Métodos Matemáticos 2,
Tarea 2
Series por Todos Lados.
Fecha de entrega 6 octubre 2006

1. Sea $\mathbb{A}$ un operador, cuya representación matricial es $n \times n$, y donde todos los elementos de matriz puedan ser considerados pequeño, i.e. $a^i_j \ll 1$.

   a) Expanda en serie de potencias de $\mathbb{A}$ la siguiente expresión $(\mathbf{1} + \mathbb{A})^{-1}$

   b) Muestre que esa serie converge absolutamente para cada uno de los n^2 elementos de la matriz

   c) Muestre que si multiplicamos $(\mathbf{1} + \mathbb{A})$ por la expansión, esa serie converga a $\mathbf{1}$

   d) Considerando lo anterior y suponiendo una transformación de coordenadas $\tilde{x}^\alpha = x^\alpha - \xi^\alpha(x)$, donde $|\xi^\alpha|$ y sus derivadas son pequeños, entonces, muestre que, si

$$\tilde{v}^\alpha = \Lambda^{\tilde{\alpha}}_{\beta} v^\beta \equiv \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\beta} v^\beta \equiv v^\alpha + \frac{\partial \xi^{\tilde{\alpha}}}{\partial x^\beta} v^\beta \quad \text{entonces} \quad v^\alpha = \Lambda^{\alpha}_{\tilde{\beta}} \tilde{v}^\beta \equiv \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\beta} \tilde{v}^\beta = \tilde{v}^\alpha - \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \tilde{x}^\beta} \tilde{v}^\beta$$

2. Dada la expansión en serie de potencias $f_n(x) = \sum_{i=0}^N a_i x^i$ encuentre la relación entre los coeficientes de esta serie con una serie de Legendre $f_n(x) = \sum_{i=0}^N b_i P_i$

3. Los Polinomios Asociados de Laguerre, vienen definidos por

$$L_n^m(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{(n+m)!}{k!(n-k)!(k+m)!} x^k \quad \Leftrightarrow \quad L_n^m(x) = (-1)^m \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m} L_{n+m}(x)$$

   siendo los $L_k(x)$ los polinomios de Laguerre de siempre

   a) A partir de la primera de las definiciones anteriores compruebe la fórmula de Rodrigues para los Polinomios asociados de Laguerre

$$L_n^m(x) = \frac{e^x x^{-m}}{n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \left(x^{m+n} e^{-x} \right)$$

   b) A partir de la segunda defineción pruebe las siguientes relaciones de recurrencia

   - $$(n+1) L_{n+1}^m(x) = (2n + m + 1 - x) L_n^m(x) - (n+m) L_{n-1}^m(x)$$
   - $$x \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} L_n^m(x) = n L_n^m(x) - (n+m) L_{n-1}^m(x)$$

4. Use Maple para calcular los pesos y las abscisas para $N = 10$, es decir para una aproximación de 10 puntos de Gauss-Legendre y con ellos evalue las integrales

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \; x^{2n} \qquad \text{para } n = 1, 2, 3, \cdots 20.$$

   y

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \; e^{-ax} \qquad \text{para } 1 \le x \le 50$$

   En cada caso determine el error cometido. Cambie la precisión de operación de Maple (`Digits`) y el número de puntos y compruebe como la precisión aumenta cuando n se acerca a n.

5. Considere la siguiente integral
$$I = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \mathrm{d}t \, \frac{\mathrm{sen} t}{t}$$
   a) Calcule su valor por cuadratura de Gauss en término de Polinomios de Legendre con 12 cifras significativas
   b) Verifique su resultado por el siguiente método.
      - Expanda el integrando en series de potencias
      - Integre término a término
      - Evalue la serie hasta la precisión deseada
6. Considere la siguiente función
$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x \leq 0 \\ x & -0 \leq x < \pi \end{cases}$$
   - Determine la expresión de su expansión en series de Fourier
   - Calcule el valor de $\dfrac{\pi^2}{8}$ con 12 cifras significativas
   - Integre la serie y confirme su valor