Métodos Matemáticos 2,
Tarea 1
Series por Todos Lados.
Fecha de Entrega 27 Septiembre 2006

Información general: Corresponde al contenido de los puntos cubiertos en

- *1. Series por todos lados* y
- *2. Series de potencias*

. La idea de las tareas es, por un lado, marcar un ritmo de avance y, por el otro servir de autoevaluación de la lectura del material escrito, tanto del formulario como de la bibliografía sugerida. Las clases serán de discusión sobre los textos impresos. Por lo tanto... entrenguen las tareas a tiempo. No habrá prórroga.

1. A cuánto asciende la suma de los número pares desde 1000 hasta el 2000

2. Encuentre las expresión para las sumas parciales S_N de los primeros N términos para las siguientes series
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-2)^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{3^n}$$
En cada caso determine si la serie es convergente, divergente u oscilatoria.

3. Pruebe que
$$\cos\theta+\cos(\theta+\alpha)+\cdots+\cos(\theta+n\alpha)=\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(n+1)\alpha}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}\alpha}\cos\left(\theta+\frac{1}{2}n\alpha\right)$$

4. Determine el entorno de valores de $x\in\mathbb{R}$ para el cual convergen las siguientes series.
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}(\operatorname{sen}x)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty}n^x \quad \sum_{n=1}^{\infty}e^{nx}, \quad \sum_{n=2}^{\infty}(\ln n)^x.$$

5. Un interferómetro de Fabry-Pérot [1] consiste en dos placas paralelas (semi) reflectoras. El rayo de luz entra y se refleja entre las placas y, para cada reflexión existe una trasmisión parcial de al señal que emerge del interferómetro. Encuentre la intensidad $|B|^2$ de la onda emergente si su amplitud puede ser escrita como
$$B=A(1-r)\sum_{n=0}^{\infty}r^n e^{in\phi} \quad \text{con } r \text{ y } \phi \text{ cantidades reales}$$

6. Evalue
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^3}\left(\operatorname{cosec}x-\frac{1}{x}-\frac{x}{6}\right)\right)$$

7. Utilizando la expansión de Taylor hasta orden 5 encuentre el valor aproximado para $(17)^{1/4}$ y $(26)^{1/5}$

[1] ver en http://en.wikipedia.org/wiki/Fabry-Perot_interferometer

8. El desplazamiento en el eje x, de una partícula de masa en reposo m_0 sometida a una fuerza gravitacional constante $m_0 g$ puede expresarse como

$$x = \frac{c^2}{g}\left[\sqrt{1+\left(g\frac{t}{c}\right)^2} - 1\right] \quad \text{donde se incluyen efectos relativistas}$$

Encuentre el desplazamiento expresado como una serie de potencias en t y compárela con la expresión clasica $x = \frac{1}{2}gt^2$

9. En la teoría cuántica, un sistema de osciladores, cada uno con una frecuencia fundamental ν tiene una energía promedio

$$\bar{E} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n\nu h e^{-nx}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}}$$

donde $x = \frac{h\nu}{kT}$ siendo h la constante de Planck y k la de Boltzmann. Pruebe que

- ambas series convergen.
- si $T \gg 1 \Rightarrow \bar{E} \approx kT$
- si $T \ll 1 \quad \Rightarrow \bar{E} \approx h\nu e^{-x}$

10. En análisis numérico se convierten las derivadas en sumas de diferencias (se conoce como métodos de diferencias finitas) Deduzca el error que se comete al aproximar

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\psi(x) \approx \frac{1}{h^2}\left(\psi(x+h) - 2\psi(x) + \psi(x-h)\right)$$