Métodos Matemáticos 2,
Tarea 7 Ecuaciones Diferenciales 2do Orden.
Fecha de entrega 12 Enero 2007

1. Encuentre las soluciones generales para las siguientes ecuaciones diferenciales

   a)
   $$\frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3} - 12\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 16y = 32x - 8$$

   b) Para $a = const$
   $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) + 2a\coth 2ax\left(\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = 2a^2$$

   c) Para $y(0) = 1$ y $y'(0) = 0$
   $$(1-x)^2\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x} + 3(1-x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y = x^2$$

2. Dos funciones $x(t)$ y $y(t)$ satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales
   $$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - 2y = -\operatorname{sen} t \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + 2x = 5\cos t$$

   a) Encuentre la forma explícita de las funciones $x(t)$ y $y(t)$ para $x(0) = 3$ y $y(0) = 3$

   b) Grafique las trayectorias soluciones para $0 \leq t \leq 2\pi$ y justifique los puntos de cortes de las funciones.

3. Considere
   $$f''(x) + 2f'(x) + f(x) = 4e^{-x}$$

   a) Para $f(0) = 0$ y $f'(0) = \lambda$ encuentre la solución general para esta ecuación. Grafique la solución para $x > 0$ y
   $\lambda = -1, -0{,}5, 0, 0{,}5, 1$ ¿ qué puede concluir del efecto de la variación de λ ?

   b) si la solución toma los siguientes valores $f(0) = 1$, y $f(1) = \frac{1}{e}$ ¿ qué valor tomará $f(2)$?

4. Podemos intentar resolver cualquier ecuación diferencial
   $$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + a_1(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + a_2(x)y = g(x)$$

   se puede intentar resolver suponiendo que $y(x) = u(x)v(x)$, con $u(x)$ y $v(x)$ dos funciones arbitrarias. Luego se impone alguna condición sobre una de las funciones (digamos $u(x)$) y se intenta determinar $v(x)$ de la ecuación diferencial que resulta.

   a) Muestre que al hacer la sustitución $y(x) = u(x)v(x)$ se pueden obtener las siguientes ecuaciones diferenciales
   $$\frac{2}{u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + a_1(x) \qquad \text{y} \qquad \frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2} + g(x)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = h(x)$$
   determine las expresiones para $g(x)$ y $h(x)$,

   b) Con ese método resuelva
   $$4x^2\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + 4x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + (x^2 - 1)y = 0$$

5. Una ecuación diferencial de segundo orden

$$f_2(x)\ y'' + \ f_1(x)\ y' + f_0(x)\ y = Q(x)$$

se dice exacta si su lado izquierdo puede ser escrito como un diferencial exacto de una ecuación de primer orden, i.e.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(M(x)\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + N(x)y\right) = Q(x)$$

La condición necesaria y suficiente para que una ecuación diferencial sea exacta es

$$\frac{\mathrm{d}^2 f_2}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}\ f_1}{\mathrm{d}x} + f_0 = 0$$

y en este caso, se cumple que

$$M(x) = f_2(x); \qquad N(x) = f_1(x) - \frac{\mathrm{d}\ f_2}{\mathrm{d}x}$$

Utilice esta técnica para integrar la siguiente ecuación diferencial

$$(x^2 - 2x)\ y'' + 4(x-1)\ y' + 2y = e^{2x}$$

6. Otra técnica heredada de las ecuaciones diferenciales de primer orden es intentar encontrar un factor integrador. En este caso la ecuación diferencial es integrable si

$$\frac{\mathrm{d}^2(f_2 h)}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}\ (f_1 h)}{\mathrm{d}x} + (f_0 h) = 0$$

Utilice esta técnica para integrar la siguiente ecuación diferencial

$$x^3\ y'' - (2x^3 - 6x^2)\ y' - 3(x^3 + 2x^2 - 2x)y = 0$$

7. Dada la ecuación diferencial

$$(x-2)\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + 3\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 4\frac{y}{x^2} = \cos 3x$$

y considerando que una solución de la ecuación homogenea puede escribirse como

$$y_{ih}(x) = \frac{cx^2}{(x-2)^2}$$

   a) Encuentre la forma general para la solución de la ecuación homogénea
   b) Encuentre la solución para la ecuación inhomogénea

8. Un sismógrafo puede esquematizarse como una masa m que se encuentra en reposo colgando de un resorte de constante elástica k. Transcurrido un cierto tiempo actúa una fuerza externa. Mediante la utilización de la transformada de Laplace,

   a) Considere

$$F\left(t\right) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < \pi \\ F_0 \operatorname{sen}\left(\varpi t\right) & \pi \leq t < 6\pi \\ 0 & t \geq 6\pi \end{cases}$$

1) Encuentre la expresión para la evolución del sistema para $0 \leq t < 8\pi$
2) Si $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \varpi$ encuentre la expresión general para la evolución del sistema.

b) Considere ahora

$$F(t) = \begin{cases} F_0 t & 0 \leq t < \pi \\ F_0 (2\pi - t) & \pi \leq t < 2\pi \\ 0 & t \geq 2\pi \end{cases}$$

Encuentre la expresión para la evolución del sistema para $0 \leq t < 4\pi$

c) Suponga ahora que $F(t) = \delta(t - \pi)$

d) Suponga ahora que para ambos casos actúa una fuerza de fricción

$$F_r = -\eta V(t) = -\eta \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}$$

donde $y(t)$ corresponde al desplazamiento a partir de la posición de equilibrio del sistema. Encuentre entonces la expresión para la evolución del sistema, en todos los casos anteriormente considerados, tanto dentro del régimen transitorio como en el régimen estacionario.

9. Las integrales elípticas se clasifican en: ***Completas*** *de Primera Especie*

$$K(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\beta}{\sqrt{1 - m \operatorname{sen}^2 \beta}} \equiv \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1-t^2)(1-mt^2)}} \equiv \frac{\pi}{2}\left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2 m^n\right\} \quad \text{con } 0 \leq m \leq 1$$

y ***Completas*** *de Segunda Especie*

$$E(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - m \operatorname{sen}^2 \beta}\,\mathrm{d}\beta \equiv \int_0^1 \sqrt{\frac{(1-mt^2)}{(1-t^2)}}\,\mathrm{d}t \equiv \frac{\pi}{2}\left\{1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2 \frac{m^n}{2n-1}\right\} \quad \text{con } 0 \leq m \leq 1$$

Muestre que

a)

$$E(k^2) = (1-k^2)\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta\ (1 - k \operatorname{sen}^2 \theta)^{-3/2}$$

b)

$$\frac{\mathrm{d}E(k^2)}{\mathrm{d}k} = \frac{E(k) - K(k)}{k}$$

c)

$$\frac{\mathrm{d}K(k^2)}{\mathrm{d}k} = \frac{E(k)}{k(1-k^2)} - \frac{K}{k}$$