Métodos Matemáticos de la Física 2
Examen Parcial
Serie de Series
Octubre 2006

Nombre______________________________________

1. **Encuentre la distancia total que recorre una pelota que rebota verticalmente y que en cada rebote pierde 2/3 de su energía cinética (3 ptos)**

Solución: Si se conservara la energía total de la pelota ser tendríamos

$$E_{p\,i} = E_{p\,i} \quad \Rightarrow mgh_i = \frac{1}{2}mv_i^2 \qquad D = h_0 + 2h_1 + 2h_2 + 2h_3 \cdots = h_0 + 2\sum_{i=1}^{\infty} h_i \qquad \text{donde } h_{i+1} = \frac{h_i}{3}$$

ya que pierde un tercio de su energía cinética por rebote. Nótese que hemos denotado por D la distancia total recorrida y por h_i la altura m'axima en cada rebote.

Entonces la distancia puede reescribirse como

$$D = h_0 + 2\frac{h_0}{3} + 2\frac{h_0}{3^2} + 2\frac{h_0}{3^3} \cdots = h_0\left(1 + 2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{3^i}\right) \quad \Rightarrow D_N = h_0\left(1 + 2\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{3^i}\right)$$

con D la distancia total recorrida y h_0 la altura (inicial) desde donde se lanza por primera vez. Entonces nos queda una progresión geométrica

$$D_N = h_0\left(1 + \left(1 - \frac{1}{3^N}\right)\right) \quad \underbrace{\longrightarrow}_{N\to\infty} \quad D = 2h_0$$

2. **Determine si la siguiente serie es o no convergente (3 ptos)**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

Solución: Es inmediato darse cuenta que

$$\sum_{n=1}^{N} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \equiv \sum_{n=1}^{N}\ln(n+1) - \sum_{n=1}^{N}\ln(n) = \ln(N+1) - \ln 1$$

Es deicir, que al desarrollar la serie se anulan los términos consecutivos, con lo cual nos quedan el primero y el último, y al $N \to \infty$ la serie diverge.

3. **Encuentre la serie compleja de Fourier para una función,** $y(x) = \cosh x$**, periódica con** $T = 2\pi$ **y definida en el rango** $-\pi \leq x \leq \pi$**. (4 ptos)**

Solución: Los coeficientes de la serie compleja de fourier para el conseno hiperbólico serán

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \Rightarrow c_n = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x\ \cosh x\, e^{inx} = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x\ \frac{1}{2}\left(e^{inx+x} + e^{inx-x}\right) \quad \Rightarrow$$

$$c_n = \frac{1}{4\pi}\frac{e^{(1-in)x}}{1-in}\bigg|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{4\pi}\frac{e^{(-1-in)x}}{-1-in}\bigg|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{(1+in)(-1)^n(2\sinh\pi)-(1-in)(-1)^n(-2\sinh\pi)}{1+n^2}\right)$$

con lo cual

$$c_n = \frac{(-1)^n\sinh\pi}{\pi(1+n^2)} \qquad \Rightarrow y(x) = \cosh x = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n\sinh\pi}{\pi(1+n^2)}e^{nx}$$

4. Una ecuación diferencial es una expresión en donde la incógnita es una función $y = y(x)$ y no un valor como en las ecuaciones algebráicas. Una forma de encontrar la solución a la ecuación diferencial es suponiendo que la solución puede ser expresada en forma de series de potencias $y = y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ y entonces encontrar los valores para los coeficientes $a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots$ de la serie. A veces, como en este caso, los coeficientes, $a_2, a_3, a_4, a_5, \cdots$ pueden quedar en función de los dos primeros a_0, a_1

   a) **Considere la siguiente ecuación diferencial homogénea**

   $$\frac{\mathrm{d}^2 y(x)}{\mathrm{d}x^2} + y(x) = 0 \quad \textbf{muestre que } a_{k+2} = \frac{-a_k}{(k+2)\,(k+1)}$$

   con lo cual

   $$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!}a_0 \quad \text{y} \quad a_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}a_1$$

   (4 ptos)

Solución: Sustituyendo $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ en la ecuación diferencial tendremos

$$\frac{\mathrm{d}^2\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)}{\mathrm{d}x^2}+\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2}+\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{m=0}^{\infty} a_{m+2}(m+2)(m+1)x^m+\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

con lo cual

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left(a_{m+2}(m+2)(m+1)+a_m\right)x^m = 0 \quad \Rightarrow a_{k+2} = \frac{-a_k}{(k+2)\,(k+1)}$$

   b) **Ahora, para la siguiente ecuación diferencial inhomogénea, considere la expansión** $y = y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$

   $$\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2} + y(t) = e^{-2t^2} \quad \textbf{encuentre los cuatro primeros coeficientes}$$

   de la serie que resuelve esta ecuación suponiendo que $a_0 = 1 \quad a_1 = 3$ **(3 ptos)**

Solución: Una vez más, sustituyendo $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ en la ecuación diferencial y expandiendo $e^{-2t^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n t^{2n}}{n!}$ tendremos

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_{n+2}(n+2)(n+1)+a_n\right)t^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n t^{2n}}{n!}$$

$$\text{Para } n=0 \Rightarrow 2a_2 + a_0 = 1 \Rightarrow a_2 = 0 \qquad \text{y para } n=1 \quad \Rightarrow 6a_3 + a_1 = 0 \quad \Rightarrow a_3 = \frac{1}{2}$$

c) **Para esa misma ecuación diferencial, utilice la transformada de Fourier y muestre que**

$$y(s) = -\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\frac{e^{-\left(\frac{s^2}{8}\right)}}{(s-1)(s+1)} \qquad \textbf{donde } y(s)$$

es la transformada de Fourier de la función de $y(t)$ **(3 ptos)**[1]

Solución: Transformado la ecuación tendremos que

$$\mathcal{F}\left[\frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2} + y(t)\right] = \mathcal{F}\left[e^{-at^2}\right] \quad \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t\,\left(\frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2}\right)e^{-isx} + y(s) = e^{\frac{-s^2}{8}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

integrando por partes el primer término del lado izquierdo nos queda

$$-s^2y(s) + y(s) = e^{\frac{-s^2}{8}}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \qquad \Rightarrow y(s) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{\frac{-s^2}{8}}}{1-s^2}$$

[1]Recuerde que $\mathcal{F}\left[e^{-at^2}\right] = e^{\frac{-s^2}{4a}}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$