

# Métodos Matemáticos 1

## Espacios Vectoriales Lineales 6

### Matrices, Determinantes, Autovalores y Autovectores\*

L. A. Núñez\*\*

*Centro de Física Fundamental,  
Departamento de Física, Facultad de Ciencias,  
Universidad de Los Andes, Mérida 5101, Venezuela y  
Centro Nacional de Cálculo Científico, Universidad de Los Andes,  
(CECALCULA),  
Corporación Parque Tecnológico de Mérida, Mérida 5101, Venezuela*

Enero 2005  $\alpha$  1.0

## Índice

<b>1. Un Zoológico de Matrices Cuadradas</b>	<b>2</b>
1.1. La matriz nula . . . . .	2
1.2. Diagonal a Bloques . . . . .	2
1.3. Triangular superior e inferior . . . . .	2
1.4. Matriz singular . . . . .	3
1.5. Matriz de cofactores . . . . .	3
1.6. Matriz Adjunta . . . . .	3
<b>2. Un Paréntesis Determinante</b>	<b>3</b>
2.1. Definición . . . . .	3
2.2. Propiedades Determinantes . . . . .	4
<b>3. Autovectores y Autovalores</b>	<b>7</b>
3.1. Definiciones y Teoremas Preliminares . . . . .	7
3.2. Algunos comentarios . . . . .	8

---

\*ADVERTENCIA: El presente documento constituye una guía para los estudiantes de Métodos Matemáticos de la Física de la Universidad de Los Andes. Es, en el mejor de los casos, un FORMULARIO y de ninguna manera sustituye a los libros de texto del curso. La bibliografía de la cual han surgido estas notas se presenta al final de ellas y debe ser consultada por los estudiantes.

\*\* e-mail: [nunez@ula.ve](mailto:nunez@ula.ve)

Web: <http://webdelprofesor.ula.ve/ciencias/nunez/>

3.3. Algunos Ejemplos . . . . .	9
3.4. Autovalores, autovectores e independencia lineal . . . . .	10
<b>4. Autovalores y Autovectores de un operador</b>	<b>11</b>
4.1. El polinomio característico. . . . .	11
4.2. Primero los autovalores, luego los autovectores . . . . .	12
<b>5. Autovalores y Autovectores de Matrices Importantes</b>	<b>15</b>
5.1. Autovalores y Autovectores de Matrices Similares . . . . .	15
5.2. Autovalores y Autovectores de Matrices Hermíticas . . . . .	18
5.3. Autovalores y Autovectores de Matrices Unitarias . . . . .	21
<b>6. Conjunto Completo de Observables que conmutan</b>	<b>24</b>

## 1. Un Zoológico de Matrices Cuadradas

A continuación presentaremos un conjunto de matrices que serán de utilidad más adelante

### 1.1. La matriz nula

es

$$A_j^i = 0 \quad \forall i, j \quad \implies A_j^i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

### 1.2. Diagonal a Bloques

Podremos tener matrices diagonales a bloques, vale decir

$$D_j^i = \begin{pmatrix} D_1^1 & D_2^1 & 0 & 0 \\ D_1^2 & D_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_3^3 & D_4^3 \\ 0 & 0 & D_3^4 & D_4^4 \end{pmatrix}$$

### 1.3. Triangular superior e inferior

$$\check{D}_j^i = \begin{pmatrix} \check{D}_1^1 & \check{D}_2^1 & \check{D}_3^1 & \check{D}_4^1 \\ 0 & \check{D}_2^2 & \check{D}_3^2 & \check{D}_4^2 \\ 0 & 0 & \check{D}_3^3 & \check{D}_4^3 \\ 0 & 0 & 0 & \check{D}_4^4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \hat{D}_j^i = \begin{pmatrix} \hat{D}_1^1 & 0 & 0 & 0 \\ \hat{D}_1^2 & \hat{D}_2^2 & 0 & 0 \\ \hat{D}_1^3 & \hat{D}_2^3 & \hat{D}_3^3 & 0 \\ \hat{D}_1^4 & \hat{D}_2^4 & \hat{D}_3^4 & \hat{D}_4^4 \end{pmatrix}$$

### 1.4. Matriz singular

$\mathbf{A}$  es singular  $\implies \det \mathbf{A} = 0$

### 1.5. Matriz de cofactores

$$A_j^i = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad (A^c)_j^i = \begin{pmatrix} (A^c)_1^1 & (A^c)_2^1 & (A^c)_3^1 \\ (A^c)_1^2 & (A^c)_2^2 & (A^c)_3^2 \\ (A^c)_1^3 & (A^c)_2^3 & (A^c)_3^3 \end{pmatrix}$$

donde los  $(A^c)_j^i$  es la matriz de cofactores, y los cofactores son

$$(A^c)_1^1 = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_2^2 & a_3^2 \\ a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix} \quad (A^c)_2^1 = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_1^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_3^3 \end{vmatrix} \quad (A^c)_3^1 = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_1^2 & a_2^2 \\ a_1^3 & a_2^3 \end{vmatrix}$$

$$(A^c)_1^2 = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a_2^1 & a_3^1 \\ a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix} \quad (A^c)_2^2 = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} a_1^1 & a_3^1 \\ a_1^3 & a_3^3 \end{vmatrix} \quad (A^c)_3^2 = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^3 & a_2^3 \end{vmatrix}$$

$$(A^c)_1^3 = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} a_2^1 & a_3^1 \\ a_2^2 & a_3^2 \end{vmatrix} \quad (A^c)_2^3 = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} a_1^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_3^2 \end{vmatrix} \quad (A^c)_3^3 = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{vmatrix}$$

### 1.6. Matriz Adjunta

Llamaremos matriz adjunta,  $\text{adj}[\mathbf{A}]$ , a la traspuesta de la matriz de cofactores de una determinada matriz. Esto es

$$\text{adj}[\mathbf{A}] = (\mathbf{A}^c)^T \implies \text{adj}[A_j^i] = \left((A^c)_j^i\right)^T = (A^c)_i^j$$

Esto es

$$A_j^i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \implies \text{adj}[A_j^i] = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ 6 & -12 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

Una matriz será autoadjunta si  $\text{adj}[\mathbf{A}] = \mathbf{A}$

## 2. Un Paréntesis Determinante

### 2.1. Definición

Antes de continuar es imperioso que refresquemos algunas propiedades del determinante de una matriz. Ya hemos visto que el  $\det \mathbf{A} : \mathbf{M}_{n \times n} \rightarrow \mathfrak{R}$ . Es decir, asocia un número real con cada matriz del espacio vectorial  $\mathbf{M}_{n \times n}$  de matrices  $n \times n$

Así, dada una matriz

$$A_j^i = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \cdots & A_n^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & & A_n^2 \\ \vdots & & \ddots & \\ A_1^n & A_2^n & & A_n^n \end{pmatrix} \implies \det \mathbf{A} = \varepsilon^{ijk\cdots} A_i^1 A_j^2 A_k^3 \cdots = \begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \cdots & A_n^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & & A_n^2 \\ \vdots & & \ddots & \\ A_1^n & A_2^n & & A_n^n \end{vmatrix}$$

Hemos generalizado el índice de Levi Civita de tal forma que

$$\varepsilon^{ijk\cdots} = \varepsilon_{ijk\cdots} = \begin{cases} 0, & \text{si cualesquiera dos índices son iguales} \\ 1, & \text{si los índices } i, j, k, \cdots \text{ constituyen una permutación cíclica de } 1, 2, 3, \cdots, n \\ -1 & \text{si los índices } i, j, k, \cdots \text{ constituyen una permutación anticíclica de } 1, 2, 3, \cdots, n \end{cases}$$

Esta situación es clara para el caso de matrices  $3 \times 3$ , veamos.

Dada una matriz  $3 \times 3$

$$A_j^i = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 \end{pmatrix} \implies \det \mathbf{A} = \varepsilon^{ijk} A_i^1 A_j^2 A_k^3 = \begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 \end{vmatrix}$$

con lo cual

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} &= \varepsilon^{123} A_1^1 A_2^2 A_3^3 + \varepsilon^{312} A_3^1 A_1^2 A_2^3 + \varepsilon^{231} A_2^1 A_3^2 A_1^3 + \varepsilon^{132} A_1^1 A_3^2 A_2^3 + \varepsilon^{321} A_3^1 A_2^2 A_1^3 + \varepsilon^{213} A_2^1 A_1^2 A_3^3 \\ &= A_1^1 A_2^2 A_3^3 + A_3^1 A_1^2 A_2^3 + A_2^1 A_3^2 A_1^3 - A_1^1 A_3^2 A_2^3 - A_3^1 A_2^2 A_1^3 - A_2^1 A_1^2 A_3^3 \end{aligned}$$

## 2.2. Propiedades Determinantes

1.  $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^T$  donde  $\mathbf{A}^T$  es la traspuesta de  $\mathbf{A}$

Esta propiedad proviene de la definición del índice de Levi Civita

$$\det \mathbf{A} = \varepsilon^{ijk\cdots} A_i^1 A_j^2 A_k^3 \cdots = \varepsilon_{ijk\cdots} A_1^i A_2^j A_3^k \cdots = \det \mathbf{A}^T$$

que se traduce que se intercambian filas por columnas el determinante no se altera

$$\begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1^1 & A_1^2 & A_1^3 \\ A_2^1 & A_2^2 & A_2^3 \\ A_3^1 & A_3^2 & A_3^3 \end{vmatrix}$$

2. Si dos filas o dos columnas son idénticas el determinante se anula

$$\varepsilon^{iik\cdots} A_i^1 A_i^2 A_k^3 \cdots = \varepsilon_{iik\cdots} A_1^i A_2^i A_3^k \cdots = 0$$

por definición del índice de Levi Civita

$$\begin{vmatrix} A_1^1 & A_1^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & A_1^2 & A_3^2 \\ A_1^3 & A_1^3 & A_3^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 \end{vmatrix} = 0$$

3. Si multiplicamos una fila o una columna por un número, el determinante queda multiplicado por el número

$$\begin{aligned}\varepsilon^{ijk\dots} A_i^1 (\lambda A_j^2) A_k^3 \dots &= \lambda \varepsilon^{ijk\dots} A_i^1 A_j^2 A_k^3 \dots = \lambda \det \mathbf{A} \\ \varepsilon_{ijk\dots} A_1^i A_2^j (\lambda A_3^k) \dots &= \lambda \varepsilon_{ijk\dots} A_1^i A_2^j A_3^k \dots = \lambda \det \mathbf{A}\end{aligned}$$

de aquí claramente se desprende que si una fila o una columna es cero ( $\lambda = 0$ ) el determinante se anula. Más aún, si dos filas o dos columnas son proporcionales  $A_i^1 = \lambda A_j^2$  el determinante se anula, por cuanto se cumple la propiedad anterior

$$\begin{vmatrix} A_1^1 & \lambda A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & \lambda A_2^2 & A_3^2 \\ A_1^3 & \lambda A_2^3 & A_3^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \\ \lambda A_1^3 & \lambda A_2^3 & \lambda A_3^3 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 \end{vmatrix}$$

Obvio que

$$\begin{vmatrix} A_1^1 & 0 & A_3^1 \\ A_1^2 & 0 & A_3^2 \\ A_1^3 & 0 & A_3^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

al igual que

$$\begin{vmatrix} A_1^1 & \lambda A_1^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & \lambda A_1^2 & A_3^2 \\ A_1^3 & \lambda A_1^3 & A_3^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ \lambda A_1^1 & \lambda A_2^1 & \lambda A_3^1 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} A_1^1 & A_1^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & A_1^2 & A_3^2 \\ A_1^3 & A_1^3 & A_3^3 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 \end{vmatrix} = 0$$

4. Si se intercambian dos filas o dos columnas cambia de signo el determinante.

$$\det \mathbf{A} = \varepsilon^{ijk\dots} A_i^1 A_j^2 A_k^3 \dots = \begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \dots & A_n^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & & A_n^2 \\ \vdots & & \ddots & \\ A_1^n & A_2^n & & A_n^n \end{vmatrix} \implies \varepsilon^{ijk\dots} A_j^1 A_i^2 A_k^3 \dots = \det \tilde{\mathbf{A}}$$

donde en la matriz  $\tilde{\mathbf{A}}$  se han intercambiado un par de columnas. Claramente las propiedades del índice de Levi Civita, obliga al cambio de signo

$$\det \tilde{\mathbf{A}} = -\det \mathbf{A}$$

Nótese que una síntesis de las propiedades anteriores nos lleva a reescribir el determinante de una matriz de la forma

$$\det \mathbf{A} = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\dots} \det \mathbf{A} = \varepsilon_{ijk\dots} A_\alpha^i A_\beta^j A_\gamma^k \dots \iff \det \mathbf{A} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\dots} \det \mathbf{A} = \varepsilon^{ijk\dots} A_i^\alpha A_j^\beta A_k^\gamma \dots$$

claramente, si  $\alpha\beta\gamma\dots \iff 123\dots$  reobtenemos la definición anterior. Si se intercambian dos filas o dos columnas, el determinante cambia de signo debido al intercambio de dos índices griegos. Si dos filas o dos columnas son iguales el determinante se anula debido a la propiedad de símbolo de Levi Civita con índices griegos.

5. El determinante de un producto es el producto de los determinantes

$$\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B})$$

Antes de proceder a la demostración de este importante propiedad jugaremos un poco más con las propiedades de las matrices. Queremos señalar que si  $\mathbf{A}$  es una matriz  $m \times n$  y  $\mathbf{B}$  es una matriz  $n \times p$ , entonces tendremos que

$$(\mathbf{AB})^\alpha = \mathbf{A}^\alpha \mathbf{B}$$

esto es que la  $\alpha$ -ésima fila es igual a la multiplicación de la  $\alpha$ -ésima fila,  $\mathbf{A}^\alpha$ , por toda la matriz  $\mathbf{B}$ . Veamos

$$C_j^\alpha = (\mathbf{AB})_j^\alpha = A_l^\alpha B_j^l$$

por lo tanto la  $\alpha$ -ésima fila

$$C_j^\alpha = A_l^\alpha B_j^l \quad \Rightarrow \quad C_j^\alpha = (A_1^\alpha, A_2^\alpha, A_3^\alpha, \dots, A_n^\alpha) \begin{pmatrix} B_1^1 & B_2^1 & \dots & B_n^1 \\ B_1^2 & B_2^2 & & B_n^2 \\ \vdots & & \ddots & \\ B_1^n & B_2^n & & B_n^n \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{A}) (\varepsilon_{ijk} \dots B_1^i B_2^j B_3^k \dots) = (\varepsilon_{ijk} \dots A_\alpha^i A_\beta^j A_\gamma^k \dots) (\varepsilon_{abc} \dots B_1^a B_2^b B_3^c \dots)$$

que siempre puede ser rearrreglado a

$$(\varepsilon^{ijk} \dots A_i^\alpha A_j^\beta A_k^\gamma \dots) (\varepsilon_{ijk} \dots B_1^i B_2^j B_3^k \dots) = A_i^\alpha B_1^i A_j^\beta B_2^j A_k^\gamma B_3^k \dots = \det(\mathbf{AB})$$

veamos este desarrollo en el caso de  $3 \times 3$

$$\begin{aligned} & (\varepsilon^{123} A_1^1 A_2^2 A_3^3 + \varepsilon^{312} A_3^1 A_1^2 A_2^3 + \varepsilon^{231} A_2^1 A_3^2 A_1^3 + \varepsilon^{132} A_1^1 A_3^2 A_2^3 + \varepsilon^{321} A_3^1 A_2^2 A_1^3 + \varepsilon^{213} A_2^1 A_1^2 A_3^3) \\ & \times (\varepsilon^{123} B_1^1 B_2^2 B_3^3 + \varepsilon^{312} B_3^1 B_1^2 B_2^3 + \varepsilon^{231} B_2^1 B_3^2 B_1^3 + \varepsilon^{132} B_1^1 B_3^2 B_2^3 + \varepsilon^{321} B_3^1 B_2^2 B_1^3 + \varepsilon^{213} B_2^1 B_1^2 B_3^3) \end{aligned}$$

con lo cual

$$\begin{aligned} & = A_1^1 A_2^2 A_3^3 (B_1^1 B_2^2 B_3^3 + B_3^1 B_1^2 B_2^3 + B_2^1 B_3^2 B_1^3 - B_1^1 B_3^2 B_2^3 - B_3^1 B_2^2 B_1^3 - B_2^1 B_1^2 B_3^3) \\ & + A_3^1 A_1^2 A_2^3 (B_1^1 B_2^2 B_3^3 + B_3^1 B_1^2 B_2^3 + B_2^1 B_3^2 B_1^3 + B_1^1 B_3^2 B_2^3 + B_3^1 B_2^2 B_1^3 + B_2^1 B_1^2 B_3^3) \\ & + A_2^1 A_3^2 A_1^3 (B_1^1 B_2^2 B_3^3 + B_3^1 B_1^2 B_2^3 + B_2^1 B_3^2 B_1^3 + B_1^1 B_3^2 B_2^3 + B_3^1 B_2^2 B_1^3 + B_2^1 B_1^2 B_3^3) \\ & - A_1^1 A_3^2 A_2^3 (B_1^1 B_2^2 B_3^3 + B_3^1 B_1^2 B_2^3 + B_2^1 B_3^2 B_1^3 + B_1^1 B_3^2 B_2^3 + B_3^1 B_2^2 B_1^3 + B_2^1 B_1^2 B_3^3) \\ & - A_3^1 A_2^2 A_1^3 (B_1^1 B_2^2 B_3^3 + B_3^1 B_1^2 B_2^3 + B_2^1 B_3^2 B_1^3 + B_1^1 B_3^2 B_2^3 + B_3^1 B_2^2 B_1^3 + B_2^1 B_1^2 B_3^3) \\ & - A_2^1 A_1^2 A_3^3 (B_1^1 B_2^2 B_3^3 + B_3^1 B_1^2 B_2^3 + B_2^1 B_3^2 B_1^3 + B_1^1 B_3^2 B_2^3 + B_3^1 B_2^2 B_1^3 + B_2^1 B_1^2 B_3^3) \end{aligned}$$

como son números los reaarreglo

$$\begin{aligned}
&= A_1^1 A_2^2 A_3^3 (B_1^1 B_2^2 B_3^3 + B_1^2 B_2^3 B_3^1 + B_1^3 B_2^1 B_3^2 - B_1^1 B_2^3 B_3^2 - B_1^3 B_2^2 B_3^1 - B_1^2 B_2^1 B_3^3) \\
&+ A_3^1 A_1^2 A_2^3 (B_1^1 B_2^2 B_3^3 + B_1^2 B_2^3 B_3^1 + B_1^3 B_2^1 B_3^2 - B_1^1 B_2^3 B_3^2 - B_1^3 B_2^2 B_3^1 - B_1^2 B_2^1 B_3^3) \\
&+ A_2^1 A_3^2 A_1^3 (B_1^1 B_2^2 B_3^3 + B_1^2 B_2^3 B_3^1 + B_1^3 B_2^1 B_3^2 - B_1^1 B_2^3 B_3^2 - B_1^3 B_2^2 B_3^1 - B_1^2 B_2^1 B_3^3) \\
&- A_1^1 A_3^2 A_2^3 (B_1^1 B_2^2 B_3^3 + B_1^2 B_2^3 B_3^1 + B_1^3 B_2^1 B_3^2 - B_1^1 B_2^3 B_3^2 - B_1^3 B_2^2 B_3^1 - B_1^2 B_2^1 B_3^3) \\
&- A_3^1 A_2^2 A_1^3 (B_1^1 B_2^2 B_3^3 + B_1^2 B_2^3 B_3^1 + B_1^3 B_2^1 B_3^2 - B_1^1 B_2^3 B_3^2 - B_1^3 B_2^2 B_3^1 - B_1^2 B_2^1 B_3^3) \\
&- A_2^1 A_1^2 A_3^3 (B_1^1 B_2^2 B_3^3 + B_1^2 B_2^3 B_3^1 + B_1^3 B_2^1 B_3^2 - B_1^1 B_2^3 B_3^2 - B_1^3 B_2^2 B_3^1 - B_1^2 B_2^1 B_3^3) \\
&= A_1^1 A_2^2 A_3^3 (+B_1^2 B_2^3 B_3^1 + B_1^3 B_2^1 B_3^2 - B_1^1 B_2^3 B_3^2 - B_1^3 B_2^2 B_3^1 - B_1^2 B_2^1 B_3^3) \\
&+ A_3^1 A_1^2 A_2^3 (B_1^1 B_2^2 B_3^3 + B_1^2 B_2^3 B_3^1 + B_1^3 B_2^1 B_3^2 - B_1^1 B_2^3 B_3^2 - B_1^3 B_2^2 B_3^1 - B_1^2 B_2^1 B_3^3) \\
&+ A_2^1 A_3^2 A_1^3 (B_1^1 B_2^2 B_3^3 + +B_1^3 B_2^1 B_3^2 - B_1^1 B_2^3 B_3^2 - B_1^3 B_2^2 B_3^1 - B_1^2 B_2^1 B_3^3) \\
&- A_1^1 A_3^2 A_2^3 (B_1^1 B_2^2 B_3^3 + B_1^2 B_2^3 B_3^1 + B_1^3 B_2^1 B_3^2 - B_1^1 B_2^3 B_3^2 - B_1^3 B_2^2 B_3^1 - B_1^2 B_2^1 B_3^3) \\
&- A_3^1 A_2^2 A_1^3 (B_1^1 B_2^2 B_3^3 + B_1^2 B_2^3 B_3^1 + B_1^3 B_2^1 B_3^2 - B_1^1 B_2^3 B_3^2 - B_1^3 B_2^2 B_3^1 - B_1^2 B_2^1 B_3^3) \\
&- A_2^1 A_1^2 A_3^3 (B_1^1 B_2^2 B_3^3 + B_1^2 B_2^3 B_3^1 + B_1^3 B_2^1 B_3^2 - B_1^1 B_2^3 B_3^2 - B_1^3 B_2^2 B_3^1 - B_1^2 B_2^1 B_3^3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&A_1^1 B_1^1 A_2^2 A_3^3 B_2^2 B_3^3 + A_2^1 B_1^1 A_3^2 A_1^3 B_2^2 B_3^3 \\
&\varepsilon_{ijk} \dots A_\alpha^i B_1^\alpha A_\lambda^j B_2^\lambda A_\mu^k B_2^\mu \dots
\end{aligned}$$

### 3. Autovectores y Autovalores

#### 3.1. Definiciones y Teoremas Preliminares

Llamaremos a  $|\psi\rangle$  un autovector del operador  $\mathbf{A}$  si se cumple que

$$\mathbf{A} |\psi\rangle = \lambda |\psi\rangle$$

en este caso  $\lambda$  (que, en general será un número complejo) se denomina el autovalor correspondiente al autovector  $|\psi\rangle$ . La ecuación  $\mathbf{A} |\psi\rangle = \lambda |\psi\rangle$  es conocida en la literatura como la ecuación de autovalores y se cumple para algunos valores particulares de los autovalores  $\lambda$ . El conjunto de los autovalores se denomina el espectro del operador  $\mathbf{A}$ .

Supongamos que  $\mathbf{A} : V \rightarrow V$  y que  $\dim V = n$ , supongamos además que una base ortogonal para  $V$  es  $\{|\mathbf{e}_1\rangle, |\mathbf{e}_2\rangle, |\mathbf{e}_3\rangle, \dots, |\mathbf{e}_n\rangle\}$ . Por lo tanto la repercusión de esta ecuación sobre la representación matricial es la siguiente

$$\langle \mathbf{e}^i | \mathbf{A} | \mathbf{e}_j \rangle \langle \mathbf{e}^j | |\psi\rangle = \langle \mathbf{e}^i | \lambda |\psi\rangle = \lambda \langle \mathbf{e}^i | |\psi\rangle \implies A_j^i c^j = \lambda c^i$$

claramente, si  $\{|\mathbf{e}_1\rangle, |\mathbf{e}_2\rangle, |\mathbf{e}_3\rangle, \dots, |\mathbf{e}_n\rangle\}$  genera una representación diagonal de  $\mathbf{A}$  entonces

$$A_j^i \propto \delta_j^i \implies A_j^i c^j \propto \delta_j^i c^j = \lambda c^i \implies A_j^i \propto \lambda \delta_j^i$$

Esto lo podemos resumir en el siguiente teorema que presentaremos sin demostración.

**Teorema** Dado un operador lineal  $\mathbf{A} : V^n \rightarrow V^n$  si la representación matricial de  $\mathbf{A}$  es diagonal,  $\langle \mathbf{e}^i | \mathbf{A} | \mathbf{e}_j \rangle = A_j^i \propto \delta_j^i$  entonces existe una base ortonormal  $\{|\mathbf{e}_1\rangle, |\mathbf{e}_2\rangle, |\mathbf{e}_3\rangle, \dots, |\mathbf{e}_n\rangle\}$ <sup>1</sup> y un conjunto de cantidades escalares  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  tales que se cumple

$$\mathbf{A} |\mathbf{e}_i\rangle = \lambda_i |\mathbf{e}_i\rangle \quad \text{con } i = 1, 2, \dots, n$$

igualmente se cumple que si existe una base ortonormal  $\{|\mathbf{e}_1\rangle, |\mathbf{e}_2\rangle, |\mathbf{e}_3\rangle, \dots, |\mathbf{e}_n\rangle\}$  y un conjunto de cantidades escalares  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  tales satisfagan

$$\mathbf{A} |\mathbf{e}_i\rangle = \lambda_i |\mathbf{e}_i\rangle \quad \text{con } i = 1, 2, \dots, n$$

Entonces se cumple la representación matricial de  $\mathbf{A}$  es diagonal,

$$\langle \mathbf{e}^i | \mathbf{A} | \mathbf{e}_j \rangle = A_j^i = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

### 3.2. Algunos comentarios

1. Nótese que si  $|\psi\rangle$  es autovector de  $\mathbf{A}$  para un determinado autovalor  $\lambda$  entonces  $|\check{\psi}\rangle = \alpha |\psi\rangle$  (un vector proporcional a  $|\psi\rangle$ , con  $\alpha$  un número complejo) también es un autovector para el mismo autovalor. Esto representa una incómoda ambigüedad: dos autovectores que corresponden al mismo autovalor. Un intento de eliminarla es **siempre** considerar vectores  $|\psi\rangle$  normalizados, i.e.  $\langle \psi | \psi \rangle = 1$ . Sin embargo no deja de ser un intento que no elimina la ambigüedad del todo porque siempre queda ángulo de fase arbitrario. Esto es el vector  $e^{i\theta} |\psi\rangle$ , con  $\theta$  un número real arbitrario, tiene la misma norma del vector  $|\psi\rangle$ . Sin embargo esta arbitrariedad es inofensiva. En Mecánica Cuántica las predicciones obtenidas con  $|\psi\rangle$  son las mismas que con  $e^{i\theta} |\psi\rangle$ .
2. Un autovalor  $\lambda$  será *no degenerado* o *simple* si está asociado a un único autovector  $|\psi\rangle$ <sup>2</sup> de lo contrario si denominará *degenerado* si existen dos o más autovectores de  $\mathbf{A}$ , linealmente independientes asociados al mismo autovalor  $\lambda$ . El *grado* (o el *orden*) de la *degeneración* es el número de vectores linealmente independientes que estén asociados al mencionado autovalor  $\lambda$ .
3. El orden de degeneración de un autovalor  $\lambda$  expande un espacio vectorial  $S(\lambda) \subset V^n$  (denominado *autoespacio*) cuya dimensión es el orden de la degeneración. Esto es si  $\lambda$  es  $g$ -degenerado, entonces existen

$$\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, |\psi_3\rangle, \dots, |\psi_g\rangle\} \implies \mathbf{A} |\psi_i\rangle = \lambda |\psi_i\rangle$$

adicionalmente un autovector correspondiente al autovalor  $\lambda$  puede ser expresado como

$$|\psi\rangle = c^i |\psi_i\rangle \quad \text{con } i = 1, 2, \dots, g$$

con lo cual

$$\mathbf{A} |\psi\rangle = c^i \mathbf{A} |\psi_i\rangle = \lambda c^i |\psi_i\rangle = \lambda |\psi\rangle$$

<sup>1</sup>Realmente un conjunto de vectores linealmente independientes, pero como siempre puedo ortogonalizarlos mediante el método de Gram Smith, consideraremos que es una base ortogonal de entrada

<sup>2</sup>Con la arbitrariedad del calibre antes mencionado



### 3.3. Algunos Ejemplos

1. **Reflexión respecto al plano  $xy$**  : Si  $\mathbf{R} : V^3 \rightarrow V^3$  es tal que  $\mathbf{R}|\psi\rangle = |\tilde{\psi}\rangle$  donde se ha realizado una reflexión en el plano  $xy$ . Esto es

$$\mathbf{R}|\mathbf{i}\rangle = |\mathbf{i}\rangle; \quad \mathbf{R}|\mathbf{j}\rangle = |\mathbf{j}\rangle; \quad \mathbf{R}|\mathbf{k}\rangle = -|\mathbf{k}\rangle$$

con  $|\mathbf{i}\rangle, |\mathbf{j}\rangle, |\mathbf{k}\rangle$  vectores unitarios cartesianos. Es claro que cualquier vector en el plano  $xy$  será autovector de  $\mathbf{R}$  con un autovalor  $\lambda = 1$  mientras que cualquier otro vector  $|\psi\rangle \in V^3$  y que no esté en el mencionado plano cumple con  $|\psi\rangle = c|\mathbf{k}\rangle$  y también será autovector de  $\mathbf{R}$  pero esta vez con un autovalor  $\lambda = -1$ .

2. **Dos visiones de Rotaciones de ángulo fijo  $\theta$**  : La rotaciones de un vector en el plano pueden verse de dos maneras.

- a) Se considera el plano como un espacio vectorial *real*  $V^2$  con una base cartesiana canónica:  $|\mathbf{i}\rangle = (1, 0)$ , y  $|\mathbf{j}\rangle = (0, 1)$ , esto es si

$$\mathbf{R}|\mathbf{a}\rangle = \lambda|\mathbf{a}\rangle \implies \text{el ángulo de rotación} = n\pi \quad \text{con } n \text{ entero}$$

- b) Igualmente si consideramos el plano complejo unidimensional, expresemos cualquier vector en el plano en su forma polar  $|\mathbf{z}\rangle = re^{i\theta}$  por lo cual

$$\mathbf{R}|\mathbf{z}\rangle = re^{i(\theta+\alpha)} = e^{i\alpha}|\mathbf{z}\rangle$$

si queremos  $\lambda = e^{i\alpha}$  reales necesariamente  $\alpha = n\pi$  con  $n$  entero

3. **Autovalores y Autovectores de Proyectores.** Es interesante plantearse la ecuación de autovalores con la definición del proyector para un determinado *autoespacio*. Esto es dado  $P_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$  si este proyector cumple con una ecuación de autovalores para un  $|\varphi\rangle$  supuestamente arbitrario

$$P_\psi|\varphi\rangle = \lambda|\varphi\rangle \implies P_\psi|\varphi\rangle = (|\psi\rangle\langle\psi|)|\varphi\rangle \implies |\varphi\rangle \propto |\psi\rangle$$

es decir necesariamente  $|\varphi\rangle$  es colineal con  $|\psi\rangle$ . Más aún si ahora el  $|\varphi\rangle$  no es tan arbitrario sino que es ortogonal a  $|\psi\rangle$ ,  $\langle\psi|\varphi\rangle = 0 \implies \lambda = 0$ . Esto nos lleva a concluir que el espectro del operador  $P_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$  es 0 y 1, el primer de los cuales es infinitamente degenerado y el segundo es simple. Esto nos lleva a reflexionar que si existe un autovector de un determinado operador, entonces su autovalor es distinto de cero, pero pueden existir autovalores nulos que generan un autoespacio infinitamente degenerado.

4. **El operador diferenciación**  $D|\mathbf{f}\rangle \rightarrow D(f) = f'$  : Los autovectores del operador diferenciación necesariamente deben satisfacer la ecuación

$$D|\mathbf{f}\rangle = \lambda|\mathbf{f}\rangle \rightarrow D(f)(x) = f'(x) = \lambda f(x)$$

la solución a esta ecuación será una exponencial. Esto es

$$|\mathbf{f}\rangle \rightarrow f(x) = ce^{\lambda x} \quad \text{con } c \neq 0$$

las  $f(x)$  se denominarán *autofunciones* del operador

### 3.4. Autovalores, autovectores e independencia lineal

Uno de los teoremas más útiles e importantes tiene que ver con la independencia lineal de los autovectores correspondientes a distintos autovalores de un determinado operador lineal. Este importante teorema se puede concretar en.

**Teorema** Sean  $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, |\psi_3\rangle, \dots, |\psi_k\rangle\}$  autovectores del operador  $\mathbf{A} : V^m \rightarrow V^n$  y suponemos que existen  $n$  autovalores,  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$ , distintos correspondientes a cada uno de los autovectores  $|\psi_j\rangle$ . Entonces los  $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, |\psi_3\rangle, \dots, |\psi_k\rangle\}$  son linealmente independientes.

*Demostración* La demostración de este teorema es por inducción y resulta elegante y sencilla.

- Primeramente demostramos que vale  $j = 1$ .  
Obvio que el resultado se cumple y es trivial para el caso  $k = 1$  (un autovector  $|\psi_1\rangle$  que corresponde a un autovalor  $\lambda_1$  es obvia y trivialmente linealmente independiente).
- Seguidamente supondremos que se cumple para  $j = k - 1$ .  
Esto es que si existen  $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, |\psi_3\rangle, \dots, |\psi_{k-1}\rangle\}$  autovectores de  $\mathbf{A}$  correspondientes a  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k-1}\}$  entonces los  $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, |\psi_3\rangle, \dots, |\psi_{k-1}\rangle\}$  son linealmente independientes.
- Ahora lo probaremos para  $j = k$ .  
Por lo cual si tenemos  $k$  autovectores  $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, |\psi_3\rangle, \dots, |\psi_k\rangle\}$ , podremos construir una combinación lineal con ellos y si esa combinación lineal se anula serán linealmente independientes

$$c^j |\psi_j\rangle = 0 \quad \text{con } j = 1, 2, \dots, k$$

al aplicar el operador  $\mathbf{A}$  a esa combinación lineal, obtenemos

$$c^j \mathbf{A} |\psi_j\rangle = 0 \implies c^j \lambda_j |\psi_j\rangle = 0$$

multiplicando por  $\lambda_k$  y restando miembro a miembro obtenemos

$$c^j (\lambda_j - \lambda_k) |\psi_j\rangle = 0 \quad \text{con } j = 1, 2, \dots, k - 1$$

(nótese que el último índice es  $k - 1$ ) pero, dado que los  $k - 1$  vectores  $|\psi_j\rangle$  son linealmente independiente, entonces tendremos  $k - 1$  ecuaciones  $c^j (\lambda_j - \lambda_k) = 0$  una para cada  $j = 1, 2, \dots, k - 1$ . Dado que  $\lambda_j \neq \lambda_k$  necesariamente llegamos a que  $c^j = 0$  para  $j = 1, 2, \dots, k - 1$  y dado que

$$c^j |\psi_j\rangle = 0 \quad \text{con } j = 1, 2, \dots, k \implies c^j \neq 0$$

con lo cual si

$$c^j |\psi_j\rangle = 0 \implies c^j = 0 \quad \text{con } j = 1, 2, \dots, k$$

y los  $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, |\psi_3\rangle, \dots, |\psi_k\rangle\}$  son linealmente independientes. Con lo cual queda demostrado el teorema

Es importante acotar que el inverso de este teorema NO se cumple. Esto es, si  $\mathbf{A} : V^m \rightarrow V^n$  tiene  $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, |\psi_3\rangle, \dots, |\psi_n\rangle\}$  autovectores linealmente independientes. NO se puede concluir que existan  $n$  autovalores,  $\{\lambda_1, \lambda_n, \dots, \lambda_n\}$ , distintos correspondientes a cada uno de los autovectores  $|\psi_j\rangle$ .

El teorema anterior lo complementa el siguiente que lo presentaremos sin demostración. Este teorema será de gran utilidad en lo que sigue.

**Teorema** Si la  $\dim(V^n) = n$  cualquier operador lineal  $\mathbf{A} : V^n \rightarrow V^n$  tendrá un máximo de  $n$  autovalores distintos. Adicionalmente, si  $\mathbf{A}$  tiene *precisamente*  $n$  autovalores,  $\{\lambda_1, \lambda_n, \dots, \lambda_n\}$ , entonces los correspondientes  $n$  autovectores,  $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, |\psi_3\rangle, \dots, |\psi_n\rangle\}$ , forman una base para  $V^n$  y la representación matricial, en esa base, del operador será diagonal

$$\langle \psi^i | \mathbf{A} | \psi_j \rangle = A_j^i = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_n, \dots, \lambda_n)$$

## 4. Autovalores y Autovectores de un operador

Una vez más supongamos que  $\mathbf{A} : V \rightarrow V$  y que  $\dim V = n$ , supongamos además que  $\{|\mathbf{e}_1\rangle, |\mathbf{e}_2\rangle, |\mathbf{e}_3\rangle, \dots, |\mathbf{e}_n\rangle\}$  es una base ortogonal para  $V$ . Por lo tanto la representación matricial de la ecuación de autovalores es la siguiente

$$\langle \mathbf{e}^i | \mathbf{A} | \mathbf{e}_j \rangle \langle \mathbf{e}^j | \psi \rangle = \lambda \langle \mathbf{e}^i | \psi \rangle \quad \implies A_j^i c^j = \lambda c^i \quad \implies (A_j^i - \lambda \delta_j^i) c^j = 0$$

para con  $j = 1, 2, \dots, n$  El conjunto de ecuaciones  $(A_j^i - \lambda \delta_j^i) c^j = 0 = 0$  puede ser considerado un sistema (lineal y homogéneo) de ecuaciones con  $n$  incógnitas  $c^j$ .

### 4.1. El polinomio característico.

Dado que un sistema lineal y homogéneo de ecuaciones con  $n$  incógnitas tiene solución si el determinante de los coeficientes se anula tendremos que

$$(A_j^i - \lambda \delta_j^i) c^j = 0 \quad \implies \det[\mathbf{A} - \lambda \mathbf{1}] = 0 \quad \iff P(\lambda) = \det[A_j^i - \lambda \delta_j^i] = 0$$

Esta ecuación se denomina ecuación característica (o secular) y a partir de ella emergen todos los autovalores (el espectro) del operador  $\mathbf{A}$ . Claramente esta ecuación implica que

$$\begin{vmatrix} A_1^1 - \lambda & A_2^1 & \dots & A_n^1 \\ A_1^2 & A_2^2 - \lambda & & A_n^2 \\ \vdots & & \ddots & \\ A_1^n & A_2^n & & A_n^n - \lambda \end{vmatrix} = 0 \iff \det[A_j^i - \lambda \delta_j^i] = 0$$

y tendrá como resultado un polinomio de grado  $n$  (el polinomio característico). Las raíces de este polinomio serán los autovalores que estamos buscando. Es claro que estas raíces podrán ser reales y distintas, algunas reales e iguales y otras imaginarias.

Es importante señalar que el polinomio característico será independiente de la base a la cual esté referida la representación matricial  $\langle \mathbf{w}^i | \mathbf{A} | \mathbf{w}_j \rangle$  del operador  $\mathbf{A}$ .

## 4.2. Primero los autovalores, luego los autovectores

El procedimiento es el siguiente. Una vez obtenidos (los autovalores) las raíces del polinomio característico, se procede a determinar el autovector,  $|\psi_j\rangle$ , correspondiente a ese autovalor. Distinguiremos en esta determinación casos particulares dependiendo del tipo de raíz del polinomio característico. Ilustraremos estos casos con ejemplos específicos para el caso específico de matrices  $3 \times 3$  a saber:

1. Una matriz  $3 \times 3$  con 3 autovalores reales distintos

$$\langle \mathbf{e}^i | \mathbf{A} | \mathbf{e}_j \rangle = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 20 \end{pmatrix} \implies \det [A_j^i - \lambda \delta_j^i] = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 & 3 \\ 1 & 2 - \lambda & 3 \\ 3 & 3 & 20 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

con lo cual el polinomio característico queda expresado como

$$\lambda^3 - 24\lambda^2 + 65\lambda - 42 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 21) = 0$$

y es claro que tiene 3 raíces distintas. Para proceder a calcular los autovectores correspondientes a cada autovalor resolvemos la ecuación de autovalores para **cada** autovalor. Esto es

$$a) \lambda_1 = 1$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \iff \begin{aligned} 2x^1 + x^2 + 3x^3 &= x^1 \\ x^1 + 2x^2 + 3x^3 &= x^2 \\ 3x^1 + 3x^2 + 20x^3 &= x^3 \end{aligned}$$

que constituye un sistema de ecuaciones algebraicas de 3 ecuaciones con 3 incógnitas. Resolviendo el sistema tendremos que

$$\lambda_1 = 1 \iff \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}_{\lambda_1=1} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

con  $\alpha$  un escalar distinto de cero

$$b) \lambda_2 = 2$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \iff \begin{aligned} 2x^1 + x^2 + 3x^3 &= 2x^1 \\ x^1 + 2x^2 + 3x^3 &= 2x^2 \\ 3x^1 + 3x^2 + 20x^3 &= 2x^3 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema tendremos que

$$\lambda_2 = 2 \iff \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}_{\lambda_2=2} = \alpha \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c)  $\lambda_3 = 21$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = 21 \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \iff \begin{array}{rcl} 2x^1 + x^2 + 3x^3 & = & 21x^1 \\ x^1 + 2x^2 + 3x^3 & = & 21x^2 \\ 3x^1 + 3x^2 + 20x^3 & = & 21x^3 \end{array}$$

Resolviendo el sistema tendremos que

$$\lambda_3 = 21 \iff \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}_{\lambda_3=21} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

2. Una matriz  $3 \times 3$  con 2 autovalores reales distintos, es decir una matriz con autovalores repetidos

$$\langle \mathbf{e}^i | \mathbf{A} | \mathbf{e}_j \rangle = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 1 & 7 & -4 \end{pmatrix} \implies \det [A_j^i - \lambda \delta_j^i] = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & -3 & 1 \\ 4 & -1 - \lambda & 0 \\ 1 & 7 & -4 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

con lo cual el polinomio característico queda expresado como

$$\lambda^3 + \lambda^2 - 5\lambda - 3 = (\lambda + 3)(\lambda - 1)^2 = 0$$

y es claro que tiene 2 raíces iguales y una distinta. En este caso  $\lambda = 1$  es un autovalor degenerado de orden 2. Para proceder a calcular los autovectores correspondientes a cada autovalor resolvemos la ecuación de autovalores para **cada** autovalor. Esto es:

a)  $\lambda_1 = -3$

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 1 & 7 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \iff \begin{array}{rcl} 4x^1 - 3x^2 + x^3 & = & -3x^1 \\ 4x^1 - x^2 & = & -3x^2 \\ x^1 + 7x^2 - 4x^3 & = & -3x^3 \end{array}$$

Resolviendo el sistema tendremos que

$$\lambda_1 = -3 \iff \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}_{\lambda_1=-3} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 13 \end{pmatrix}$$

b)  $\lambda_2 = 1$  (autovalor degenerado de orden 2)

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 1 & 7 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \iff \begin{array}{rcl} 4x^1 - 3x^2 + x^3 & = & x^1 \\ 4x^1 - x^2 & = & x^2 \\ x^1 + 7x^2 - 4x^3 & = & x^3 \end{array}$$

Resolviendo el sistema tendremos que

$$\lambda_2 = 1 \iff \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}_{\lambda_2=1} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

3. Otra matriz  $3 \times 3$  con 2 autovalores reales distintos, es decir otra matriz con autovalores repetidos

$$\langle \mathbf{e}^i | \mathbf{A} | \mathbf{e}_j \rangle = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \implies \det [A_j^i - \lambda \delta_j^i] = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 3-\lambda & 2 \\ 3 & 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

con lo cual el polinomio característico ahora queda expresado como

$$\lambda^3 + \lambda^2 - 5\lambda - 3 = (\lambda - 7)(\lambda - 1)^2 = 0$$

y es claro que tiene 2 raíces iguales y una distinta. En este caso  $\lambda = 1$  vuelve a ser un autovalor degenerado de orden 2. Para proceder a calcular los autovectores correspondientes a cada autovalor resolvemos la ecuación de autovalores para **cada** autovalor. Esto es:

a)  $\lambda_1 = 7$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = 7 \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \iff \begin{aligned} 2x^1 + x^2 + x^3 &= 7x^1 \\ 2x^1 + 3x^2 + 3x^3 &= 7x^2 \\ 3x^1 + 3x^2 + 4x^3 &= 7x^3 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema tendremos que

$$\lambda_1 = 7 \iff \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}_{\lambda_1=7} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

b)  $\lambda_2 = 1$ , el autovalor degenerado de orden 2 presenta una pequeña patología. Veamos

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \iff \begin{aligned} 2x^1 + x^2 + x^3 &= x^1 \\ 2x^1 + 3x^2 + 3x^3 &= x^2 \\ 3x^1 + 3x^2 + 4x^3 &= x^3 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema tendremos que

$$\lambda_2 = 1 \iff \begin{cases} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}_{\lambda_2=1} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}_{\lambda_2=1} = \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

con lo cual el autovector  $|\psi_2\rangle$  correspondiente al autovalor  $\lambda_2 = 1$  se podrá escribir como

$$|\psi_2\rangle = \alpha |\phi_{21}\rangle + \beta |\phi_{22}\rangle \iff \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}_{\lambda_2=1} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

4. Una matriz  $3 \times 3$  con 1 autovalor real y dos autovalores complejos

$$\langle \mathbf{e}^i | \mathbf{A} | \mathbf{e}_j \rangle = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \implies \det [A_j^i - \lambda \delta_j^i] = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 & 3 \\ 3 & 1 - \lambda & 2 \\ 2 & 3 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

con lo cual el polinomio característico queda expresado como

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 - 15\lambda - 18 = (\lambda - 6)(\lambda^2 + 3\lambda + 3) = 0$$

y es claro que tiene 2 raíces iguales y una distinta. En este caso  $\lambda = 6$  es un autovalor real. Adicionalmente existen dos autovalores complejos, uno el complejo conjugado del otro:  $\lambda_* = -\frac{1}{2}(3 + i\sqrt{3})$  y  $\bar{\lambda}_* = -\frac{1}{2}(3 - i\sqrt{3})$ . Para proceder a calcular los autovectores correspondientes a cada autovalor resolvemos la ecuación de autovalores para **cada** autovalor real. En este caso existe **un único** autovalor real  $\lambda = 6$ .

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 4x^1 - 3x^2 + x^3 = 6x^1 \\ 4x^1 - x^2 = 6x^2 \\ x^1 + 7x^2 - 4x^3 = 6x^3 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema tendremos que

$$\lambda = 6 \iff \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}_{\lambda=6} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

## 5. Autovalores y Autovectores de Matrices Importantes

En esta sección presentaremos autovalores y autovectores de matrices importantes en Física

### 5.1. Autovalores y Autovectores de Matrices Similares

Supongamos la representación matricial de un determinado operador lineal  $\mathbf{A} : V \rightarrow V$  y que  $\dim V = n$ , supongamos además que  $\{|\mathbf{e}_1\rangle, |\mathbf{e}_2\rangle, |\mathbf{e}_3\rangle, \dots, |\mathbf{e}_n\rangle\}$  y  $\{|\mathbf{w}_1\rangle, |\mathbf{w}_2\rangle, |\mathbf{w}_3\rangle, \dots, |\mathbf{w}_n\rangle\}$  son dos bases ortogonales para  $V$ . Entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{A} |\mathbf{e}_j\rangle &= A_j^l |\mathbf{e}_l\rangle & \text{con } A_j^i &= \langle \mathbf{e}^i | \mathbf{A} | \mathbf{e}_j \rangle \\ &\text{y} \\ \mathbf{A} |\mathbf{w}_j\rangle &= \tilde{A}_j^l |\mathbf{w}_l\rangle & \text{con } \tilde{A}_j^i &= \langle \mathbf{w}^i | \mathbf{A} | \mathbf{w}_j \rangle \end{aligned}$$

ahora bien, cada uno de los vectores base  $|\mathbf{e}_j\rangle$  y  $|\mathbf{w}_j\rangle$  puede ser expresado en las otras bases  $\{|\mathbf{w}_1\rangle, |\mathbf{w}_2\rangle, |\mathbf{w}_3\rangle, \dots, |\mathbf{w}_n\rangle\}$  y  $\{|\mathbf{e}_1\rangle, |\mathbf{e}_2\rangle, |\mathbf{e}_3\rangle, \dots, |\mathbf{e}_n\rangle\}$ , respectivamente como

$$\left. \begin{aligned} |\mathbf{w}_j\rangle &= c_j^l |\mathbf{e}_l\rangle \\ |\mathbf{e}_l\rangle &= \tilde{c}_l^m |\mathbf{w}_m\rangle \end{aligned} \right\} \implies |\mathbf{w}_j\rangle = c_j^l \tilde{c}_l^m |\mathbf{w}_m\rangle \implies c_j^l \tilde{c}_l^m = \tilde{c}_l^m c_j^l = \delta_j^m \implies \tilde{c}_l^m = (c_l^m)^{-1}$$

Las cantidades  $c_j^l$  son escalares que pueden ser “arreglados” como una matriz. Esa matriz, adicionalmente es no singular<sup>3</sup> por ser una la representación de una transformación lineal que aplica una base en otra. Entonces además

$$|\mathbf{w}_j\rangle = c_j^l |\mathbf{e}_l\rangle \quad \implies \mathbf{A} |\mathbf{w}_j\rangle = c_j^l \mathbf{A} |\mathbf{e}_l\rangle \quad \implies \tilde{A}_j^l |\mathbf{w}_l\rangle = c_j^m A_m^k |\mathbf{e}_k\rangle = \underbrace{c_j^m A_m^k \tilde{c}_k^h}_{\delta_j^h} |\mathbf{w}_h\rangle$$

con lo cual

$$\tilde{A}_j^l = c_j^m A_m^k \tilde{c}_k^l \quad \implies \tilde{A}_j^l = \tilde{c}_k^l A_m^k c_j^m \quad \implies \tilde{A}_j^l = \left(c_k^l\right)^{-1} A_m^k c_j^m$$

que puede ser expresada en el lenguaje de operadores, finalmente como

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{C} \quad \iff \quad \langle \mathbf{w}^i | \mathbf{A} | \mathbf{w}_j \rangle = (c_k^i)^{-1} \langle \mathbf{e}^k | \mathbf{A} | \mathbf{e}_m \rangle c_j^m$$

De esta manera hemos demostrado el siguiente teorema.

**Teorema** Dadas dos matrices,  $n \times n$ ,  $A_j^l$  y  $\tilde{A}_j^i$  las cuales corresponden a la representación matricial de un operador  $\mathbf{A}$  en las bases ortogonales  $\{|\mathbf{e}_1\rangle, |\mathbf{e}_2\rangle, |\mathbf{e}_3\rangle, \dots, |\mathbf{e}_n\rangle\}$  y  $\{|\mathbf{w}_1\rangle, |\mathbf{w}_2\rangle, |\mathbf{w}_3\rangle, \dots, |\mathbf{w}_n\rangle\}$ , respectivamente. Entonces existe una matriz  $c_j^l$ , no singular, tal que

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{C} \quad \iff \quad \langle \mathbf{w}^i | \mathbf{A} | \mathbf{w}_j \rangle = (c_k^i)^{-1} \langle \mathbf{e}^k | \mathbf{A} | \mathbf{e}_m \rangle c_j^m$$

El inverso de este teorema también se cumple. Vale decir

**Teorema** Si dos matrices  $n \times n$ ,  $A_j^l$  y  $\tilde{A}_j^i$ , están relacionadas por la ecuación

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{C} \iff \quad \langle \mathbf{w}^i | \tilde{\mathbf{A}} | \mathbf{w}_j \rangle = (c_k^i)^{-1} \langle \mathbf{w}^k | \mathbf{A} | \mathbf{w}_m \rangle c_j^m$$

donde  $\mathbf{C}$  es una matriz no singular, entonces  $\tilde{\mathbf{A}}$  y  $\mathbf{A}$  representan el mismo operador lineal.

*Demostración* Para proceder a demostrarlo supondremos  $\mathbf{A} : V \rightarrow V$  y que  $\dim V = n$ , supongamos además que  $\{|\mathbf{e}_1\rangle, |\mathbf{e}_2\rangle, |\mathbf{e}_3\rangle, \dots, |\mathbf{e}_n\rangle\}$  y  $\{|\mathbf{w}_1\rangle, |\mathbf{w}_2\rangle, |\mathbf{w}_3\rangle, \dots, |\mathbf{w}_n\rangle\}$  son bases de  $V$  de tal forma

$$\left. \begin{array}{l} |\mathbf{w}_j\rangle = c_j^l |\mathbf{e}_l\rangle \\ |\mathbf{e}_l\rangle = \tilde{c}_l^m |\mathbf{w}_m\rangle \end{array} \right\} \implies |\mathbf{w}_j\rangle = c_j^l \tilde{c}_l^m |\mathbf{w}_m\rangle \implies c_j^l \tilde{c}_l^m = \tilde{c}_l^m c_j^l = \delta_j^m \implies \tilde{c}_l^m = (c_l^m)^{-1}$$

donde

$$c_j^l = \langle \mathbf{e}^l | \mathbf{w}_j \rangle \quad \text{y} \quad \tilde{c}_l^m = (c_l^m)^{-1} = \langle \mathbf{w}^m | \mathbf{e}_l \rangle$$

Supongamos que

$$\mathbf{A} |\mathbf{e}_j\rangle = A_j^l |\mathbf{e}_l\rangle \quad \text{con} \quad A_j^i = \langle \mathbf{e}^i | \mathbf{A} | \mathbf{e}_j \rangle$$

y

$$\tilde{\mathbf{A}} |\mathbf{w}_j\rangle = \tilde{A}_j^l |\mathbf{w}_l\rangle \quad \text{con} \quad \tilde{A}_j^i = \langle \mathbf{w}^i | \tilde{\mathbf{A}} | \mathbf{w}_j \rangle$$

---

<sup>3</sup> $\det(c_j^i) \neq 0$



al actuar  $\mathbf{A}$  sobre  $|\mathbf{w}_j\rangle$  tendremos

$$\mathbf{A} |\mathbf{w}_j\rangle = c_j^l \mathbf{A} |\mathbf{e}_l\rangle = c_j^l A_l^k |\mathbf{e}_k\rangle = c_j^l A_l^k \tilde{c}_k^m |\mathbf{w}_m\rangle = \tilde{c}_k^m A_l^k c_j^l |\mathbf{w}_m\rangle = \underbrace{(c_k^m)^{-1} A_l^k c_j^l}_{\langle \mathbf{w}^i | \tilde{\mathbf{A}} | \mathbf{w}_j \rangle} |\mathbf{w}_m\rangle$$

que es exactamente la representación matricial de  $\tilde{\mathbf{A}}$ . Con lo cual  $\mathbf{A} \equiv \tilde{\mathbf{A}}$  y queda demostrado el teorema.

**Definición** Dos matrices,  $A_l^k$  y  $\tilde{A}_j^i$ ,  $n \times n$ , se denominará similares si existe una matriz no singular  $c_k^i$  tal que

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{C} \iff \langle \mathbf{w}^i | \tilde{\mathbf{A}} | \mathbf{w}_j \rangle = (c_k^i)^{-1} \langle \mathbf{w}^k | \mathbf{A} | \mathbf{w}_m \rangle c_j^m$$

Podemos juntar los dos teoremas anteriores y afirmar que

**Teorema** Dos matrices,  $A_l^k$  y  $\tilde{A}_j^i$ ,  $n \times n$ , similares representan la misma transformación lineal.

**Teorema** Dos matrices,  $A_l^k$  y  $\tilde{A}_j^i$ ,  $n \times n$ , similares tienen el mismo determinante.

*Demostración* La demostración es inmediata y proviene de las propiedades del determinante de un producto:

$$\det(\tilde{\mathbf{A}}) = \det(\mathbf{C}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{C}) = \det(\mathbf{C}^{-1}) \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{C}) = \det(\mathbf{A})$$

Con lo cual es inmediato el siguiente Teorema

**Teorema** Dos matrices,  $A_l^k$  y  $\tilde{A}_j^i$ ,  $n \times n$ , similares tienen el mismo polinomio característico y con ello el mismo conjunto de autovalores

*Demostración* Es inmediato verificar que

$$\tilde{\mathbf{A}} - \lambda \mathbf{1} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{C} - \lambda \mathbf{1} = \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{1}) \mathbf{C}$$

y dado que

$$\det(\tilde{\mathbf{A}} - \lambda \mathbf{1}) = \det(\mathbf{C}^{-1} (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{1}) \mathbf{C}) = \det(\mathbf{C}^{-1}) \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{1}) \det(\mathbf{C}) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{1})$$

ambas matrices,  $\tilde{\mathbf{A}}$  y  $\mathbf{A}$ , tendrán el mismo polinomio característico y con ello el mismo conjunto de autovalores.

Todos los teoremas de esta sección pueden ser resumidos en el siguiente teorema

**Teorema** Sea un operador lineal  $\mathbf{A} : V \rightarrow V$  y que  $\dim V = n$ , supongamos además que el polinomio característico tiene  $n$  raíces distintas,  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ . Entonces tendremos que

- Los autovectores  $\{|\mathbf{u}_1\rangle, |\mathbf{u}_2\rangle, \dots, |\mathbf{u}_n\rangle\}$  correspondientes a los  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ , forman una base para  $V$ .

- La representación matricial del operador  $\langle \mathbf{u}^k | \mathbf{A} | \mathbf{u}_m \rangle$  en la base de autovectores  $\{|\mathbf{u}_1\rangle, |\mathbf{u}_2\rangle, \dots, |\mathbf{u}_n\rangle\}$ , será diagonal

$$\bar{A}_m^k = \Lambda_m^k = \langle \mathbf{u}^k | \mathbf{A} | \mathbf{u}_m \rangle = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

- Cualquier otra representación matricial,  $\langle \mathbf{e}^k | \mathbf{A} | \mathbf{e}_m \rangle$ , del operador  $\mathbf{A}$  en otra base de  $V$ , estará relacionada con la representación diagonal mediante una transformación de similitud

$$\mathbf{A} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{C} \iff \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = (c_k^i)^{-1} \langle \mathbf{e}^k | \mathbf{A} | \mathbf{e}_m \rangle c_j^m$$

donde  $c_j^m$  es la matriz, no singular y por lo tanto invertible, de cantidades que relacionan ambas bases

$$\left. \begin{array}{l} |\mathbf{u}_j\rangle = c_j^l |\mathbf{e}_l\rangle \\ |\mathbf{e}_l\rangle = \tilde{c}_l^m |\mathbf{u}_m\rangle \end{array} \right\} \iff \tilde{c}_l^m = (c_l^m)^{-1} \implies \tilde{c}_l^m c_j^l = \delta_j^m$$

*Demostración* La demostración, en términos de los teoremas anteriores es inmediata y se la dejamos como ejercicio al lector.

## 5.2. Autovalores y Autovectores de Matrices Hermíticas

Tal y como mencionamos con anterioridad un operador Hermítico cumple con

$$\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A} \implies (A^\dagger)_j^i = \langle \mathbf{e}^i | \mathbf{A}^\dagger | \mathbf{e}_j \rangle = \langle \mathbf{e}^j | \mathbf{A} | \mathbf{e}_i \rangle^* = (A_i^j)^*$$

Esto es: el hermítico conjugado de una matriz, es su traspuesta conjugada. Por lo tanto las matrices Hermíticas son simétricas respecto a la diagonal y los elementos de la diagonal son números reales.

Por su parte, llamaremos antihermítico a un operador que cumpla con

$$\mathbf{A}^\dagger = -\mathbf{A} \implies (A^\dagger)_j^i = \langle \mathbf{e}^i | \mathbf{A}^\dagger | \mathbf{e}_j \rangle = -\langle \mathbf{e}^j | \mathbf{A} | \mathbf{e}_i \rangle^* = -(A_i^j)^*$$

**Teorema** Suponga un operador Hermítico  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\dagger$  tiene por autovalores  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ . Entonces:

- Los autovalores  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  son reales.
- Los autovectores  $\{|\mathbf{u}_1\rangle, |\mathbf{u}_2\rangle, \dots, |\mathbf{u}_n\rangle\}$ , correspondientes a cada uno de los autovalores, serán ortogonales.

*Demostración:*

- Para demostrar que los autovalores  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  son reales, proyectamos la ecuación de autovalores en cada uno de los autovectores:

$$\mathbf{A} |\psi\rangle = \lambda |\psi\rangle \implies \langle\psi| \mathbf{A} |\psi\rangle = \lambda \langle\psi| \psi\rangle$$

Ahora bien, dado que  $\langle\psi| \psi\rangle$  es real, si demostramos que  $\langle\psi| \mathbf{A} |\psi\rangle$  estará demostrado que  $\lambda$  lo será también. Pero como  $\mathbf{A}$  es Hermítico

$$\langle\psi| \mathbf{A} |\psi\rangle^* = \langle\psi| \mathbf{A}^\dagger |\psi\rangle = \langle\psi| \mathbf{A} |\psi\rangle \implies \langle\psi| \mathbf{A} |\psi\rangle \in \mathbb{R}$$

y por consiguiente los autovalores  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  son reales. Más aún, si  $\mathbf{A}$  es Hermítico, y como sus autovalores son reales entonces

$$\langle\psi| \mathbf{A}^\dagger = \lambda^* \langle\psi| = \lambda \langle\psi| \implies \langle\psi| \mathbf{A} |\phi\rangle = \lambda \langle\psi| \phi\rangle$$

- Para demostrar que los autovectores  $\{|\mathbf{u}_1\rangle, |\mathbf{u}_2\rangle, \dots, |\mathbf{u}_n\rangle\}$  son ortogonales, consideremos dos autovectores con sus correspondientes autovalores de tal forma que se cumplen las siguientes ecuaciones

$$\mathbf{A} |\psi\rangle = \lambda |\psi\rangle \quad \text{y} \quad \mathbf{A} |\varphi\rangle = \mu |\varphi\rangle$$

pero como  $\mathbf{A}$  es Hermítico entonces se cumple que  $\langle\varphi| \mathbf{A} = \mu \langle\varphi|$  entonces multiplicando a la izquierda por  $|\psi\rangle$  y a  $\langle\psi| \mathbf{A} = \lambda \langle\psi|$  por  $\langle\varphi|$  la derecha.

$$\left. \begin{array}{l} (\langle\varphi| \mathbf{A} = \mu \langle\varphi|) |\psi\rangle \\ \langle\varphi| (\mathbf{A} |\psi\rangle = \lambda |\psi\rangle) \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} \langle\varphi| \mathbf{A} |\psi\rangle = \mu \langle\varphi| \psi\rangle \\ \langle\varphi| \mathbf{A} |\psi\rangle = \lambda \langle\varphi| \psi\rangle \end{array} \right\} \implies (\lambda - \mu) \langle\varphi| \psi\rangle = 0$$

y como hemos supuesto que  $\lambda \neq \mu$  con lo cual  $\langle\varphi| \psi\rangle = 0$  los autovectores correspondientes a dos autovalores son ortogonales.

Existen situaciones en las cuales un determinado autovalor  $\lambda = \lambda_0$  es degenerado. Consideremos una matriz  $n \times n$ ,  $A_j^i$ , por lo cual el polinomio característico  $P(\lambda) = \det [A_j^i - \lambda \delta_j^i] = 0$  tendrá una raíz degenerada de orden  $k \leq n$ . Entonces el siguiente teorema garantiza la existencia de, al menos un subespacio  $S(\lambda_0) \subset V^n$

**Teorema** Sea un operador lineal  $\mathbf{A} : V^n \rightarrow V^n$  con una representación matricial  $n \times n$  tal que su polinomio  $\mathcal{P}(\lambda) = \det [A_j^i - \lambda \delta_j^i] = 0$  tiene al menos una raíz degenerada  $\lambda = \lambda_0$ , de orden  $k \leq n$ . Entonces existen  $k$  autovectores, no triviales, que cumplen con

$$\mathbf{A} |\psi_j\rangle = \lambda_0 |\psi_j\rangle \quad \text{con } j = 1, 2, \dots, k$$

*Demostración* La demostración también emerge de una variante del *Método de Inducción Completa*.

Para ello, probamos que se cumple para  $j = 1$ . Esta afirmación es obvia. Si existe un  $\lambda = \lambda_0$  existe un  $|\psi_j\rangle$ , tal que cumple con la ecuación anterior el es linealmente independiente con él mismo.

Suponemos que se cumple para  $1 \leq j = m \leq k$ . Es decir existen  $m$  autovectores  $|\psi_j\rangle$  de  $\mathbf{A}$  para el autovalor  $\lambda_0$ . Definamos un subespacio  $S_{\lambda_0} = S(\lambda_0) \subset V^n$  donde

$$|\psi_j\rangle \in S_{\lambda_0} \quad \ni \mathbf{A} |\psi_j\rangle = \lambda_0 |\psi_j\rangle \quad \implies \mathbf{A} |\psi_j\rangle \in S_{\lambda_0} \quad \text{con } j = 1, 2, \dots, m, \dots, k$$

por lo tanto podremos separar  $V^n$  como una suma directa entre el subespacio  $S_{\lambda_0}$  y  $\mathcal{N}$  su complemento ortogonal

$$V^n = S_{\lambda_0} \oplus \mathcal{N} \quad \ni \mathbf{A} |\psi_j\rangle = \lambda_0 |\psi_j\rangle \quad \wedge \quad |\phi\rangle \in \mathcal{N} \quad \implies \langle \phi | \psi_j \rangle = 0$$

claramente  $S_{\lambda_0}$  es un subespacio invariante de  $\mathbf{A}$  por cuanto su acción se circunscribe dentro del mismo subespacio  $S_{\lambda_0}$ . Mostraremos que, para este caso por cuanto no es verdad, en general para operadores no Hermíticos. Entonces

$$\left. \begin{array}{l} \langle \phi | \psi_j \rangle = 0 \\ \wedge \\ \mathbf{A} |\psi_j\rangle = \lambda_0 |\psi_j\rangle \end{array} \right\} \implies \langle \psi_j | \phi \rangle = 0 = \langle \psi_j | \mathbf{A}^\dagger | \phi \rangle = \langle \psi_j | \mathbf{A} | \phi \rangle$$

de donde se concluye que el vector es ortogonal a  $S_{\lambda_0}$  y por lo tanto está en el complemento ortogonal,  $\mathbf{A} |\phi\rangle \in \mathcal{N}$  como, por hipótesis  $|\phi\rangle \in \mathcal{N}$ . Esto implica que  $\mathcal{N}$  también es un espacio invariante del operador Hermítico  $\mathbf{A}$ . Entonces el espacio  $V^n$  puede expresarse como una suma directa de los dos subespacios invariantes respecto al operador lineal  $\mathbf{A}$   $V^n = S_{\lambda_0} \oplus \mathcal{N}$  y su representación matricial en la base de autovectores tendrá la forma de una matriz diagonal a bloques: con lo cual

$$\langle \mathbf{u}^j | \mathbf{A} | \mathbf{u}_i \rangle = A_i^j \rightarrow \begin{pmatrix} Q_1^1 & \dots & Q_m^1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ Q_1^m & & Q_m^m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & R_{m+1}^{m+1} & \dots & R_n^{m+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & R_{m+1}^n & \dots & R_n^n \end{pmatrix}$$

donde  $Q_\beta^\alpha$  y  $R_v^\mu$  son matrices  $m \times m$  y  $(n-m) \times (n-m)$ , respectivamente. La matriz  $Q_\beta^\alpha$  opera en  $S_{\lambda_0}$  mientras que  $R_v^\mu$  actúa sobre el complemento ortogonal  $\mathcal{N}$ . El polinomio característico de  $\mathbf{A}$  puede expresarse como

$$\mathcal{P}(\lambda) = \det [A_j^i - \lambda \delta_j^i] = 0 \quad \implies \mathcal{P}(\lambda) = \det [Q_j^i - \lambda \delta_j^i] \det [R_j^i - \lambda \delta_j^i] = 0$$

y como  $\lambda = \lambda_0$  es la raíz múltiple del polinomio característico y que anula el  $\det [Q_j^i - \lambda \delta_j^i]$  tendremos que

$$\det [Q_j^i - \lambda_0 \delta_j^i] = 0 \quad \implies \mathcal{P}(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^m \mathcal{F}(\lambda) \quad \text{con } \mathcal{F}(\lambda_0) \neq 0$$

donde  $\lambda_0$  no es raíz del polinomio  $\mathcal{F}(\lambda)$ . Ahora bien, para que se cumpla para  $j = k$  el polinomio característico es

$$j = k \quad \implies \mathcal{P}(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^k \mathcal{R}(\lambda) \quad \implies (\lambda - \lambda_0)^m \mathcal{F}(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^k \mathcal{R}(\lambda)$$

otra vez  $\lambda_0$  no es raíz del polinomio  $\mathcal{R}(\lambda)$ . La ecuación anterior se cumple para todo  $\lambda$  en particular para  $\lambda = \lambda_0$ . Por lo tanto

$$1 = (\lambda - \lambda_0)^{k-m} \frac{\mathcal{R}(\lambda)}{\mathcal{F}(\lambda)}$$

Es claro que  $\lambda = \lambda_0$  obliga a  $k = m$

### 5.3. Autovalores y Autovectores de Matrices Unitarias

Tal y como mencionamos anteriormente, un operador será unitario si su inversa es igual a su adjunto. Esto es

$$\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^\dagger \implies \mathbf{U}^\dagger \mathbf{U} = \mathbf{U} \mathbf{U}^\dagger = \mathbf{1}$$

dado que los operadores unitarios conservan la norma de los vectores sobre los cuales ellos actúan, i.e.

$$\left. \begin{array}{l} |\tilde{\mathbf{x}}\rangle = \mathbf{U} |\mathbf{x}\rangle \\ |\tilde{\mathbf{y}}\rangle = \mathbf{U} |\mathbf{y}\rangle \end{array} \right\} \implies \langle \tilde{\mathbf{y}} | \tilde{\mathbf{x}} \rangle = \langle \mathbf{y} | \mathbf{U}^\dagger \mathbf{U} | \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{y} | \mathbf{x} \rangle$$

son naturales para representar cambios de base dentro de un espacio vectorial. De lo anterior se deduce que si  $\{|\mathbf{e}_1\rangle, |\mathbf{e}_2\rangle, |\mathbf{e}_3\rangle, \dots, |\mathbf{e}_n\rangle\}$  es una base ortonormal, el conjunto de vectores transformados,  $|\mathbf{w}_j\rangle = \mathbf{U} |\mathbf{e}_j\rangle$ , también son ortonormales:

$$|\mathbf{w}_j\rangle = \mathbf{U} |\mathbf{e}_j\rangle \implies \langle \mathbf{w}^i | \mathbf{w}_j \rangle = \langle \mathbf{w}^i | \mathbf{U} |\mathbf{e}_j\rangle = \langle \mathbf{e}^i | \mathbf{U}^\dagger \mathbf{U} |\mathbf{e}_j\rangle = \delta_j^i$$

#### Bases y operadores unitarios

Los operadores unitarios aplican vectores base de un espacio vectorial en otra. El siguiente Teorema lo ilustra

**Teorema** La condición necesaria y suficiente para que un operador  $\mathbf{U} : V^n \rightarrow V^n$  sea unitario es que aplique vectores de una base ortonormal  $\{|\mathbf{e}_1\rangle, |\mathbf{e}_2\rangle, |\mathbf{e}_3\rangle, \dots, |\mathbf{e}_n\rangle\}$  en otra de  $\{|\mathbf{w}_1\rangle, |\mathbf{w}_2\rangle, |\mathbf{w}_3\rangle, \dots, |\mathbf{w}_n\rangle\}$  también ortonormal.

*Demostración* Demostremos primero la condición necesaria: Si es unitario aplica una base en otra. Esto es, supongamos que los vectores  $\{|\mathbf{e}_j\rangle\}$  forman una base ortonormal para  $V^n$ . Sean  $|\psi\rangle$ , y  $\mathbf{U}^\dagger |\psi\rangle \in V^n$ . Estos vectores pueden ser expresados en términos de la base  $\{|\mathbf{e}_j\rangle\}$  de  $V^n$ . Por lo tanto, si seleccionamos  $\mathbf{U}^\dagger |\psi\rangle$  se cumple que

$$\mathbf{U}^\dagger |\psi\rangle = c^j |\mathbf{e}_j\rangle \implies \mathbf{U} \mathbf{U}^\dagger |\psi\rangle = c^j \mathbf{U} |\mathbf{e}_j\rangle = c^j |\mathbf{w}_j\rangle \implies |\psi\rangle = c^j |\mathbf{w}_j\rangle$$

donde hemos aplicado el operador  $\mathbf{U}$  a la ecuación  $\mathbf{U}^\dagger |\psi\rangle = c^j |\mathbf{e}_j\rangle$  y el resultado es que el otro vector,  $|\psi\rangle$ , también se pudo expresar como combinación lineal de los vectores transformados  $\{|\mathbf{w}_j\rangle\}$  de la base  $\{|\mathbf{e}_j\rangle\}$ . Y por lo tanto los  $\{|\mathbf{w}_j\rangle\}$  también constituyen una base. Es decir, los operadores unitarios aplican una base ortonormal en otra

La condición de suficiencia (Si aplica una base en otra es unitario) se puede demostrar como sigue. Si  $\{|e_j\rangle\}$  y  $\{|w_j\rangle\}$  son bases ortonormales de  $V^n$  y una es la transformada de la otra implica que

$$|w_j\rangle = U |e_j\rangle; \quad y \quad \langle w_j| = \langle e_j| U^\dagger$$

con

$$\langle e^i | e_j \rangle = \delta_j^i; \quad |e_j\rangle \langle e^j| = \mathbf{1} \quad \langle w^i | w_j \rangle = \delta_j^i; \quad |w_j\rangle \langle w^j| = \mathbf{1}$$

Por lo tanto,

$$U^\dagger U |e_j\rangle = U^\dagger |w_j\rangle = |e_k\rangle \langle e^k| U^\dagger |w_j\rangle = |e_k\rangle \langle w^k | w_j \rangle = |e_k\rangle \delta_j^k = |e_j\rangle$$

Esto significa que  $U^\dagger U = \mathbf{1}$ . De un modo equivalente, se puede demostrar que  $UU^\dagger = \mathbf{1}$ . Veamos:

$$U^\dagger |e_j\rangle = |e_k\rangle \langle e^k| U^\dagger |e_j\rangle = |e_k\rangle \langle w^k | e_j \rangle$$

y ahora, aplicando el operador  $U$  a esta ecuación, tenemos

$$UU^\dagger |e_j\rangle = U |e_k\rangle \langle w^k | e_j \rangle = |w_k\rangle \langle w^k | e_j \rangle = |e_j\rangle$$

Esto significa que está demostrado que  $U$  es unitario:  $U^\dagger U = UU^\dagger = \mathbf{1}$ .

### Matrices unitarias

La representación de una matriz unitaria en una base  $\{|e_j\rangle\}$  implica

$$U_j^k = \langle e^k | U |e_j\rangle; \quad \langle e^m | U^\dagger |e_j\rangle = \langle e^j | U |e_m\rangle^* = (U_m^j)^*$$

$$\delta_j^k = \langle e^k | e_j \rangle = \langle e^k | \mathbf{1} | e_j \rangle = \langle e^k | UU^\dagger | e_j \rangle = \langle e^k | U | e_m \rangle \langle e^m | U^\dagger | e_j \rangle = \sum_m U_m^k (U_m^j)^*$$

$$\delta_j^k = \langle e^k | e_j \rangle = \langle e^k | \mathbf{1} | e_j \rangle = \langle e^k | U^\dagger U | e_j \rangle = \langle e^k | U^\dagger | e_m \rangle \langle e^m | U | e_j \rangle = \sum_m (U_m^k)^* U_j^m$$

Una vez más, dado un operador lineal  $A$ , la representación matricial del Hermítico conjugado de ese operador  $A^\dagger$  es la traspuesta conjugada de la matriz que representa al operador  $A$ . En el caso de operadores unitarios.

Con lo cual es fácilmente verificable que una matriz sea unitaria. Basta comprobar que la suma de los productos de los elementos de una columna (fila) de la matriz con los complejos conjugados de otra columna (fila). Esa suma de productos será

1. cero si las columnas (filas) son distintas
2. uno si las columnas (filas) son iguales

Ejemplos de matrices unitarias son las llamadas matrices de rotación. Alrededor del eje  $z$  tendremos que

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y también la matriz de rotación de una partícula de espín  $\frac{1}{2}$  en el espacio de estados

$$R^{(1/2)}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{2}(\alpha+\gamma)} \cos \beta & -e^{\frac{i}{2}(\alpha-\gamma)} \sin \beta \\ e^{-\frac{i}{2}(\alpha-\gamma)} \sin \beta & e^{\frac{i}{2}(\alpha+\gamma)} \cos \beta \end{pmatrix}$$

claramente se cumple la regla expuesta arriba.

### Autovalores y Autovectores de Matrices Unitarias

Si  $|\psi_u\rangle$  es un autovector, normalizado del operador  $\mathbf{U}$  correspondiente a un autovalor  $u$  tendremos que norma al cuadrado será igual a

$$\mathbf{U} |\psi_u\rangle = u |\psi_u\rangle \implies \langle \psi^u | \mathbf{U}^\dagger \mathbf{U} |\psi_u\rangle = 1 = u^* u \langle \psi^u | \psi_u\rangle = u^* u \implies u = e^{i\varphi_u}$$

con  $\varphi_u$  una función real. Por lo cual podemos concluir que, necesariamente, los autovalores de los operadores unitarios serán números complejos de módulo 1. Cuando los autovalores son diferentes, digamos  $u' \neq u$ , entonces  $\langle \psi^{u'} | \psi_u\rangle = 0$ . Con lo cual los autovectores de un operador unitarios son ortogonales.

**Transformación unitaria de Operadores** Hemos visto como las transformaciones unitarias permiten construir bases ortogonales  $\{|\tilde{\mathbf{e}}_m\rangle\}$  para el espacio vectorial  $V^n$  partiendo de otra base  $\{|\mathbf{e}_m\rangle\}$  también ortogonal. En esta subsección mostraremos como transforman los operadores lineales bajo transformaciones unitarias.

**Definición** Dadas dos bases ortonormales  $\{|\mathbf{e}_j\rangle\}$  y  $\{|\mathbf{w}_k\rangle\}$  en  $V^n$  con  $|\mathbf{w}_j\rangle = \mathbf{U} |\mathbf{e}_j\rangle$ , un operador lineal unitario  $\mathbf{U} : V^n \rightarrow V^n$  y un operador lineal  $\mathbf{A} : V^n \rightarrow V^n$ . Definiremos al operador transformado  $\tilde{\mathbf{A}} : V^n \rightarrow V^n$  como aquel cuya representación matricial en la base  $\{|\mathbf{w}_k\rangle\}$  es la misma que en la base  $\{|\mathbf{e}_j\rangle\}$ :  $\langle \mathbf{w}^j | \tilde{\mathbf{A}} |\mathbf{w}_i\rangle = \langle \mathbf{e}^j | \mathbf{A} |\mathbf{e}_i\rangle$

A partir de esta definición es fácil concluir que

$$\langle \mathbf{w}^j | \tilde{\mathbf{A}} |\mathbf{w}_i\rangle = \langle \mathbf{e}^j | \mathbf{U}^\dagger \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{U} |\mathbf{e}_i\rangle = \langle \mathbf{e}^j | \mathbf{A} |\mathbf{e}_i\rangle \implies \mathbf{U}^\dagger \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{U} = \mathbf{A} \iff \tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{U} \mathbf{A} \mathbf{U}^\dagger$$

Por lo tanto la ecuación  $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{U} \mathbf{A} \mathbf{U}^\dagger$  corresponde a la definición de la transformación de un operador  $\mathbf{A}$  mediante un operador unitario  $\mathbf{U}^\dagger$ . Es fácil identificar las propiedades de estos operadores transformados. Veamos

**Hermítico conjugado y Funciones de un Operador transformado:**

$$\left(\tilde{\mathbf{A}}\right)^\dagger = \left(\mathbf{U}\mathbf{A}\mathbf{U}^\dagger\right)^\dagger = \mathbf{U}^\dagger\mathbf{A}^\dagger\mathbf{U} = \widetilde{(\mathbf{A}^\dagger)}$$

en particular se sigue de esta propiedad que si  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\dagger$ , es Hermítico también lo será  $\tilde{\mathbf{A}}$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^\dagger \iff \tilde{\mathbf{A}} = \left(\tilde{\mathbf{A}}\right)^\dagger$$

Del mismo modo

$$\left(\tilde{\mathbf{A}}\right)^2 = \left(\mathbf{U}\mathbf{A}\mathbf{U}^\dagger\right)\left(\mathbf{U}\mathbf{A}\mathbf{U}^\dagger\right) = \mathbf{U}\mathbf{A}^2\mathbf{U}^\dagger = \widetilde{(\mathbf{A}^2)}$$

con lo cual

$$\left(\tilde{\mathbf{A}}\right)^n = \left(\mathbf{U}\mathbf{A}\mathbf{U}^\dagger\right)^{\cdot\cdot\cdot} \left(\mathbf{U}\mathbf{A}\mathbf{U}^\dagger\right) = \mathbf{U}\mathbf{A}^n\mathbf{U}^\dagger = \widetilde{(\mathbf{A}^n)} \implies \tilde{\mathcal{F}}(\mathbf{A}) = \mathcal{F}(\tilde{\mathbf{A}})$$

donde  $\mathcal{F}(\mathbf{A})$  es una función del operador  $\mathbf{A}$ .

**Autovalores y autovectores de un operador transformado** Sera un autovector  $|\phi_\chi\rangle$  de  $\mathbf{A}$  correspondiente a un autovalor  $\chi$ , y sea  $|\tilde{\phi}_\chi\rangle$  el transformado de  $|\phi_\chi\rangle$  mediante el operador unitario  $\mathbf{U}$ . Entonces

$$\mathbf{A}|\phi_\chi\rangle = \chi|\phi_\chi\rangle \implies \tilde{\mathbf{A}}|\tilde{\phi}_\chi\rangle = \left(\mathbf{U}\mathbf{A}\mathbf{U}^\dagger\right)\mathbf{U}|\phi_\chi\rangle = \mathbf{U}\mathbf{A}|\phi_\chi\rangle = \chi\mathbf{U}|\phi_\chi\rangle = \chi|\tilde{\phi}_\chi\rangle$$

con lo cual es claro que  $|\tilde{\phi}_\chi\rangle$  es un autovector de  $\tilde{\mathbf{A}}$  con el mismo autovalor  $\chi$ :  $|\tilde{\phi}_\chi\rangle = \chi|\tilde{\phi}_\chi\rangle$ . Equivalentemente podemos afirmar que los autovectores transformados de  $\mathbf{A}$ , serán autovectores del operador transformado,  $\tilde{\mathbf{A}}$ .

## 6. Conjunto Completo de Observables que conmutan

**Definición** Diremos que un operador  $\mathbf{A} : V^n \rightarrow V^n$  es un *observable* si el conjunto de autovectores  $\{|\mathbf{u}_{i|\mu}\rangle\}$  de un operador Hermítico  $\mathbf{A}$ , forman una base de  $V^n$ .

$$\mathbf{A}|\mathbf{u}_{i(\mu)}\rangle = a_i|\mathbf{u}_{i(\mu)}\rangle \implies |\mathbf{u}_{i(\mu)}\rangle \left\langle \mathbf{u}^i(\mu) \right| = \mathbf{1} \iff \left\langle \mathbf{u}^i(\mu) \right| \mathbf{u}_{j(\nu)}\rangle = \delta_j^i \delta_\nu^\mu$$

donde el índice  $\mu$  indica el grado de degeneración del autovalor  $a_i$ .

Un ejemplo trivial de un observable lo constituyen los proyectores,  $\mathbf{P}_{|\psi\rangle} = |\psi\rangle\langle\psi|$  con  $\langle\psi|\psi\rangle = 1$ . Claramente, la ecuación de autovalores para un proyector obliga a que tenga dos autovalores 0 y 1. El autovalor nulo es infinitamente degenerado y está asociado a todos los vectores ortogonales a  $|\psi\rangle$ , mientras que el autovalor 1 corresponde a un autovalor simple y está asociado a todos los vectores colineales al mismo vector  $|\psi\rangle$ . Esto es

$$\mathbf{P}_{|\psi\rangle}|\psi\rangle = |\psi\rangle \quad \text{y} \quad \mathbf{P}_{|\psi\rangle}|\phi\rangle = 0 \quad \text{si} \quad \langle\psi|\phi\rangle = 0$$



Más aún, sea un vector arbitrario  $|\varphi\rangle \in V^n$ . Siempre se podrá expresar como

$$|\varphi\rangle = \mathbf{P}_{|\psi\rangle} |\varphi\rangle + (\mathbf{1} - \mathbf{P}_{|\psi\rangle}) |\varphi\rangle \implies \mathbf{P}_{|\psi\rangle} (|\varphi\rangle = \mathbf{P}_{|\psi\rangle} |\varphi\rangle + (\mathbf{1} - \mathbf{P}_{|\psi\rangle}) |\varphi\rangle) \implies$$

$$\mathbf{P}_{|\psi\rangle} |\varphi\rangle = \mathbf{P}_{|\psi\rangle} (\mathbf{P}_{|\psi\rangle} |\varphi\rangle) + (\mathbf{P}_{|\psi\rangle} - \mathbf{P}_{|\psi\rangle}^2) |\varphi\rangle = \mathbf{P}_{|\psi\rangle} |\varphi\rangle \implies \mathbf{P}_{|\psi\rangle} (\mathbf{P}_{|\psi\rangle} |\varphi\rangle) = \mathbf{P}_{|\psi\rangle} |\varphi\rangle$$

ya que  $\mathbf{P}_{|\psi\rangle}^2 = \mathbf{P}_{|\psi\rangle}$ , por definición de proyector. Entonces, se deduce que  $\mathbf{P}_{|\psi\rangle} |\varphi\rangle$  es un autovector de  $\mathbf{P}_{|\psi\rangle}$  con autovalor 1. Igualmente  $(\mathbf{1} - \mathbf{P}_{|\psi\rangle}) |\varphi\rangle$  es un autovector de  $\mathbf{P}_{|\psi\rangle}$  con autovalor 0, y la demostración es inmediata

$$\mathbf{P}_{|\psi\rangle} (\mathbf{1} - \mathbf{P}_{|\psi\rangle}) |\varphi\rangle = (\mathbf{P}_{|\psi\rangle} - \mathbf{P}_{|\psi\rangle}^2) |\varphi\rangle = 0$$

Para el caso de autoespacios correspondientes a autovalores degenerados se puede definir un observable  $\mathbf{A}$  de la forma

$$\mathbf{A} = \sum_i a_i \mathbf{P}_i \quad \text{con} \quad \mathbf{P}_i = \left( |\psi_{(\mu)}\rangle \langle \psi_{(\mu)}| \right)_i \quad y \quad \mu = 1, 2, \dots, k$$

### Observables que Conmutan

**Teorema** Si dos operadores lineales  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$ , operadores Hermíticos, conmutan,  $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = 0$ , y  $|\psi\rangle$  es autovector de  $\mathbf{A}$  con autovalor  $a$ , entonces  $\mathbf{B} |\psi\rangle$  también será autovector de  $\mathbf{A}$  con el mismo autovalor  $a$ .

*Demostración* La demostración es sencilla

$$\mathbf{A} |\psi\rangle = a |\psi\rangle \implies \mathbf{B} (\mathbf{A} |\psi\rangle = a |\psi\rangle) \implies \mathbf{BA} |\psi\rangle = \mathbf{A} (\mathbf{B} |\psi\rangle) = a (\mathbf{B} |\psi\rangle)$$

Ahora bien, de esta situación se pueden distinguir un par de casos:

- si el autovalor  $a$  es no degenerado los autovectores asociados con este autovalor son, por definición, colineales con  $|\psi\rangle$ . Por lo tanto  $\mathbf{B} |\psi\rangle$ , será necesariamente colineal con  $|\psi\rangle$ . La conclusión a esta afirmación es que NECESARIAMENTE  $|\psi\rangle$  es autovector de  $\mathbf{B}$
- si el autovalor  $a$  es degenerado,  $\mathbf{B} |\psi\rangle \in S_a$ , es decir  $\mathbf{B} |\psi\rangle$  está en el autoespacio  $S_a$  con lo cual  $S_a$  es globalmente invariante bajo la acción de  $\mathbf{B}$ .

**Teorema** Si dos observables  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  conmutan,  $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = 0$ , y si  $|\psi_1\rangle$  y  $|\psi_2\rangle$  son autovectores de  $\mathbf{A}$  para autovalores distintos, entonces el elemento de matriz  $\langle \psi_1 | \mathbf{B} | \psi_2 \rangle = 0$

*Demostración* Si  $\mathbf{A} |\psi_1\rangle = a_1 |\psi_1\rangle$  y  $\mathbf{A} |\psi_2\rangle = a_2 |\psi_2\rangle$  entonces

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \psi_1 | [\mathbf{A}, \mathbf{B}] | \psi_2 \rangle = \langle \psi_1 | \mathbf{AB} - \mathbf{BA} | \psi_2 \rangle = (\langle \psi_1 | \mathbf{A}) \mathbf{B} | \psi_2 \rangle - \langle \psi_1 | \mathbf{B} (\mathbf{A} | \psi_2 \rangle) \\ &= a_1 \langle \psi_1 | \mathbf{B} | \psi_2 \rangle - a_2 \langle \psi_1 | \mathbf{B} | \psi_2 \rangle = (a_1 - a_2) \langle \psi_1 | \mathbf{B} | \psi_2 \rangle \implies \langle \psi_1 | \mathbf{B} | \psi_2 \rangle = 0 \end{aligned}$$

**Teorema** Si dos observables  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$ , operadores Hermíticos, conmutan,  $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = 0$ , los autovectores  $\{|\psi_i\rangle\}$  comunes a  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  constituyen una base ortonormal para  $V^n$ .

*Demostración* Denotemos los autovectores de  $\mathbf{A}$  como  $|\psi_{i(\mu)}\rangle$ , de tal modo

$$\mathbf{A} |\psi_{i(\mu)}\rangle = a_i |\psi_{i(\mu)}\rangle \quad \text{donde } i = 1, 2, \dots, n - k_n \quad \text{y } \mu = 1, 2, \dots, k_n$$

$k_n$  indica el orden de la degeneración de un determinado autovalor  $a_n$ . Dado que  $\mathbf{A}$  es un observable los  $|\psi_{i(\mu)}\rangle$  forman base los Claramente,

$$\langle \psi_{i(\mu)} | \psi_{j(\nu)} \rangle = \delta_j^i \delta_\nu^\mu$$

y dado que los elementos de matriz  $\langle \psi_{i(\mu)} | \mathbf{B} | \psi_{j(\nu)} \rangle = \delta_j^i$  esto quiere decir que los elementos  $\langle \psi_{i(\mu)} | \mathbf{B} | \psi_{j(\nu)} \rangle = B_j^{i(\mu)}(\nu)$  serán nulos para  $i \neq j$  pero no podemos decir nada *a priori* para el caso  $\mu \neq \nu$  y  $i = j$ . Entonces, al ordenar la base, en general

$$|\psi_{1(1)}\rangle, |\psi_{1(2)}\rangle, \dots, |\psi_{1(k_1)}\rangle, |\psi_{2(1)}\rangle, |\psi_{2(2)}\rangle, \dots, |\psi_{2(k_2)}\rangle, \dots, |\psi_{3(1)}\rangle, \dots, |\psi_{n-k_n(1)}\rangle$$

para el caso que consideraremos será

$$|\psi_{1(1)}\rangle, |\psi_{1(2)}\rangle, |\psi_{1(3)}\rangle, |\psi_{2(1)}\rangle, |\psi_{2(2)}\rangle, |\psi_{3(1)}\rangle, |\psi_{4(1)}\rangle, |\psi_{4(2)}\rangle, |\psi_{5(1)}\rangle$$

y la representación matricial de  $\mathbf{B}$  en esa base,  $\langle \psi_{i(\mu)} | \mathbf{B} | \psi_{j(\nu)} \rangle$ , tendrá la forma de una matriz diagonal a bloques

$$\begin{pmatrix} \boxed{B_1^{1(1)} & B_1^{1(2)} & B_1^{1(3)}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{B_1^{1(2)} & B_1^{1(2)} & B_1^{1(3)}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{B_1^{1(3)} & B_1^{1(2)} & B_1^{1(3)}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{B_2^{2(1)} & B_2^{2(1)}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{B_2^{2(2)} & B_2^{2(2)}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{B_3^{3(1)}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{B_4^{4(1)} & B_4^{4(1)}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{B_4^{4(2)} & B_4^{4(2)}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{B_5^{5(1)}} \end{pmatrix}$$

Tal y como hemos mencionado los subespacios:  $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ , y  $\mathcal{E}_4$  corresponden a los autovalores degenerados  $a_1, a_2$ , y  $a_4$  (de orden 3, 2 y 2 respectivamente).

Una vez más surgen dos casos a analizar

- Si  $a_n$  es un autovalor no degenerado, entonces existe un único autovector asociado a este autovalor (la dimensión del autoespacio es 1 esto es  $k_j = 1$  y no hace falta). Esto corresponde al ejemplo hipotético de arriba para los autovalores simples  $a_3$ , y  $a_5$

- Si  $a_n$  es un autovalor degenerado, entonces existe un conjunto de autovectores asociados a este autovalor  $a_n$  (en este caso la dimensión del autoespacio es  $k_n$ ). Como los  $|\psi_{j(\mu)}\rangle$  son autovectores de  $\mathbf{A}$  su representación matricial será diagonal a bloques. Ahora bien, como el autoespacio  $S_a$  es globalmente invariante bajo la acción de  $\mathbf{B}$  y  $B_j^{i(\mu)} = \langle \psi_{j(\mu)} | \mathbf{B} | \psi_{j(\mu)} \rangle$  es Hermítico, por ser  $\mathbf{B}$  Hermítico entonces  $\mathbf{B}$  es diagonalizable dentro del bloque que la define. Es decir, se podrá conseguir una base  $|\chi_{j(\mu)}\rangle$  tal que la representación matricial de  $\mathbf{B}$  en esa base es diagonal

$$B_j^{i(\mu)} = \langle \psi_{j(\mu)} | \mathbf{B} | \psi_{j(\mu)} \rangle \implies \langle \chi_{j(\mu)} | \mathbf{B} | \chi_{j(\mu)} \rangle = \tilde{B}_j^{i(\mu)} = b_{j(\mu)} \delta_j^i$$

que no es otra cosa que los vectores  $|\chi_{j(\mu)}\rangle$  serán autovectores de  $\mathbf{B}$

$$\mathbf{B} |\chi_{j(\mu)}\rangle = b_{j(\mu)} |\chi_{j(\mu)}\rangle$$

Es importante recalcar que los autovectores  $|\psi_{j(\mu)}\rangle$  de  $\mathbf{A}$  asociados con un autovalor degenerado NO son necesariamente autovectores de  $\mathbf{B}$ . Sólo que como  $\mathbf{B}$  es Hermítico puede ser diagonalizado dentro del autoespacio.

De ahora en adelante denotaremos los autovectores comunes a dos operadores  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  con distintos autovalores como  $|u_{n|m(\mu)}\rangle$  tal que

$$\mathbf{A} |u_{n|m(\mu)}\rangle = a_n |u_{n|m(\mu)}\rangle \quad \text{y} \quad \mathbf{B} |u_{n|m(\mu)}\rangle = b_m |u_{n|m(\mu)}\rangle$$

donde hemos dejado “espacio” para permitir la degeneración la cual será indicada por el índice  $\mu$   
La prueba del inverso del teorema anterior es bien simple

**Teorema** Si existe una base de autovectores  $\{|u_{j(\mu)}\rangle\}$  comunes a  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$ , entonces  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  conmutan,  $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = 0$

*Demostración* Es claro que

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} |u_{n|m(\mu)}\rangle &= b_m \mathbf{A} |u_{n|m(\mu)}\rangle = b_m a_n |u_{n|m(\mu)}\rangle \\ \mathbf{BA} |u_{n|m(\mu)}\rangle &= a_n \mathbf{B} |u_{n|m(\mu)}\rangle = a_n b_m |u_{n|m(\mu)}\rangle \end{aligned}$$

restando miembro a miembro obtenemos de manera inmediata

$$(\mathbf{AB} - \mathbf{BA}) |u_{n|m(\mu)}\rangle = [\mathbf{A}, \mathbf{B}] |u_{n|m(\mu)}\rangle = (b_m a_n - a_n b_m) |u_{n|m(\mu)}\rangle = 0$$

**Definición** Diremos que  $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D} \dots\}$  constituye un conjunto completo de observables que conmutan si

1. Obviamente los operadores del conjunto conmutan entre ellos:  
 $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = [\mathbf{A}, \mathbf{C}] = [\mathbf{A}, \mathbf{D}] = [\mathbf{B}, \mathbf{C}] = [\mathbf{B}, \mathbf{D}] = [\mathbf{C}, \mathbf{D}] = \dots = 0$

2. Al especificar el conjunto de autovalores para los operadores

$\{a_n, b_m, c_k, d_l, \dots\}$  se especifica **de manera unívoca** un único autovector común a todos estos operadores

$$\{a_n, b_m, c_k, d_l, \dots\} \implies |u_n|_m|k|_l \dots (\mu)\rangle$$

Analizamos el siguiente ejemplo. Considere, que el espacio de estados para un determinado sistema físico viene expandido por una base ortonormal  $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$ . Definimos dos operadores  $\mathbf{L}_z$  y  $\mathbf{S}$  de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_z |u_1\rangle &= |u_1\rangle; & \mathbf{L}_z |u_2\rangle &= 0; & \mathbf{L}_z |u_3\rangle &= -|u_3\rangle \\ \mathbf{S} |u_1\rangle &= |u_3\rangle; & \mathbf{S} |u_2\rangle &= |u_2\rangle; & \mathbf{S} |u_3\rangle &= |u_1\rangle \end{aligned}$$

En la base ortonormal  $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$  las representaciones matriciales para  $\mathbf{L}_z, \mathbf{L}_z^2, \mathbf{S}$  y  $\mathbf{S}^2$  serán las siguientes

$$\langle u^i | \mathbf{L}_z | u_j \rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \langle u^i | \mathbf{L}_z^2 | u_j \rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\langle u^i | \mathbf{S} | u_j \rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \langle u^i | \mathbf{S}^2 | u_j \rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es claro que estas matrices son reales y simétricas y, por lo tanto, son Hermíticas y al ser el espacio de dimensión finita deben ser diagonalizables y sus autovectores formarán base para ese espacio. Por lo tanto,  $\mathbf{L}_z, \mathbf{L}_z^2, \mathbf{S}$  y  $\mathbf{S}^2$  son observables.

¿Cuál será la forma más general de una representación matricial de un operador que conmute con  $\mathbf{L}_z$ ?

Notamos que los vectores de la base ortonormal  $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$  son autovectores para  $\mathbf{L}_z$  con autovalores  $\{1, 0, -1\}$  con lo cual su representación matricial tiene que ser diagonal. Recuerde que si dos observables  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  conmutan,  $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = 0$ , y si  $|\psi_1\rangle$  y  $|\psi_2\rangle$  son autovectores de  $\mathbf{A}$  para autovalores distintos, entonces el elemento de matriz  $\langle \psi_1 | \mathbf{B} | \psi_2 \rangle = 0$ , con lo cual

$$\langle u^i | \mathbf{M} | u_j \rangle = \begin{pmatrix} M_1^1 & 0 & 0 \\ 0 & M_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & M_3^3 \end{pmatrix},$$

Si nos planteamos la misma pregunta para  $\mathbf{L}_z^2$ , tenemos que conocer cuáles son sus autovalores y autovectores.

Consideremos otro ejemplo proveniente de la Mecánica Clásica. Se trata de dos osciladores armónicos, de igual masa, acoplados con resortes con la misma constante elástica  $k^4$ . La ecuaciones

<sup>4</sup>Pueden consultar una animación bien interesante y simular en [http://qbx6.ltu.edu/s\\_schneider/physlets/main/coupledosc.shtml](http://qbx6.ltu.edu/s_schneider/physlets/main/coupledosc.shtml)

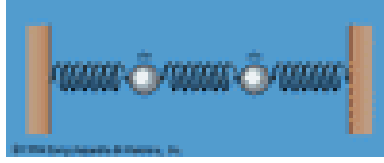


Figura 1: Osciladores armónicos acoplados

de movimiento para este sistema son

$$m\ddot{x}_1 + kx_1 - k(x_2 - x_1) = 0 \quad \text{y} \quad m\ddot{x}_2 + kx_2 + k(x_2 - x_1) = 0$$

con lo cual podremos expresar esta ecuación en forma de operadores

$$\mathbf{D}|\mathbf{x}\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} m\frac{d^2}{dt^2} + 2k & -k \\ -k & m\frac{d^2}{dt^2} + 2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = 0$$

Si pensamos esta ecuación como una ecuación de autovalores, el autovalor es claramene  $\lambda = 0$  y como las masas y las constantes elásticas son iguales podemos intercambiar las partículas y la física (las ecuaciones de movimiento) no cambian. Esto se puede expresar matemáticamente como el operador permutación de las partículas

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 \\ x^1 \end{pmatrix}$$

Es inmediato comprobar que  $[\mathbf{D}, \mathbf{P}] = 0$  con lo cual existirá una combinación lineal de autovectores de  $\mathbf{D}$  (asociados con el autovalor  $\lambda = 0$ ) los cuales también serán autovectores de  $\mathbf{P}$ . Para ello procedamos a calcular los autovalores y autovectores de  $\mathbf{P}$

$$\mathbf{P}|\mathbf{x}\rangle = \lambda|\mathbf{x}\rangle \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda \pm 1 \quad \Leftrightarrow \quad |\mathbf{u}_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad |\mathbf{u}_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

fácilmente podemos expresar el vector posición como una combinación lineal de estos dos autovectores de  $\mathbf{P}$ . Esto es

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \frac{\xi_1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{\xi_2}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \xi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2) \\ \xi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2) \end{cases}$$

Es claro que

$$|\mathbf{u}_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \text{y} \quad |\mathbf{u}_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

son autovectores de  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{D}$

## Referencias

- [1] Apostol, T. M. (1972) **Calculus** Vol 2 (*Reverté Madrid*) QA300 A66C3 1972
- [2] Arfken, G. B. y Weber, H. (2000) **Mathematical Methods for Physicists** 5ta Edición (Academic Press, Nueva York)
- [3] Cohen-Tannoudji, C., Diu B. y Laloë (1977) **Quantum Mechanics** Vol 1 (*John Wiley Interscience, Nueva York*)
- [4] Gelfand, I.M. (1961) **Lectures on Linear Algebra** (*John Wiley & Sons Interscience, Nueva York*).
- [5] Jordan, T.F. (1969) **Linear Operator for Quantum Mechanics** (*John Wiley & Sons Interscience, Nueva York*).
- [6] Schutz, B. (1980) **Geometrical Methods in Mathematical Physics** (*Cambridge University Press, Londres*)