Métodos Matemáticos de la Física 2
Examen Parcial
Variable Compleja
Noviembre 2006

Nombre____

1. **Evalue las siguientes funciones**

   a) $\sqrt{i\sqrt{3}-1}$

Solución: Una posible evaluación sería

$$\sqrt{i\sqrt{3}-1} \equiv \sqrt{\left(\sqrt{(-1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}\right)\exp\left(i\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{-1}\right)+2n\pi\right)} = \sqrt{2}\exp\left(\frac{i}{2}\left(\frac{2\pi}{3}+2n\pi\right)\right)$$

con lo cual

$$\sqrt{i\sqrt{3}-1} = \sqrt{2}\exp\left(\frac{i\pi}{3}\right) \equiv \sqrt{2}\exp\left(\frac{i4\pi}{3}\right)$$

   b) $\mathrm{Im}(2^{i+3}) \equiv \Im(2^{i+3})$

Solución: Una posible evaluación sería

$$\mathrm{Im}(2^{i+3}) = \mathrm{Im}(8(2^i)) = 8\mathrm{Im}(2^i) \equiv 8\exp\left(i\ln 2\right) = 8\,\mathrm{sen}\left(\ln 2\right) \approx 5{,}11$$

   c) $|e^{\sqrt{i}}|$

Solución: Una posible evaluación sería

$$|e^{\sqrt{i}}| = \left|\exp\left(\sqrt{\exp\left(\frac{i\pi}{2}\right)}\right)\right| = \left|\exp\left(\exp\left(\frac{i\pi}{4}+in\pi\right)\right)\right| = \left|\exp\left\{\cos\left(n+\frac{1}{4}\right)\pi + i\,\mathrm{sen}\left(n+\frac{1}{4}\right)\pi\right\}\right|$$

con lo cual

$$|e^{\sqrt{i}}| = \exp\left\{\cos\left(n+\frac{1}{4}\right)\pi\right\} = \exp\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \qquad \text{o también} \qquad |e^{\sqrt{i}}| = \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

(4 ptos)

2. **Dado el siguiente polinomio complejo** $P(z) = z^7 - 4z^6 + 6z^5 - 6z^4 + 6z^3 - 12z^2 + 8z + 4 = 0$

   a) **Muestre que**

$$P(z) = (z^3-2)(z^4-4z^3+6z^2-4z-2) \equiv (z^3-2)\left((z-1)^4-3\right)$$

Es decir, por algún método comprobamos que (z^3-2) es uno de los factores del polinomio. Factorizamos $P(z)$ y nos damos cuenta que el segundo factor es "casi" $(z-1)^4$ y lo corregimos para que nos dé.

Solución: Trivialmente podemos dividir un polinomio entre otro. Esto es

$$z^7 - 4z^6 + 6z^5 - 6z^4 + 6z^3 - 12z^2 + 8z + 4 = (z^3 - 2)(az^4 + bz^3 + cz^2 + dz - e)$$

y el sistema de ecuaciones para los coeficientes queda como

$$\left.\begin{array}{rr} a = & 1 \\ b = & -4 \\ c = & 6 \\ d - 2a = & -6 \\ e - 2b = & 6 \end{array}\right\} \Rightarrow P(z) = (z^3 - 2)(z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 4z - 2)$$

Más ingenioso hubiera sido si factorizamos (donde se pueda) z^3, vale decir

$$P(z) = z^7 - 4z^6 + 6z^5 - 6z^4 + 6z^3 - 12z^2 + 8z + 4 = \left(z^3\right)^2 z - 4\left(z^3\right)^2 - 6\left(z^3\right) z + 6\left(z^3\right) - 12z^2 + 8z + 4$$

para luego sustituir $z^3 = 2$ en la expresión

$$P(z) = (2)^2 z - 4(2)^2 - 6(2)z + 6(2) - 12z^2 + 8z + 4 = 4z - 16 - 12z + 12 - 12z^2 + 8z + 4 = 0$$

que se satisface idénticamente, con lo cual queda demostrado que $(z^3 - 2)$ es un factor del polinomio $P(z)$. Finalmente es inmediato darse cuenta que

$$(z-1)^4 = z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 4z + 1 \qquad \Rightarrow P(z) = (z^3 - 2)\left((z-1)^4 - 3\right)$$

b) **A partir de las afirmaciones anteriores, encuentre las raíces del polinomio** $P(z)$

Solución: A partir de esa ingeniosa forma del “casi” binomio es fácil descubrir las raíces, entonces $P(z) = 0$ nos lleva a

$$z^3 - 2 = 0 \Rightarrow z = \sqrt[3]{2}\exp\left(\frac{2ni\pi}{3}\right) \text{ para } n = 0,1,2 \text{ mientras que } (z-1)^4 - 3 = 0 \Rightarrow z = \sqrt[4]{3}\exp\left(\frac{2ni\pi}{4}\right) + 1$$

para $n = 0, 1, 2, 3$.

(6 ptos)

3. **Considere la tranformación conforme** $w = e^z$. **Muestre que una región rectangular** $a \le x \le b; \quad 0 \le y \le \pi$ **aplica a un semi anillo circular en el plano** $v \ge 0$ (4 ptos)

Solución: Tenemos que

$$w = |w|e^{i\theta} = e^{(x+iy)} \equiv e^x e^{iy} \Rightarrow \left\{\begin{array}{rl} |w| = & e^x \\ & \\ \theta = & y \end{array}\right.$$

claramente, en la forma polar $w = re^{i\theta}$ el radio toma los valores $e^a \le r \le e^a$ y el semianillo se completa con la variación del ángulo $0 \le \theta \le \pi$

4. **Determine el dominio de analiticidad de las funciones**

   a) $f(z) = \dfrac{z^2}{z-3}$

Solución: La función será analítica para $z \neq 3$ y

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z\ \frac{z^2}{z-3} = 0 \text{ ya que para dentro del círculo } 0 \leq |z| \leq 1 \text{ la función es analítica}$$

b) $f(z) = z e^z$

Solución: La función será analítica para $\forall\ z$ con lo cual $\oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z\ z e^z = 0$

y calcule $\oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z\ f(z)$ para $\mathcal{C}$ el contorno de un círculo $|z| = 1$ (4 ptos)

5. Pruebe que

$$\int_0^\infty \mathrm{d}x\ \frac{\cos mx}{4x^4 + 5x^2 + 1} = \frac{\pi}{6}\left(4e^{-m/2} - e^{-m}\right) \quad \text{con} \quad m > 0$$

Ayuda: Considere $x^2 + 1$ como uno de los posibles factores del denominador del integrando. (6 ptos)

Solución: Podemos reexpresar el integrando como una función compleja

$$\frac{\cos mx}{4x^4 + 5x^2 + 1} \equiv \mathrm{Re}\, \frac{e^{imz}}{(z^2+1)(4z^2+1)} = \mathrm{Re}\, \frac{e^{imz}}{(z+i)(z-i)(2z+i)(2z-i)}$$

e integrar en una semicircunsferencia que incluya el eje x dentro del contorno de integración. Con lo cual encontramos dos polos dentro de ese circuito $z = i$ y $z = \frac{i}{2}$. Entonces el teorema del Residuo nos dice que si $f(z)$ es analítica en una región $\mathcal{R}$ excepto en un número, m, finito de polos $z_{0_1}, z_{0_2}, z_{0_3}, \cdots z_{0_m}$ entonces

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}z\ f(z) = 2i\pi \sum_{j=1}^{m} \mathrm{Res}\ f(z)_{z=z_{0j}}$$

y los residuos correspondientes a esos polos son

$$\mathrm{Res}\ \ f(z)|_{z=z_0} = \lim_{z\to z_0} \left(\frac{(z-z_0)p(z)}{q(z)}\right)$$

es decir que los residuos serán

$$\mathrm{Res}\ \ f(z)|_{z=i} = \frac{e^{-m}}{2i\ 3i\ i} = \frac{ie^{-m}}{6} \qquad\qquad \mathrm{Res}\ \ f(z)|_{z=\frac{i}{2}} = \frac{e^{-\frac{m}{2}}}{\frac{3i}{2}\left(-\frac{i}{2}\right)2i} = \frac{-2ie^{-\frac{m}{2}}}{3}$$

con lo cual

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ \frac{e^{imx}}{4x^4 + 5x^2 + 1} + 0 = 2i\pi\left(\frac{ie^{-m}}{6} - \frac{2ie^{-\frac{m}{2}}}{3}\right)$$

Es claro que el segundo término no contribuye por cuanto $|f(z)| \sim |z|^{-4}$ y $|f(z)| \to 0$ cuando $z \to \infty$. Adicionalmente como el integrando es par, el valor de la integral entre $-\infty, \infty$ será el doble que entre $0, \infty$