Métodos Matemáticos 2,
Tarea 5
Series por Todos Lados.
Fecha de entrega 9 mayo 2006

1. Sea $\mathbb{A}$ un operador, cuya representaci'on matricial es $n \times n$, y donde todos los elementos de matriz puedan ser considerados pequeño, i.e. $a^i_j \ll 1$.
   a) Expanda en serie de potencias de $\mathbb{A}$ la siguiente expresi'on $(\mathbf{1}+\mathbb{A})^{-1}$
   b) Muestre que esa serie converge absolutamente para cada uno de los n^2 elementos de la matriz
   c) Muestre que si multiplicamos $(\mathbf{1}+\mathbb{A})$ por la expansi'on, esa serie converga a $\mathbf{1}$
   d) Considerando lo anterior y suponiendo una transformaci'on de coordenadas $\tilde{x}^\alpha = x^\alpha - \xi^\alpha(x)$, donde $|\xi^\alpha|$ y sus derivadas son pequeños, entonces, muestre que, si
   $$\tilde{v}^\alpha = \Lambda^{\tilde{\alpha}}_{\beta} v^\beta \equiv \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\beta} v^\beta \equiv v^\alpha + \frac{\partial \xi^{\tilde{\alpha}}}{\partial x^\beta} v^\beta \quad \text{entonces} \quad v^\alpha = \Lambda^{\alpha}_{\tilde{\beta}} \tilde{v}^\beta \equiv \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\beta} \tilde{v}^\beta = \tilde{v}^\alpha - \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \tilde{x}^\beta} \tilde{v}^\beta$$
2. En Relatividad General hay varias formas de relacionar la velocidad de recesión de las galaxias y su corrimiento al rojo, z. Vale decir
   a)
   $$v_1 = cz\left(1+\frac{1}{2}z\right)$$
   b)
   $$v_2 = cz\left(1+\frac{1}{2}z\right)(1+z)^{-2}$$
   c)
   $$1+z = \left[\frac{1+\frac{v_3}{c}}{1-\frac{v_3}{c}}\right]$$
3. Expanda en Series de Legendre $g(x) = x^8$
4. Dada la expansi'on en serie de potencias $f_n(x) = \sum_{i=0}^N a_i x^i$ encuentre la relaci'on entre los coeficientes de esta serie con una serie de Legendre $f_n(x) = \sum_{i=0}^N b_i P_i$
5. Use Maple para calcular los pesos y las abscisas para $N = 10$, es decir para una aproximaci'on de 10 puntos de Gauss-Legendre y con ellos evalue las integrales
   $$\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \; x^{2n} \qquad \text{para } n = 1, 2, 3, \cdots 20.$$
   y
   $$\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \; e^{-ax} \qquad \text{para } 1 \leq x \leq 50$$
   En cada caso determine el error cometido. Cambie la precisi'on de operaci'on de Maple (`Digits`) y el n'umero de puntos y compruebe como la precisi'on aumenta cuando n se acerca a n.

6. Considere la siguiente integral
$$I = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{d}t\,\frac{\mathrm{sen}t}{t}$$
    a) Calcule su valor por cuadratura de Gauss en t'ermino de Polinomios de Legendre con 12 cifras significativas
    b) Verifique su resultado por el siguiente m'etodo.
        - Expanda el integrando en series de potencias
        - Integre t'ermino a t'ermino
        - Evalue la serie hasta la precisi'on deseada
7. Considere la siguiente funci'on
$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x \leq 0 \\ x & -0 \leq x < \pi \end{cases}$$
    - Determine la expresi'on de su expansi'on en series de Fourier
    - Calcule el valor de $\frac{\pi^2}{8}$ con 12 cifras significativas
    - Integre la serie y confirme su valor
8. Expanda en series de Fourier la siguiente expresi'on
$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x \leq \pi \\ -x & -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$