Métodos Matemáticos de la Física 2
Examen Parcial
Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden
Enero 2007

Nombre____

1. **En cada uno de los casos que ser presentan abajo, resuelva la ecuación diferencial propuesta:**

   a) $y'(x) - y(x)^2 + y(x)\mathrm{sen}(x) - \cos(x) = 0$ (3 ptos)

Solución: Es una ecuación de Riccati, de la forma $y'(x) = P(x) + Q(x)y(x) + R(x)y^2(x)$ con una solución particular $y_p(x) = \mathrm{sen}(x)$ con lo cual hacemos el siguiente cambio de variable

$$y(x) = y_p(x) + \frac{1}{v(x)} \quad \Rightarrow v'(x) + \mathrm{sen}(x)v(x) + 1 = 0 \quad \Rightarrow v(x) = e^{\cos(x)}\left(C - \int \mathrm{d}x\, e^{-\cos(x)}\right)$$

para que finalmente

$$y(x) = \mathrm{sen}(x) + \frac{1}{e^{\cos(x)}\left(C - \int \mathrm{d}x\, e^{-\cos(x)}\right)}$$

   b) $(y')^2 - \frac{y}{x}y' + \frac{A}{x} = 0$ con A constante y positiva. (3 ptos)

Solución: La resolvemos en forma paramétrica. Esto es

$$y' = p \quad \Rightarrow p^2 - \frac{y}{x}p + \frac{A}{x} = 0 \quad \Rightarrow y = xp + \frac{A}{p} \quad \Rightarrow p = p + xp' - \frac{Ap'}{p^2} \equiv \left(x - \frac{A}{p^2}\right)p' = 0$$

con lo cual

$$p = \sqrt{\frac{A}{x}} \quad \Rightarrow y = x\sqrt{\frac{A}{x}} + \frac{A}{\sqrt{\frac{A}{x}}} = 2\sqrt{Ax}$$

   c) $y' + \frac{xy}{a^2+x^2} = x$ (3 ptos)

Solución: Será una ecuación diferencial exacta con un factor integrador

$$\mu(x) = \sqrt{a + x^2} \quad \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sqrt{a + x^2}\, y\right) = x\sqrt{a^2 + x^2} \quad \Rightarrow \sqrt{a^2 + x^2}y = \frac{1}{3}\left(\sqrt{a^2 + x^2}\right)^3 + C$$

con lo cual

$$y = \frac{a^2 + x^2}{3} + \frac{C}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

d) $y' + \frac{x+y}{3x+3y-4} = 0$ (3 ptos)

Solución: Es inmediato un cambio de variables

$$v = x + y \quad \Rightarrow v' - 1 + \frac{v}{3v-4} \quad \Rightarrow v' = \frac{2v-4}{3v-4} \quad \Rightarrow v = \frac{2v}{3} - \frac{4}{9}\ln(3v-4) + C$$

finalmente, devolviendo el cambio, queda como

$$x + y = \frac{2(x+y)}{3} - \frac{4}{9}\ln(3(x+y)-4) + C$$

2. Resuelva

$$y' + 2y = g(x) \qquad \text{para } y(0) = 0 \qquad \text{con} \qquad g(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

(4 ptos.)

Solución: Analicemos cada uno de los casos del dominio $0 \leq x < \infty$

- **Para** $0 \leq x \leq 1$
  En este cado la ecuación diferencial será una ecuación lineal homogénea de primer orden
  $$y' + 2y = x \quad \Rightarrow y_1(x) = \frac{1}{4}\left(e^{-2x} - 1\right) + \frac{1}{2}x$$
- **Para** $x > 1$
  la ecuación es homogénea
  $$y' + 2y = 0 \Rightarrow y_2(x) = Ce^{-2x} \Rightarrow y_1(1) = y_2(1) \Rightarrow C = \frac{1}{4}\left(1 - 2e^2\right) \Rightarrow y_2(x) = \frac{1}{4}\left(1 - 2e^2\right)e^{-2x}$$

con lo cual la solución general será

$$y = \begin{cases} \frac{1}{4}\left(e^{-2x} - 1\right) + \frac{1}{2}x & \text{para } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{4}\left(1 - 2e^2\right)e^{-2x} & \text{para } x > 1 \end{cases}$$

3. Una enfermedad se esparce por portadores asintomáticos (individuos infestados pero que no tienen síntomas de la enfermedad). Denotemos para un tiempo t, la densidad de portadores por $x(t)$, y por $y(t)$ la densidad de individuos sanos susceptibles de contagiarse. Suponga, que la población de portadores disminuye como

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = -\beta x(t)$$

y que se conoce la cantidad de portadores en un tiempo inicial: $x(0) = x_0$ la enfermedad se esparce siguiendo la ley

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = -\alpha\; x(t)\; y(t)$$

a) Determine la expresión para la función que describe la densidad de individuos contagiables en función del tiempo, suponiendo que conoce la densidad de individuos sanos: $y(0) = y_0$. (3 ptos.)

Solución: Claramente, la densidad de portadores será

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = -\beta x(t) \quad \Rightarrow x(t) = x_0\; e^{-\beta\, t}$$

con lo cual la densidad de individuos contagiables

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = -\alpha\; x_0\; e^{-\beta\, t} y(t) \quad \Rightarrow y(t) = y_0 \frac{\exp\left(\frac{\alpha}{\beta} x_0 \exp(-\beta\, t)\right)}{\exp\left(\frac{\alpha}{\beta} x_0\right)}$$

b) Determine la expresión para el conjunto de individuos que escapan de la enfermedad, vale decir, determine el $\lim_{t\to\infty} y(t)$ Discuta los efectos de los cambios de los parámetros α y β. (2 ptos.)

Solución: Entonces

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = y_0 \exp\left(-\frac{\alpha}{\beta} x_0\right)$$