

Métodos Matemáticos 2
Tarea 1
Autovalores y Autovectores
Fecha de entrega 4 abril 2006

1. Dado el operador σ_z cuya acción viene definida por las siguientes ecuaciones

$$\sigma_z |+\rangle = |+\rangle \quad \text{y} \quad \sigma_z |-\rangle = -|-\rangle$$

y la representación matricial de otros dos operadores en la base ortonormal $\{|+\rangle, |-\rangle\}$:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{y} \quad \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) Encuentre la representación matricial para σ_z
 b) Encuentre los autovalores y autovectores para la Matrices de Pauli: σ_x, σ_y y σ_z .
 c) Compruebe las siguientes propiedades de las Matrices de Pauli

$$\det(\sigma_j) = -1 \quad \text{con } j = x, y, z.$$

$$\text{Tr}(\sigma_j) = 0 \quad \text{con } j = x, y, z.$$

$$\sigma_j \sigma_k = i \sum_m \epsilon_{jkm} \sigma_m + \delta_{jk} \mathbf{1} \quad \text{con } j, k, m = x, y, z$$

$$[\sigma_j, \sigma_k] = \sigma_j \sigma_k - \sigma_k \sigma_j = 2i \epsilon_{jkm} \sigma_m \quad \text{con } j, k, m = x, y, z.$$

$$[\sigma_j, \sigma_k]_+ = \sigma_j \sigma_k + \sigma_k \sigma_j = \sigma_j \sigma_k + \sigma_k \sigma_j = 0 \quad \text{con } j, k = x, y, z.$$

- d) Muestre que las Matrices de Pauli $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ y la matriz identidad forman base para el espacio de matrices 2×2 , de tal forma que una matriz genérica puede expresarse en esa base como

$$M = \begin{pmatrix} m_1^1 & m_2^1 \\ m_1^2 & m_2^2 \end{pmatrix} = a_0 \mathbf{1} + \vec{a} \cdot \vec{\sigma} \quad \text{con } \vec{\sigma} = \sigma_x \hat{i} + \sigma_y \hat{j} + \sigma_z \hat{k}$$

y $\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$ siendo a_0, a_x, a_y y a_z números complejos. Muestre además que

$$a_0 = \text{Tr}(M) \quad \text{y} \quad \vec{a} = \text{Tr}(M \vec{\sigma})$$

2. Sea \mathbf{H} un operador hermítico cuya representación matricial en la base $\{|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle\}$ es de la forma

$$H = \begin{pmatrix} h_1^1 & h_2^1 \\ h_1^2 & h_2^2 \end{pmatrix} \quad \text{con } h_1^2 = (h_2^1)^*$$

- a) Si descomponemos $\mathbf{H} = \frac{1}{2}(h_1^1 + h_2^2) \mathbf{1} + \frac{1}{2}(h_1^1 - h_2^2) \mathbf{K}$ encuentre la representación matricial del operador \mathbf{K} en la base $\{|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle\}$.

b) Si los autovectores de \mathbf{H} y \mathbf{K} $\{|\psi_+\rangle, |\psi_-\rangle\}$ son tales que

$$\mathbf{H}|\psi_\pm\rangle = E_\pm |\psi_\pm\rangle \quad y \quad \mathbf{K}|\psi_\pm\rangle = \kappa_\pm |\psi_\pm\rangle$$

Muestre que $E_\pm = \frac{1}{2}(h_1^1 + h_2^2) + \frac{1}{2}(h_1^1 - h_2^2)\kappa_\pm$

c) Si definimos

$$\tan \theta = \frac{2|h_1^2|}{h_1^1 - h_2^2} \quad y \quad h_1^2 = |h_1^2|e^{i\varphi} \quad \text{con } 0 \leq \theta < \pi \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

Encuentre la representación matricial de \mathbf{K} en término de θ y φ , encuentre, igualmente la expresión para los autovalores de \mathbf{K} , $\{\kappa_+, \kappa_-\}$.

d) Encuentre la base **ortonormal** de autovectores para \mathbf{K} y \mathbf{H} en término de θ y φ y expresada en la base $\{|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle\}$.

3. Dada matriz cuadrada \mathbf{M} , $n \times n$, y considerando la definición de su potencia n -ésima

$$(\mathbf{M})^n = \underbrace{\mathbf{M} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{M} \cdots \mathbf{M}}_{\dots n \dots}$$

Muestre que

a) La Transformación de similaridad que diagonaliza \mathbf{M} también diagonaliza $(\mathbf{M})^n$

b) Si λ_i son los autovalores de \mathbf{M} , $(\lambda_i)^n$ serán los autovalores de $(\mathbf{M})^n$

c) si

$$\mathbf{M} = \mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Encuentre los autovalores para

1) $\exp(\mathbf{M})$

2) \mathbf{A} Suponiendo que $(\mathbf{A}^n)^{\frac{1}{n}} = \mathbf{A}$

4. Dadas las siguientes matrices

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 0 \\ 1 & 9 & 0 \\ 2 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

encuentre

a) Los Autovalores y Autovectores comunes a ambas matrices

b) La matriz de similaridad que diagonaliza simultáneamente a ambas matrices.