Métodos Matemáticos 2,
Tarea 3
Series y Tranformadas de Fourier.
Fecha de entrega 23 octubre 2006

1. Considere la siguiente función
$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x \leq 0 \\ x & -0 \leq x < \pi \end{cases}$$
   - Determine la expresión de su expansión en series de Fourier
   - Calcule el valor de $\dfrac{\pi^2}{8}$ con 12 cifras significativas
   - Integre la serie y confirme su valor

2. Encuentre la serie compleja de Fourier para una función, $y(x) = \cosh x$, periódica con $T = 2\pi$ y definida en el rango $-\pi \leq x \leq \pi$. Luego al evaluar $x = 0$ pruebe que
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\sinh x} - 1\right)$$

3. Muestre la propiedad de traslación: $\mathcal{F}[f(t+a)] = e^{ia\omega} f(\omega)$ para las transformadas de Fourier

4. Encuentre la transformada de Fourier para la función $f(t) = \exp(-|t|)$ para luego
   a) mostrar que
$$\frac{\pi}{2}\exp(-|t|) = \int_0^{\infty} \mathrm{d}\omega \, \frac{\cos \omega t}{1+\omega^2}$$
   b) Muestre que para esta función y su transformada (y para todas) se cumple la igualdad de Parseval
$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t \, |f(t)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega \, |f(\omega)|^2$$

5. Dados $N = 2, T = 2\pi$ y $f(t_k) = \mathrm{sen}\, t_k$ encuentre
   a) $F(\omega_m)$, para $m = 0, 1, 2, 3$
   b) reconstruya $f(t_k)$ a partir de $F(\omega_m)$ y muestre la replicación para ω_1 y ω_3
   c) Aumente el número de puntos $N = 4$, repita los dos puntos anteriores y estudie los cambios en la replicación.