forman un ángulo $\frac{\pi}{4}$. deben cumplir con

$$y'(x) = \frac{\tilde{y}'(x) - 1}{1 + \tilde{y}'(x)} \quad \Leftrightarrow \quad 4ax^3 + b = \frac{\tilde{y}'(x) - 1}{1 + \tilde{y}'(x)} \quad \Rightarrow \tilde{y}'(x) = \frac{1 + 4ax^3 + b}{1 - 4ax^3 - b}$$

   y al integrar tendremos la familia

$$
\begin{aligned}
\tilde{y}(x) &= -\frac{1}{6}\left(6xa\left(\frac{-1+b}{a}\right)^{2/3} + 2\sqrt[3]{2}\ln\left(2\,x+\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{\frac{-1+b}{a}}\right)\right. \\
&\quad -\sqrt[3]{2}\ln\left(4\,x^2 - 2\,x\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{\frac{-1+b}{a}} + 2^{2/3}\left(\frac{-1+b}{a}\right)^{2/3}\right) \\
&\quad \left.-2\sqrt[3]{2}\sqrt{3}\arctan\left(1/3\sqrt{3}\left(-2\,2^{2/3}x+\sqrt[3]{\frac{-1+b}{a}}\right)\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{-1+b}{a}}}\right)\right)a^{-1}\left(\frac{-1+b}{a}\right)^{-2/3}
\end{aligned}
$$

3. Suponga un extraño banco que paga sus intereses sobre de forma instant' anea. Vale decir que

$$C(t) = C_0 e^{\frac{R}{100\beta}\,t} \quad \Leftrightarrow \quad C'(t) = \frac{R}{100\beta}C(t).$$

Donde: el tiempo t viene medido en segundos, el factor $\beta \approx 3{,}1\times 10^7 s$ es aproximadamente el número de segundos en el año, C_0 es el capital inicial y R es la tasa de interés anual. Si el interés es 12 %, determine el capital acumulado en 20 años siguiendo cada uno de estos esquemas de inversión:

a) Sin capital inicial y Bs. 1.500.000,oo de inversión al final de cada año.

b) Bs. 10.000.000,oo de capital inicial y Bs. 1.000.000,oo de inversión al final de cada año

c) Bs. 20.000.000,oo de capital inicial y Bs. 500.000,oo de inversión al final de cada año

d) Bs. 30.000.000,oo y ningún depósito adicional.

(4 ptos)

Solución: Tratemos de hacerlo general, denotemos la inversión al final de año IFA por lo tanto, y el capital inicial C_0 el primer año, con lo cual tendremos que

$$
\begin{array}{lclcl}
C_{02} &=& C_{01}e^{\alpha t_1} + IFA_1 & & \\
C_{03} &=& C_{02}e^{\alpha t_2} + IFA_2 &=& \left(C_{01}e^{\alpha t_1} + IFA_1\right)e^{\alpha t_2} + IFA_2 \\
C_{04} &=& C_{03}e^{\alpha t_3} + IFA_3 &=& \left(\left(C_{01}e^{\alpha t_1} + IFA_1\right)e^{\alpha t_2} + IFA_2\right)e^{\alpha t_3} + IFA_3 \\
C_{05} &=& C_{04}e^{\alpha t_4} + IFA_4 &=& \left(\left(\left(C_{01}e^{\alpha t_1} + IFA_1\right)e^{\alpha t_2} + IFA_2\right)e^{\alpha t_3} + IFA_3\right)e^{\alpha t_4} + IFA_4 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}
$$

Si consideramos que los plazos ya las inversiones con las mismas es fácil generalizar a

$$C_n = C_0 e^{\alpha(n-1)t} + \sum_{m=0}^{n-2} IFA\, e^{m\alpha t} = C_0 e^{\alpha(n-1)t} + IFA\sum_{m=0}^{n-2} e^{m\alpha t} = C_0 e^{\alpha(n-1)t} + IFA\frac{e^{(n-1)\alpha\, t}-1}{e^{\alpha\, t}-1}$$

con lo cual se puede responder cada uno de los esquemas de inversión haciendo $n = 20$, $t \approx \beta$ con lo cual tendremos que $\alpha t \approx \frac{R}{100}$ y $e^{\frac{R}{100}} \approx 1{,}127496852$

a) Sin capital inicial y Bs. 1.500.000,oo de inversión al final de cada año.

$$C_0 = 0 \quad IFA = 1.500.000{,}oo \quad \Rightarrow C_{20} = IFA\frac{e^{19\alpha\, t}-1}{e^{\alpha\, t}-1} \approx \text{ Bs } 115.022.601{,}7$$

b) Bs. 10.000.000,oo de capital inicial y Bs. 1.000.000,oo de inversión al final de cada año

$$C_0 = 10.000.000 \quad IFA = 1.000.000,\text{oo} \quad \Rightarrow C_{20} \approx \text{ Bs } 174.448.535,5$$

c) Bs. 20.000.000,oo de capital inicial y Bs. 500.000,oo de inversión al final de cada año

$$C_0 = 20.000.000 \quad IFA = 500.000,\text{oo} \quad \Rightarrow C_{20} \approx \text{ Bs } 233.874.469,3$$

d) Bs. 30.000.000,oo y ningún depósito adicional.

$$C_0 = 30.000.000 \quad IFA = 0 \quad \Rightarrow C_{20} \approx \text{ Bs } 293.300.403,2$$