

Métodos Matemáticos 2

Proyectos de Métodos Numéricos

L. A. Núñez*

*Centro de Física Fundamental,
Departamento de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad de Los Andes, Mérida 5101, Venezuela y
Centro Nacional de Cálculo Científico, Universidad de Los Andes,
(CECALCULA),
Corporación Parque Tecnológico de Mérida, Mérida 5101, Venezuela*

Versión β 1.0 Junio 2006

Índice

1. La Propuesta	1
2. Proyecto 1: Pateando las Bolas....	2
3. Proyecto 2: Las Bolas de Nudillos	4
4. Proyecto 3: Los Misiles y Cohetes	5
5. Proyecto 4: Dispersión bajo Fuerzas Centrales	6
6. Proyecto 5: Polítopos Relativistas	6

1. La Propuesta

La idea de esta propuesta es, por un lado, percibir las posibilidades de análisis y simulación de situaciones en Física que presentan herramientas como Maple, y por otro realizar

*e-mail: nunez@ula.ve

Web: <http://webdelprofesor.ula.ve/ciencias/nunez/>

experimentos numéricos que permitan comparar el alcance y las limitaciones de los métodos numéricos.

Cada uno de los proyectos abajo indicados, le es asignado a un estudiante dependiendo del último número de la cédula de su indentidad. Así, el proyecto 1 le corresponde a los estudiantes cuyos últimos números de cédula sean 1 ó 6; el 2 a quienes tengan 2 ó 7; el 3 para aquellos que tengan 3 ó 8; el 4 con 4 ó 5 y, finalmente el 5 para 5 ó 0.

Maple provee un comando `dsolve(odesys, numeric, vars, options)` para integrar numéricamente ecuaciones diferenciales. La intención es comparar tres métodos, dos con paso fijo (Euler y Runge Kutta cuarto orden) con pasos de integración $h = \frac{1}{10}$ y $h = \frac{1}{100}$, y otro (Runge Kutta Felsberg de 4/5 orden) con paso variable. Este último es el método por omisión que presenta Maple para resolver las ecuaciones numericamente con el comando `dsolve`. Los dos primeros pueden ser utilizados a través de la variante del comando `dsolve(odesys, numeric, method=classical)`, consulte la ayuda para los detalles de cada caso.

Para resolver numéricamente ecuaciones diferenciales es imperioso adimensionalizarlas. No es lo mismo integrar una variable entre 0 y 1 que entre 3 Km y 4 Km. Para algunos ejemplos de formas de adimensionalizar ecuaciones diferenciales y luego integrarlas numéricamente, pueden consultar <http://webdelprofesor.ula.ve/ciencias/nunez/cursos/maple/Simulaciones.html>

Como este trabajo se fundamenta experimentos numéricos, deber'a ser entregado formalmente en forma de una hoja de trabajo Maple y como un informe de laboratorio formal.

2. Proyecto 1: Pateando las Bolas....

En pleno mundial de fútbol Alemania 2006, no podíamos evitar plantear las pateadas al arco. Normalmente una buena patada impulsa una de esas pelotas de con una velocidad que oscila entre $25 - 30 \text{ m/s}$ y podemos incorporar un efecto de $8 - 10 \text{ vueltas/s}$. Típicamente, la masa de un balón de fútbol profesional está entre $410 - 450 \text{ g}$ ¹. Les incuyo también una muy reciente referencia en la cual se muestra que no siempre hay que lanzar con 45° para obtener un máximo alcance²

La figura 1 muestra un diagrama de las fuerzas que actúan sobre un balón de football. Las fuerzas que se indentifican son,

- el peso, $m\vec{g}$
- la fuerza de roce, \vec{f}_r la cual la caracterizaremos cuantitativamente con la siguiente

¹Pueden consultar <http://physicsweb.org/articles/world/11/6/8> para una descripción de hace algunos años

²Se puede consultar <http://physicsweb.org/dl/PWJUNE06linthorne.pdf>

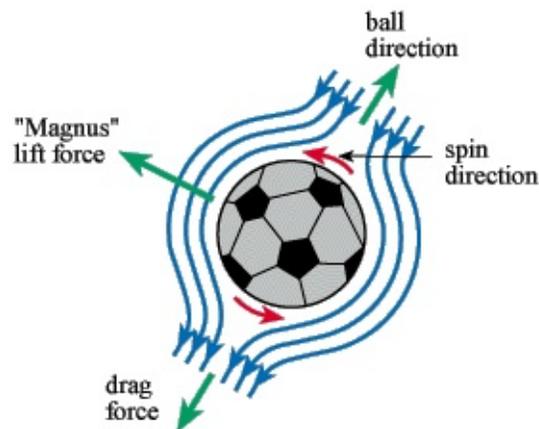


Figura 1: Fuerzas que actúan sobre una pelota de Fútbol. Tomado de http://www.soccerballworld.com/Spinning_Ball.htm

relación ³

$$\frac{\vec{f}_r}{m} = F(v) v \vec{v} \quad \text{donde } F(v) = 0,0039 + \frac{0,0058}{1 + \exp\left(\frac{v-v_f}{\Delta}\right)} \quad \text{con } v_f = 22 \text{ m/s} \quad \Delta = 5 \text{ m/s}$$

- la fuerza de Magnus⁴ Es la fuerza que se generará sobre un objeto que se desplaza en un fluido y rota sobre su eje. La rotación produce un cambio de presión y afecta la trayectoria del un objeto. Se caracteriza por como

$$f_m = S(v) \vec{\omega} \times \vec{v}$$

donde $\vec{\omega}$ es la velocidad angular de rotación y \vec{v} la velocidad de traslación del balón.

Las ecuaciones en componentes quedarán

$$\frac{dx(t)}{dt} = v_x; \quad \frac{dy(t)}{dt} = v_y; \quad \frac{dz(t)}{dt} = v_z$$

$$\frac{dv_x(t)}{dt} = -F(v) v v_x(t) + B\omega (v_z(t)\text{sen } \phi - v_y(t) \text{cos } \phi)$$

³Detalles en <http://farside.ph.utexas.edu/teaching/329/lectures/node43.html>

⁴En honor a Heinrich Magnus quien pro primera vez describió el fenómeno en 1853 sin embargo aparentemente Newton también lo caracterizó detalladamente 180 años antes. Para más detalles pueden consultar a http://en.wikipedia.org/wiki/Magnus_effect#note-0 y también <http://farside.ph.utexas.edu/teaching/329/lectures/node43.html>.

$$\frac{dv_y(t)}{dt} = -F(v) v v_y(t) + B\omega v_x(t) \cos \phi \quad \frac{dv_z(t)}{dt} = -g - F(v) v v_z(t) - B\omega v_x(t) \sin \phi$$

con las condiciones iniciales

$$x(0) = 0; \quad y(0) = 0; \quad z(0) = 0; \quad v_x(0) = v_0 \cos \theta; \quad v_y(0) = 0; \quad v_z(0) = v_0 \sin \theta$$

Encuentre las trayectorias de tiros libres fuera del área de *penal* para varios “efectos” de rotación. La intención es hacer un gol por la esquina superior del arco más cercana a sitio de tiro. Grafique las distintas trayectorias para cada una de las condiciones.

3. Proyecto 2: Las Bolas de Nudillos

El análisis anterior obviamente también es válido para el desplazamiento de pelotas de béisbol y es de hecho dónde se ha hecho el mayor de los esfuerzos por unir física y afición⁵. Una pelota de béisbol tiene cerca de 150 g de masa y un diámetro de 7,32 cm. El lanzamiento se realiza en una distancia de 18,44 m desarrollando velocidades entre 30 – 45 m/s. Existen una variedad de tipos de lanzamiento y son las costuras sobre la superficie de la pelota las que permiten generar efectos en el lanzamiento. Hay curvas, rectas y la azarosa bola de nudillos⁶ y es precisamente de ese lanzamiento que se tratará esta propuesta. Siguiendo el curso de Física Computacional de Richard Fitzpatrick⁷ notamos que este lanzamiento es lento y con muy baja (o ninguna) rotación. Por lo tanto no tendrá importancia la fuerza de Magnus y si una fuerza lateral que puede ser cuantificada como

$$\frac{f_y}{mg} = G(\phi) = 0,5 (\sin(4\phi) - 0,25\sin(8\phi) + 0,08\sin(12\phi) - 0,025\sin(16\phi))$$

con lo cual, para este caso, las ecuaciones en componentes quedarán

$$\frac{dx(t)}{dt} = v_x; \quad \frac{dy(t)}{dt} = v_y; \quad \frac{dz(t)}{dt} = v_z$$

$$\frac{dv_x(t)}{dt} = -F(v) v v_x(t); \quad \frac{dv_y(t)}{dt} = -F(v) v v_y(t) + G(\phi); \quad \frac{dv_z(t)}{dt} = -g - F(v) v v_z(t)$$

con las condiciones iniciales

$$x(0) = 0; \quad y(0) = 0; \quad z(0) = 0; \quad v_x(0) = v_0 \cos \theta; \quad v_y(0) = 0; \quad v_z(0) = v_0 \sin \theta$$

Encuentre la trayectoria de la bola de nudillos y gráfiquela. Compárela con los resultados del curso de Fitzpatrick.

⁵Pueden consultar **The physics of baseball**, de R.K. Adair (Harper & Row, New York NY, 1990). y el mismo curso de Física Computacional de Richard Fitzpatrick en <http://farside.ph.utexas.edu/teaching/329/lectures/node41.html>

⁶<http://en.wikipedia.org/wiki/Knuckleball>

⁷<http://farside.ph.utexas.edu/teaching/329/lectures/node45.html>

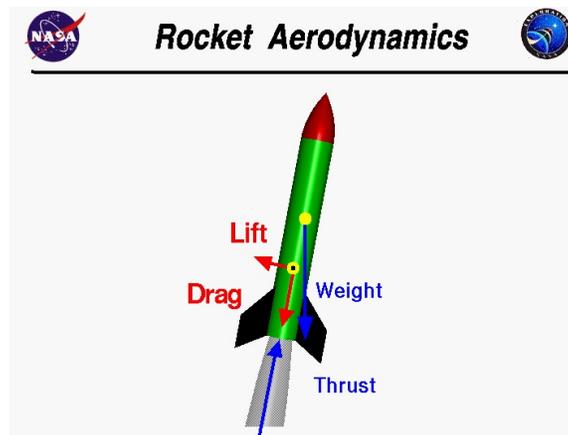


Figura 2: Fuerzas sobre un cohete. Tomado de <http://exploration.grc.nasa.gov/education/rocket/rktaero.html>

4. Proyecto 3: Los Misiles y Cohetes

Continuando con la idea de lanzamientos ahora analizaremos el movimiento de un cohete⁸

Tal y como se muestra en el diagrama de cuerpo libre en la figura 2, la ecuación para un movimiento vertical, tomando en cuenta una fricción lineal es

$$M(t) \frac{dv(t)}{dt} + u \frac{dM(t)}{dt} = -\eta v(t) - M(t)g$$

La función masa, $M(t)$ se puede expresar como

$$M(t) = \begin{cases} M_v + M_c \left(1 - \frac{t}{\tau}\right) & 0 \leq t \leq \tau \\ M_v & t > \tau \end{cases}$$

donde M_v es la masa del cohete sin combustible y M_c la masa del combustible. Suponiendo los siguiente parámetros

$$M(0) = 5000kg; \quad \tau = 10s; \quad -\frac{dM(t)}{dt} = 100kg/s; \quad u = 2000m/s.$$

Investigue los posibles valores de η , resuelva la ecuación, encontrando gráfica posición vs tiempo para determinar la altura alcanzada por el cohete a los 15s

⁸Puede consultarse <http://exploration.grc.nasa.gov/education/rocket/rktaero.html>

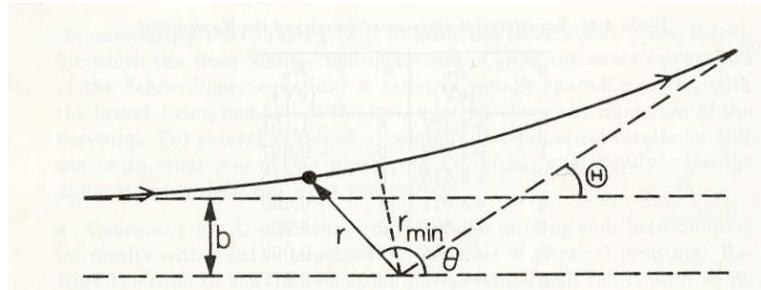


Figura 3: Dispersión bajo fuerzas Centrales

5. Proyecto 4: Dispersión bajo Fuerzas Centrales

La idea de este proyecto es estudiar el patrón de dispersión bajo potenciales de fuerzas centrales. Es tradicional en los cursos de Mecánica Clásica estudiar la dispersión bajo potenciales que generan fuerzas Centrales⁹. La ecuación diferencial que genera esta dispersión puede escribirse como

$$\frac{d\theta(r)}{dr} = \pm \frac{b}{r^2 \sqrt{1 - \frac{b^2}{r^2} - \frac{V(r)}{E}}} \quad E = \frac{1}{2}mv_0^2$$

donde, tal como se muestra en la figura 3, b es el parámetro de impacto, $\theta(r)$, el ángulo de dispersión y v_0 la velocidad inicial de la partícula. Queremos estudiar la dispersión por el potencial de Lennard-Jones¹⁰

$$V(r) = 4V_0 \left\{ \left(\frac{1}{r}\right)^{12} - \left(\frac{1}{r}\right)^6 \right\}$$

Encontrar las trayectorias $r = r(\theta)$ para partículas con energías $E = 0,1V_0, 0,5V_0, V_0, 2V_0, \dots, 10V_0$

6. Proyecto 5: Polítropos Relativistas

La ecuación de equilibrio hidrostático para un fluido pascaliano en una configuración material autogravitante puede escribirse como

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{(\rho(r) + P(r))(m(r) + 4\pi r^3 P(r))}{r(r - 2m(r))} \quad \text{con} \quad \frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r)$$

⁹Pueden consultar Herbert Goldstein, Charles P. Poole y John L. Safko, **Classical Mechanics** (3ra Edición) Addison Wesley (2002)

¹⁰http://en.wikipedia.org/wiki/Lennard-Jones_potential

Esta ecuación se conoce también como la ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkoff para materia ultradensa y configuraciones autogravitantes que cumplan con ella se suponen que pueden describir el equilibrio de estrellas de neutrones¹¹. Al igual que en el caso Newtoniano hay que proveer una ecuación de estado $P = P(\rho)$ para poder resolver el sistema de ecuaciones. Como conjunto de condiciones de borde (aquí funcionan como iniciales) se tienen que si $r = R$ es la frontera de la distribución, en ella se cumple que $P(R) = 0$ y que $m(R) = M$, además, para satisfacer una regularidad en el origen, se tiene que $m(0) = 0$

Supondremos en este caso que se cumple una ecuación de estado polítropa, $P(r) = \rho^\gamma$. Esta familia de ecuaciones de estado tiene la ventaja de describir distintos tipos de materia ultradensa variando el parámetro. Encuentre la distribución de presiones $P(r)$ y densidades $\rho(r)$ para los siguientes valores del parámetro $\gamma = \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}$.

¹¹vea http://en.wikipedia.org/wiki/Neutron_star