

Variable Compleja...^{*}

L. A. Núñez^{**}

Centro de Física Fundamental,

Departamento de Física, Facultad de Ciencias,

Universidad de Los Andes, Mérida 5101, Venezuela y

Centro Nacional de Cálculo Científico, Universidad de Los Andes, (CECALCULA),

Corporación Parque Tecnológico de Mérida, Mérida 5101, Venezuela

Versión α 1.0 Octubre 2006

Índice

1. Funciones de Variable Compleja	2
1.1. De la recta real al plano complejo	2
1.2. Continuidad en el plano complejo	2
1.3. Diferenciabilidad de funciones complejas	3
1.4. Funciones Analíticas y Condiciones de Cauchy-Riemann	4
1.5. Curiosidades de Cauchy-Riemann	5
2. Series de Potencias en Variable Compleja	6
2.1. La convergencia y sus criterios	6
2.2. Consecuencias y conclusiones para series de potencias complejas	7
3. Algunas Funciones Complejas Elementales	8
4. Puntos de corte, líneas de cortes y ceros de funciones complejas	9
4.1. Puntos y líneas de corte	9
4.2. Singularidades, polos y ceros de funciones complejas.	11
5. Transformaciones conformes	12
5.1. Definiciones y propiedades	12
5.2. Algunas consecuencias y ejemplos	13

*ADVERTENCIA: El presente documento constituye una guía inacabada y en evolución para los estudiantes de Métodos Matemáticos de la Física de la Universidad de Los Andes. Es, en el mejor de los casos, un FORMULARIO y de ninguna manera sustituye a los libros de texto del curso. La bibliografía de la cual han surgido estas notas se presenta al final de ellas y debe ser consultada por los estudiantes. Es importante resaltar que por ser un documento en evolución es posible que existan versiones más completas y actualizadas en este mismo sitio WEB

** e-mail: nunez@ula.ve Web: <http://webdelprofesor.ula.ve/ciencias/nunez/>

6. Integrales complejas	15
6.1. Algunas propiedades	16
6.2. Un par de ejemplos	16
7. Teorema Integral de Cauchy	17
7.1. El Teorema y las Regiones	17
7.2. Algunas observaciones y el Teorema de Morera	18
7.3. Fórmula integral de Cauchy	20
8. Otra vez Taylor y ahora Laurent	21
8.1. Series de Taylor para funciones analíticas	21
8.2. Series de Laurent	23
8.3. Algunos Ejemplos	24
9. Integración por el método de los residuos	25
9.1. Los residuos de Laurent	25
9.2. Teorema del Residuo	27
9.3. Integrales impropias $\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x)$	28
9.4. Integrales de funciones racionales de $\cos \theta$ y $\operatorname{sen} \theta$	28
9.5. Integrales de Fourier	28
9.6. Otras Integrales Impropias	28

1. Funciones de Variable Compleja

En otro de estos formularios de Métodos Matemáticos de la Física [Núñez 2005] introdujimos la noción de números complejos y la asociamos a su representación de un vector en el plano complejo. En estas notas ahondaremos en el tema y generalizaremos algunos conceptos de funciones complejas de variable compleja.

1.1. De la recta real al plano complejo

La idea de función de variable (o variables) reales puede ser extendida (continuada, le dicen también) al plano complejo. La idea es la de siempre: si en una determinada región del plano complejo \mathcal{R} a un número complejo z le corresponde un número (o varios números) complejos $w = f(z)$, diremos que $f(z)$ es una función de variable compleja z . Obvio que $f(z)$ puede ser biyectiva, en cuyo caso tendremos que a z le estará asociado uno y solo un número complejo $w = f(z)$. Es claro también que siempre se podrá expresar

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad \text{con } u(x, y) \text{ la parte real y } v(x, y) \text{ la parte imaginaria} \quad (1)$$

Esta representación tiene una interpretación adicional. Como representamos un número complejo en el plano $0xy$ como $z = x + iy$, pero $w = f(z)$ también podrá ser representada como un punto en el plano $0uv$. Entonces, desde el punto de vista geométrico una función de variable compleja podrá ser entendida como una ley de transformación entre pares de puntos (x, y) del plano $0xy$ del argumento z y los puntos (u, v) del plano $0uv$ de valor w .

1.2. Continuidad en el plano complejo

Podemos también extender el concepto de continuidad de una función de variable real a una función de variable compleja. Esto es: diremos que una función compleja¹ $w = f(z)$ será continua en z_0 si para un

¹A partir de ahora y por razones de simplicidad llamaremos a $f(z)$ *función compleja* en vez de *función de variable compleja*

$\epsilon > 0$ siempre existe un $\delta > 0$ tal que $|z - z_0| < \delta$ tan pequeño como uno quiera y siempre puede encontrar $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$. La otra manera de verlo es la estándar: si existe el límite cuando $z \rightarrow z_0$. Es decir $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$. En este punto se pueden resaltar que los límites (y con ello la idea de continuidad) en el plano complejo hereda las sutilidades y dificultades de los límites y continuidades de las funciones en varias variables. En segundo lugar cabe señalar que la diferencia con las funciones de variable real radica en que los ϵ y δ son radios de un círculo centrado en $f(z_0)$ y z_0 , respectivamente. Adicionalmente, para el caso de las funciones complejas no tiene sentido los límites por la derecha y por la izquierda que planteábamos para funciones de variable real. También es obvio que si

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad \text{con } u(x, y) \text{ y } v(x, y) \text{ continuas en } (x_0, y_0) \Rightarrow f(z) \text{ continua en } z_0 = x_0 + iy_0$$

1.3. Diferenciabilidad de funciones complejas

Una vez más la idea es la misma y la dificultad que subyace es equivalente a las dificultades que enfrentamos en las definiciones de derivadas para funciones de varias variables. Diremos entonces que una función $f(z)$ univaluada en una región \mathcal{R} entonces $f(z)$ será diferenciable en esa región si la derivada

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{(u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y)) + i(v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x, y))}{\Delta x + i\Delta y} = \frac{df}{dz} = f'(z)$$

existe y es única. Una vez más, el concepto de límite (y con éste el de derivada), como en el caso de las funciones de varias variables, debe existir sin importar la ruta o forma de aproximación al punto sobre el cual estamos calculando la derivada. Esto es

$$\Delta z \rightarrow 0 \Leftrightarrow \Delta x + i\Delta y \rightarrow 0 \Rightarrow \begin{cases} f'(x)_{\Delta y=0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(u(x + \Delta x, y) - u(x, y)) + i(v(x + \Delta x, y) - v(x, y))}{\Delta x} \\ f'(x)_{\Delta x=0} = -i \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{(u(x, y + \Delta y) - u(x, y)) + i(v(x, y + \Delta y) - v(x, y))}{\Delta y} \end{cases}$$

Un par de ejemplos que ilustran este caso pueden ser $f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy$

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - (y + \Delta y)^2 + 2i(x + \Delta x)(y + \Delta y) - x^2 - y^2 - 2ixy}{\Delta x + i\Delta y}$$

con lo cual desarrolle y pruebe que, independientemente de la ruta en el plano complejo ($\Delta y = 0; \Delta x \rightarrow 0$ o viceversa)

$$f'(z) = \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \left(2x + i2y + \frac{(\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 + 2i\Delta x \Delta y}{\Delta x + i\Delta y} \right) = 2x + i2y$$

que es más o menos obvio si hubiéramos notado que $f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy = (x + iy)^2 \equiv z^2$ con lo cual

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z + \Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{2z\Delta z + (\Delta z)^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} (2z + \Delta z) = 2z$$

Ahora bien, las cosas no siempre son así. Si consideramos $f(z) = 2x + iy$ es rápido comprobar que no es diferenciable en el plano complejo, ya que

$$f'(z) = \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{2x + 2\Delta x + i(y + \Delta y) - 2x - iy}{\Delta x + i\Delta y} = \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{2\Delta x + i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}$$

el cual, claramente no coincide si las direcciones de aproximación a $z_0 = x_0 + iy_0$ son distintas, vale decir, por ejemplo $\Delta y = 0; \Delta x \rightarrow 0$ o $\Delta x = 0; \Delta y \rightarrow 0$.

Como heredamos todas las ideas y métodos del campo real se cumplen todas las reglas de la derivación para funciones reales. Vale decir

$$\frac{d}{dz}(f(z) + g(z)) = \frac{df(z)}{dz} + \frac{dg(z)}{dz}; \quad \frac{d}{dz}(f(z)g(z)) = \frac{df(z)}{dz}g(z) + f(z)\frac{dg(z)}{dz}; \quad \frac{d}{dz}(f(g(z))) = \frac{df(g)}{dg}\frac{dg(z)}{dz}$$

1.4. Funciones Analíticas y Condiciones de Cauchy-Riemann

Diremos que una función es analítica (holomorfa o regular) en una región \mathcal{R} , si es uni-valuada y derivable en todos los puntos dentro de esa misma región \mathcal{R} . Puede darse el caso de que sea analítica en la región excepto en un número finito de puntos (donde es singular). Entonces diremos que es analítica (holomorfa o regular) en \mathcal{R} , excepto en esos puntos.

A partir de dos estrategias (muy particulares) de aproximación a $\Delta z \rightarrow 0$ tales como $\Delta y = 0; \Delta x \rightarrow 0$ o $\Delta x = 0; \Delta y \rightarrow 0$, podremos encontrar un criterio para identificar donde, una función compleja, $f(x)$, es analítica. Esto es

$$f'(x)_{\Delta y=0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(u(x + \Delta x, y) - u(x, y)) + i(v(x + \Delta x, y) - v(x, y))}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta u(x, y)}{\Delta x} + i \frac{\Delta v(x, y)}{\Delta x} \right)$$

$$f'(x)_{\Delta x=0} = -i \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{(u(x, y + \Delta y) - u(x, y)) + i(v(x, y + \Delta y) - v(x, y))}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left(-i \frac{\Delta u(x, y)}{\Delta y} + \frac{\Delta v(x, y)}{\Delta y} \right)$$

y ambas tienen que coincidir. Con lo cual

$$f'(x)_{\Delta y=0} = f'(x)_{\Delta x=0} \Leftrightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta u(x, y)}{\Delta x} + i \frac{\Delta v(x, y)}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left(-i \frac{\Delta u(x, y)}{\Delta y} + \frac{\Delta v(x, y)}{\Delta y} \right)$$

y equivalentemente

$$f'(x)_{\Delta y=0} = f'(x)_{\Delta x=0} \Leftrightarrow \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + i \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = -i \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}$$

Con ello hemos encontrado las condiciones *necesarias* para que una función compleja sea analítica: Las condiciones de Cauchy Riemann

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \quad \wedge \quad \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = -\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \quad (2)$$

Ahora tendremos un criterio más expedito para determinar que la función $f(z) = 2x + iy$ no es analítica.

$$\left. \begin{array}{l} u(x, y) = 2x \\ v(x, y) = y \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = 0 = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \quad \wedge \quad \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = 1 \neq -2 = -\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}$$

Para el caso $f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy$ se cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann

$$\left. \begin{array}{l} u(x, y) = x^2 - y^2 \\ v(x, y) = 2xy \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \quad \wedge \quad \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = 2y = -\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}$$

pero como esas condiciones son *necesarias* porque para encontrarlas hemos seleccionado un par de rutas muy específicas: $\Delta y = 0; \Delta x \rightarrow 0$ y $\Delta x = 0; \Delta y \rightarrow 0$, se requiere exigir algunas condiciones adicionales. Sin demostración (puede consultar para detalles y demostraciones detalladas las referencias [Byron y Fuller 1970, Churchill y Brown 1989, Knopp 1996]) exigiremos como condición necesaria y suficiente para que una función sea analítica que las cuatro derivadas parciales para $u(x, y)$ y $v(x, y)$, existan, sean continuas en la región \mathcal{R} y que se cumplan las condiciones de Cauchy-Riemann. El punto crucial (adicional) es que las derivadas sean continuas.

Ejercicio Como ejercicio al lector le sugerimos investigar los dominios del plano complejo para los cuales las funciones $f(z) = |x| - i|y|$ y $f(z) = |z|^2 = zz^*$ son analíticas

1.5. Curiosidades de Cauchy-Riemann

Las funciones analíticas satisfacen algunas propiedades adicionales consecuencias las condiciones de Cauchy-Riemann.

La primera es que dada una función compleja genérica $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, si $f(z)$ es analítica, $u(x, y)$ y $v(x, y)$ serán funciones armónicas conjugadas, $\nabla^2 u(x, y) = \nabla^2 v(x, y) = 0$, i.e. satisfacen la ecuación de Laplace. Si derivamos apropiadamente las ecuaciones (2) respecto a una y otra variable encontramos que

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \right) = -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right) \Rightarrow \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0$$

y equivalentemente

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \right) = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right) = -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \right) = -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \right) \Rightarrow \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial y^2} = 0$$

es decir, hemos demostrado que las partes reales e imaginarias de una función analítica son necesariamente armónicas. La importancia de este resultado radica, en primer lugar, que no son arbitrarias las funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$ con las cuales construimos $f(z)$. Ambas deben satisfacer la ecuación de Laplace. En segundo lugar que ambas están ligadas por las condiciones de Cauchy-Riemann, y esto implica que al conocer una de las funciones armónicas conjugadas, siempre es posible encontrar (salvo una constante de integración) la otra. Para ilustrar lo anterior, supongamos la siguiente función armónica conjugada $u(x, y) = 2x - x^3 + 3xy^2$ correspondiente a la parte real de $f(z)$. Es fácil comprobar que es una función armónica, ahora construyamos la parte imaginaria $v(x, y)$. Esto es

$$u(x, y) = 2x - x^3 + 3xy^2 \Rightarrow \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} = 2 - 3x^2 + 3y^2 \Rightarrow v(x, y) = 2y - 3x^2y + y^3 + \phi(x)$$

entonces

$$\frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = -6xy + \frac{\partial \phi(x)}{\partial x} = -6xy = -\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial \phi(x)}{\partial x} = 0 \Rightarrow \phi(x) = C \Rightarrow v(x, y) = 2y - 3x^2y + y^3 + C$$

La segunda curiosidad consecuencia de las ecuaciones (2) es que para una función compleja genérica $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ en la cual además se cumpla que $u(x, y) = \text{const}$ y $v(x, y) = \text{const}$ entonces se cumplirá que $\nabla u(x, y) \cdot \nabla v(x, y) = 0$.

$$\nabla u(x, y) \cdot \nabla v(x, y) = \left(\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \mathbf{j} \right) \cdot \left(\frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \mathbf{j} \right) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}$$

y por obra de las condiciones de Cauchy-Riemann es inmediato comprobar que se anulan

$$\nabla u(x, y) \cdot \nabla v(x, y) = -\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = 0$$

Es decir, $u(x, y) = \text{const}$ y $v(x, y) = \text{const}$, corresponden a *trayectorias mutuamente ortogonales*. Esta “curiosidad” nos permite construir sistemas de coordenadas alternativos en el plano complejo y, sobre todo saber como establecer su transformación a otros planos complejos. Esto se representa en la figura 2 y será considerado en la sección 5 de la página 12.

La tercera curiosidad es un resultado el cual, siendo una formalidad, nos indica que las funciones analíticas $f(z)$ dependen de z y no de su conjugado z^* . O dicho de otra manera que z y z^* son variables independientes. Para demostrar esto procedemos a demostrar si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ y $f(z)$ analítica, entonces $\frac{\partial f(z)}{\partial z^*} = 0$. Sin detenernos a pensar en el significado de la derivada respecto a la variable conjugada, recordamos que operacionalmente

$$\left. \begin{array}{l} x = \frac{z + z^*}{2} \\ y = \frac{z - z^*}{2i} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\partial f(z)}{\partial z^*} = \frac{\partial f(z)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z^*} + \frac{\partial f(z)}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z^*} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + i \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \right) - \frac{1}{2i} \left(\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + i \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \right)$$

arreglando tendremos que es inmediato comprobar que se anula si se cumplen las condiciones (2)

$$\frac{\partial f(z)}{\partial z^*} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \right) = 0 \quad \Rightarrow f(z) \Leftrightarrow f(x, y) = f \left(\frac{z + z^*}{2}, \frac{z - z^*}{2i} \right)$$

en otras palabras, la funciones analíticas son verdaderas funciones de variable complejas y no, como pudiera parecer, de dos variables reales interpuestas.

Ejercicios

1. Determine la función $f(z)$ analítica cuya parte imaginaria es $(y \cos y + x \operatorname{sen} z)e^x$
2. Muestre que si $f(z)$ es analítica entonces $f^*(z^*)$ también lo es.

2. Series de Potencias en Variable Compleja

En otros de los Formularios de Métodos Matemáticos incursionamos en el terreno de las series de potencias en variables reales [Núñez 2006]. En esta sección generalizaremos la idea a series de potencias en variable compleja z . Esta generalización se conoce como “prolongación” o “continuación” (analítica) de una función real al plano complejo. Entonces²

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \equiv \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta} \quad \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ es absolutamente convergente si } \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n \text{ converge} \quad (3)$$

Dónde hemos utilizado la forma polar para un número complejo $z = re^{i\theta}$. La conclusión más importante de (3) es que siempre es posible asociarle a una serie de potencias complejas, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, una de potencias reales $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$. La convergencia (absoluta) de ésta última condiciona la convergencia de la primera. Por ello los criterios de convergencia de series reales serán aplicables también en este contexto.

2.1. La convergencia y sus criterios

De este modo y como siempre, si suponemos que existe el límite

$$\rho = \frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

²Por simplicidad y economía consideraremos desarrollos en serie alrededor de $z = 0$, ya que la generalización a otros puntos $z = z_0$ es sencilla y no involucra ninguna sutileza conceptual adicional.

Dónde R se denomina el *radio de convergencia* y define una región circular en torno a un punto z_0 .

Si seleccionamos el criterio del cociente de Dálembert, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n} \right| = |z| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \quad \text{entonces, en las regiones} \quad \begin{cases} |z| < R & \Rightarrow \text{converge} \\ |z| > R & \Rightarrow \text{diverge} \\ |z| = R & \Rightarrow \text{indeterminado} \end{cases}$$

Por lo tanto, cuando $R = \infty$ la serie converge en todo punto y en contraste si $R = 0$, sólo converge en el origen. Por su parte si $R = R_0$ la serie converge en una región (un círculo) del plano complejo de radio R_0 centrada en $z_0 = 0$.

Entonces se puede analizar el comportamiento de series complejas utilizando el criterio del cociente de Dálembert,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n!}{(n+1)!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n+1} \right| = 0 = \frac{1}{R} \Rightarrow R \rightarrow \infty \Rightarrow \text{converge } \forall z \in \mathbb{C}$$

igualmente

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n(1+i)^{n+1}}{(n+1)(1+i)^n} \right| = |1+i| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n}{n+1} \right| = \sqrt{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n}{n+1} \right| \Rightarrow R = 1 \Rightarrow |z| = \sqrt{2} > 1 = R$$

y por lo tanto esta serie diverge. Es claro que esta serie únicamente convergerá para $|z| < 1$

2.2. Consecuencias y conclusiones para series de potencias complejas

Dentro del círculo de convergencia la función $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ estará bien definida y disfrutará de las propiedades ideales para una función bien comportada. Es decir

1. La expansión $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ es única. Vale decir que si existen dos series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$, convergentes para $|z| < R$ y tienen la misma suma para un entorno de z . Entonces, necesariamente $a_n \equiv b_n$.
2. La función $f(z)$ también podrá ser expandida alrededor de cualquier otro punto z_p contenido en el entorno de convergencia de radio R , su expansión $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_p)^n$ también será única. El radio de convergencia para esta segunda serie será $R_p = R - |z_p|$
3. Por ser una expansión en potencias de z , la función $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ es diferenciable en todo punto z_p en el círculo de convergencia de radio R y la derivada puede ser hecha a partir de la misma expansión en series de potencias, término a término, de tal forma que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \Rightarrow \frac{df}{dz} = f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \Rightarrow f'(z_p) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z_p^{n-1} \quad (4)$$

Por lo tanto las funciones $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ así descritas son analíticas en el entorno de convergencia de radio R .

4. Como $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ y $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ tienen el mismo radio de convergencia, podemos aplicar k veces la afirmación anterior y obtendremos

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \Rightarrow f^k(z_p) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) a_n z_p^{n-k} \text{ para } z_p = 0 \Rightarrow a_k = \frac{f^k(0)}{k!}$$

con lo cual la expansión de una función analítica es en realidad una expansión en series de Taylor

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!} z^n$$

Con esta última afirmación se cierra la idea que nos hacemos de una función bien comportada o analítica. Es una función infinitamente continua y continuamente diferenciable, la cual puede ser expandida en series de Taylor. Si bien los fenómenos físicos no requieren, necesariamente, ser descritos por este tipo de funciones, debido a sus notables propiedades han resultado ser una de las más estudiadas en Matemáticas [Aleksandrov Kolmogorov y Lavrentiev 1999]. M'as adelante, en la sección 8 revisaremos estos conceptos a luz de la F'ormula Integral de Cauchy.

Los detalles de estas afirmaciones que son teoremas se pueden consultar en [Knopp 1996].

3. Algunas Funciones Complejas Elementales

Con todos los ingredientes anteriores, la primera función candidata para una continuación analítica es la función exponencial. Es decir

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots \quad \text{claramente } R \rightarrow \infty \text{ con lo cual converge } \forall z \in \mathbb{C} \quad (5)$$

Como ejercicio puede ser interesante demostrar que $e^{z_1} e^{z_2} = e^{(z_1+z_2)}$. Vale decir

$$e^{z_1} e^{z_2} = \left(1 + z_1 + \frac{z_1^2}{2} + \cdots + \frac{z_1^n}{n!} + \cdots \right) \left(1 + z_2 + \frac{z_2^2}{2} + \cdots + \frac{z_2^n}{n!} + \cdots \right)$$

con un poco de álgebra y orden podremos rearrreglar la expresión de la forma

$$e^{z_1} e^{z_2} = 1 + \left(\frac{z_1}{1!} + \frac{z_2}{1!} \right) + \left(\frac{z_1^2}{2!} + \frac{z_1 z_2}{1! 1!} + \frac{z_2^2}{2!} \right) + \cdots + \frac{z_1^n}{n!} + \frac{z_1^{n-1}}{(n-1)!} \frac{z_2}{1!} + \frac{z_1^{n-2}}{(n-2)!} \frac{z_2^2}{2!} + \cdots + \frac{z_1}{1!} \frac{z_2^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{z_2^n}{n!}$$

y mejor aún

$$e^{z_1} e^{z_2} = 1 + \left(\frac{z_1}{1!} + \frac{z_2}{1!} \right) + \left(\frac{z_1^2}{2!} + \frac{z_1 z_2}{1! 1!} + \frac{z_2^2}{2!} \right) + \cdots + \frac{1}{n!} \left(z_1^n + \frac{n!}{(n-1)! 1!} z_1^{n-1} z_2 + \cdots + \frac{n!}{1!(n-1)!} z_1 z_2^{n-1} + z_2^n \right)$$

que no es otra cosa que la expansión binomial con lo cual hemos demostrado que $e^{z_1} e^{z_2} = e^{(z_1+z_2)}$. Adicionalmente, con la expansión en serie (5) podemos hacer un par de extensiones inmediatas: $a^z = e^{z \ln a}$ y

$$\text{para } z = iy \Rightarrow e^{iy} = \cos y + i \sin y \Rightarrow e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y) \quad (6)$$

Nótese que, como era de esperarse en general $z = |z|e^{i\theta}$, entonces la función $f(z) = e^z \neq 0 \quad \forall z$ y tiene un período $2i\pi$, vale decir: $f(z) \equiv f(z + 2i\pi)$. Con lo cual es inmediado $e^{2\pi} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi$. A partir de la construcción (5), se definen las funciones hiperbólicas y trigonométricas

$$\cosh z = \frac{1}{2} (e^z + e^{-z}); \quad \operatorname{senh} z = \frac{1}{2} (e^z - e^{-z}) \quad \cos z = \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}); \quad \sin z = \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}) \quad (7)$$

Al igual que para el caso real $y = e^x \Rightarrow x = \ln y$ entonces $w = f(z) = e^z \Rightarrow z = \text{Ln } w$ es decir $z = \ln w$ es la función inversa para $w = e^z$.

Si $e^w = z$, y $w = u + iv$ con $z = x + iy \equiv |z|e^{i\theta}$ entonces

$$e^w = e^{u+iv} = e^u e^{iv} = |z|e^{i\theta} = z \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} e^u = |z| \Leftrightarrow u = \ln |z| \\ v = \theta \end{array} \right\} \Rightarrow w = \text{Ln } z = \ln |z| + i(\theta + 2n\pi)$$

Es decir para un determinado valor de n es univaluada, en particular para $n = 0$ la función $f(z) = \text{Ln } z$ tiene como el *valor principal* $\ln z = \ln |z| + i\theta$ con $-\pi < \theta \leq \pi$. Es inmediato comprobar que los logaritmos de números complejos negativos si están definidos. Esto es

$$\text{Ln } -7 \equiv \text{Ln}(|-7|e^{\pi+2n\pi}) = \ln 7 + i(\pi + 2n\pi) \Rightarrow \text{Ln}(-7) = \ln 7 + i\pi \text{ ¡ un número complejo !}$$

Ejercicios

1. Muestre que si definimos $f(z)e^z$ como aquella función que derivada es ella misma, que se reduce a la función de variable real $e^z \rightarrow e^x$ si $\text{Im } z = 0$ y la cual, por ser analítica, cumple con las condiciones de Cauchy-Riemann, entonces $e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$
2. Muestre que a partir de las definiciones (7) se obtienen las semipártidas propiedades de esas funciones, vale decir

$$\cos z = \cos(-z); \quad -\sin z = \sin(-z); \quad \cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2$$

$$\frac{d \cos z}{dz} = -\sin z \quad \frac{d \sin z}{dz} = \cos z \quad \sin(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \sin z_2 \pm \sin z_1 \cos z_2$$

3. Muestre que $\arctan z = \frac{1}{2i} \ln \left(\frac{1+zi}{1-zi} \right)$ y luego úselo para evaluar $\arctan \left(\frac{2\sqrt{3}-3i}{7} \right)$

4. Puntos de corte, líneas de cortes y ceros de funciones complejas

También mencionamos en el otro formulario [Núñez 2006], que los números complejos se representan por su forma polar en dos ejes coordenados. Ese diagrama bidimensional se lo llamamos Diagrama de Argand. Como en el caso del Análisis de Funciones Reales, existen funciones *multivaluadas*, a las cuales les debemos imponer ciertas condiciones para convertirlas en *univaluadas*. La idea es que si una función es multivaluada, automáticamente deja de ser analítica. El objetivo de esta sección es identificar ese conjunto de condiciones para detectar en qué región del plano complejo una determinada función es univaluada.

4.1. Puntos y líneas de corte

Consideremos entonces la función $f(z) = z^{1/2}$ y hagamos distintos circuitos cerrados $0 \leq \theta < 2\pi$ con el “vector” z .

$$f(z) = z^{1/2} \equiv r^{1/2} e^{i\theta/2} \rightarrow f(z) = r^{1/2} e^{i\theta/2} \rightarrow r^{1/2} e^{(i\theta+2\pi)/2} = -r^{1/2} e^{i\theta/2}$$

Visto así nos tendremos que preguntar ahora cuál fue el circuito que recorrimos con z , y dependiendo de ese circuito identificaremos algunos puntos con características distintas. Si el circuito cerrado descrito por z **no** contiene el punto $z = 0$, la función $f(z) = z^{1/2}$ retoma su valor original (ver Figura 1 cuadrante superior

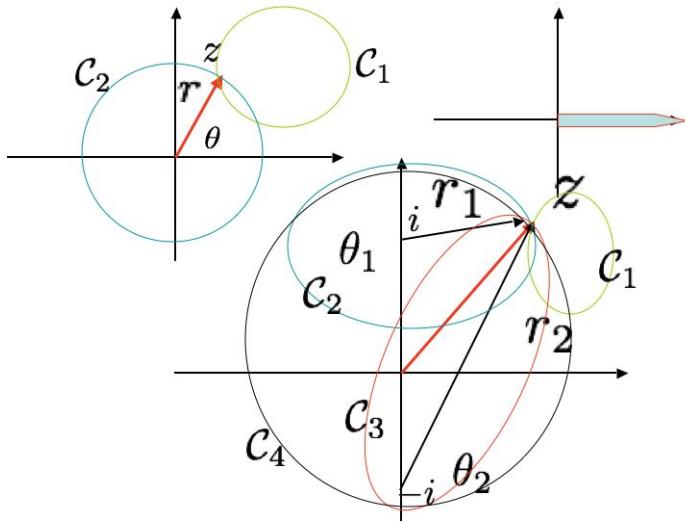


Figura 1: Los distintos contornos que identifican los puntos de corte

izquierdo contorno \mathcal{C}_1). Pero si, como se aprecia en la misma Figura 1, el circuito cerrado \mathcal{C}_2 **si** contiene el punto $z = 0$ entonces la función no retoma su valor original, $f(z) \rightarrow -f(z)$. También es claro que si el circuito cerrado lo recorremos dos veces $\theta \rightarrow 4\pi$ entonces $f(z) = z^{1/2}$ retoma su valor inicial. Los puntos alrededor de los cuales se construye un circuito cerrado en el diagrama de Argand y la función no retoma su valor inicial se denominan *puntos de corte* y las *líneas de corte* (o simplemente *cortes*) serán aquellas líneas que separan regiones en las cuales una determinada función es univaluada. Es claro que los puntos de corte son puntos singulares, en los cuales la función deja de ser analítica y existirán si θ toma, valores $0 \leq \theta \leq 2n\pi$. Es decir, puede dar n vueltas.

En este caso, para nuestra función $f(z) = z^{1/2}$, la línea de corte será cualquiera que comience en $z = 0$ y continúe para $|z| \rightarrow \infty$. Por simplicidad es costumbre tomar las líneas de corte a lo largo de los ejes reales o complejos. De este modo aparece ilustrado en la Figura 1 cuadrante superior derecho la línea de corte que sigue el eje positivo de las x .

La situación se torna más interesante cuando estas definiciones se analizan a la luz de funciones con más de un punto de corte. Consideremos la función

$$f(z) = \sqrt{z^2 + 1} \Rightarrow f(z) = \sqrt{(z-i)(z+i)} \equiv \sqrt{(r_1 e^{i\theta_1})(r_2 e^{i\theta_2})} = \sqrt{r_1 r_2} e^{i\theta_1/2} e^{i\theta_2/2} = \sqrt{r_1 r_2} e^{i(\theta_1+\theta_2)/2}$$

analicemos entonces, varios contornos en el plano de Argand. Otra vez la Figura 1 ilustra en el cuadrante inferior los distintos contornos $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ y \mathcal{C}_4 Tal y como se aprecia en esa figura, se dan cuatro caso

1. Contorno \mathcal{C}_1 no incluye ningún punto de corte, entonces $\theta_{1min} \leq \theta_1 \leq \theta_{1max}$ y $\theta_{2min} \leq \theta_2 \leq \theta_{2max}$, con lo cual $f(z)$ retoma su valor inicial luego de recorrer el \mathcal{C}_1
2. Contorno \mathcal{C}_2 incluye $z = i$ como punto de corte, entonces $0 \leq \theta_1 \leq 2n\pi$ y $\theta_{2min} \leq \theta_2 \leq \theta_{2max}$, por lo cual $f(z) \rightarrow -f(z)$
3. Contorno \mathcal{C}_3 incluye $z = -i$ como punto de corte, entonces $\theta_{1min} \leq \theta_1 \leq \theta_{1max}$ y $0 \leq \theta_2 \leq 2n\pi$, por lo cual $f(z) \rightarrow -f(z)$

4. Contorno \mathcal{C}_4 incluye ambos como punto de corte, $z = i$ y $z = -i$, entonces $0 \leq \theta_1 \leq 2n\pi$ y $0 \leq \theta_2 \leq 2n\pi$, por lo cual $f(z) \rightarrow f(z)$ retoma su valor.

De este modo para construir los cortes que impidan que nuestra función se multivaluada podremos seleccionar

- $z_{\text{corte}} > i$ y $z_{\text{corte}} < -i$
- $-i < z_{\text{corte}} < i$

4.2. Singularidades, polos y ceros de funciones complejas.

Los puntos de corte son singularidades, esto puntos en los cuales la función $f(z)$ deja de ser analítica. Pero también *singularidades aisladas* aquellos puntos en los cuales la función no es analítica pero en todos los puntos en su entorno lo es (los puntos de corte no son singularidades aisladas). Una singularidad aislada de orden n en el punto $z = z_0$ tendrá la forma

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^n} \quad \leftrightarrow \quad \lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0)^n f(z)] = l \quad \text{con } l \text{ finito distinto de cero}$$

y donde $g(z)$ es una función analítica. Es costumbre denominar a estas singularidades *polos*. Si l es cero, será un polo de orden menor a n o la función es analítica en ese punto. Si el límite es infinito, entonces el polo será de orden mayor a n .

Sin demostración afirmaremos algo que parece intuitivo. Si una función $f(z)$ tiene un polo en $z = z_0$ entonces, $|f(z)| \rightarrow \infty$ cuando $z \rightarrow z_0$

Si no se puede determinar un valor finito de n diremos que estamos frente a una *singularidad esencial*
Veamos algunos ejemplos

- Para

$$f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{1+z} = \frac{2z}{(1-z)(1+z)}$$

y es inmediato darse cuenta que tendremos polos de orden 1 en $z = 1$ y $z = -1$

- Para

$$f(z) = \tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z} = \frac{\exp z - \exp(-z)}{\exp z + \exp(-z)} \Rightarrow \exp z = \exp(i(2n+1)\pi) \exp(-z) \text{ es un polo}$$

es decir donde $\exp z = -\exp(-z)$, con lo cual $z_0 = (n + \frac{1}{2})i\pi$ y al utilizar la definición

$$\lim_{z \rightarrow (n + \frac{1}{2})i\pi} \left(\frac{[z - (n + \frac{1}{2})i\pi] \sinh z}{\cosh z} \right) = \lim_{z \rightarrow (n + \frac{1}{2})i\pi} \left(\frac{[z - (n + \frac{1}{2})i\pi] \cosh z + \sinh z}{\sinh z} \right) = 1$$

donde hemos utilizado el Teorema de L'Hopital y consecuentemente $z_0 = (n + \frac{1}{2})i\pi$ es un polo simple

Existe otro tipo de singularidades conocidas como removibles. Estas singularidades se caracterizan porque el valor de $f(z) \rightarrow 0/0$ cuando $z \rightarrow z_0$. El caso más emblemático es la función

$$f(z) = \frac{\sin z}{z} \Rightarrow f(z) = \frac{1}{z} \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} \dots \right) = \left(1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} \dots \right) \Rightarrow \lim_{z \rightarrow 0} f(z) = 1$$

con lo cual, luego de desarrollar por Taylor la función $\sin z$, se ha removido la singularidad aparente.

El comportamiento de una función compleja en infinito (o cuando tiende a infinito), vale decir cuando $z \rightarrow \infty$ no está tan bien definido como en los casos de funciones de variable real. Es claro como una cantidad real, digamos $|f(z)|$ o $|z|$ tiende a infinito, pero z es una cantidad “bidimensional” y, en principio, existirían varias formas de tender a infinito. Para precisar el comportamiento de una función compleja de variable compleja en infinito, hacemos un cambio de variable $z = 1/\xi$ y estudiamos $f(1/\xi)$ con $1/\xi \rightarrow \infty$. De esta manera

- $\lim_{z \rightarrow \infty} z(1+z^2) \equiv \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{1}{\xi} + \frac{1}{\xi^3}$ con lo cual tendrá un polo de orden 3
- $\lim_{z \rightarrow \infty} \exp z \equiv \lim_{\xi \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! \xi^n}$ y presenta una singularidad esencial para $z \rightarrow \infty$

Los ceros de una función compleja ($f(z_0) = 0$, entonces llamaremos z_0 un cero de $f(z)$) se clasifican al igual que los polos. Esto es

$$f(z) = (z - z_0)^n g(z) \text{ con } n \text{ entero positivo y } g(z) \neq 0 \quad \forall z$$

5. Transformaciones conformes

Nos interesará ahora considerar transformaciones entre planos complejos. Esto es

$$z = x + iy \quad \leftrightarrow \quad w = r + is \quad \Rightarrow w = g(z) = r(x, y) + is(x, y) \quad \leftrightarrow \quad z = h(w) = x(r, s) + iy(r, s)$$

5.1. Definiciones y propiedades

Es decir, son transformaciones entre puntos $(x, y) \leftrightarrow (r, s)$ correspondientes a dos diagramas de Argand, de tal modo que existe función inversa función $z = h(g(z))$ y con $w = g(z)$ y $z = h(w)$ funciones analíticas, salvo en un número finito de polos aislados. Entonces denominaremos a este tipo de *transformaciones conformes* si además, en todo punto z y w (excepto en aquellos en los cuales $g'(z)$ y por lo tanto $h'(w)$ son cero o infinita) cumple con

- Curvas continuas en el plano z transforman en curvas continuas en el w
- Los ángulos entre dos curvas cualesquiera que se intersecten en el plano z serán los mismos que los que formen las curvas transformadas en el plano w . Esto es los ángulos entre las curvas serán invariantes bajo la transformación³
- El cambio de escala en la vecindad de puntos transformados es independiente de la dirección en la cual se mida.
- Cualquier función analítica en $z = x + iy$ transforma en otra función $w = r + is$ también analítica

La segunda de las afirmaciones es inmediata a partir de la primera. Es decir, si una transformación conforme de coordenadas tienen inversa y ambas son analíticas, es obvio que curvas continuas $\mathcal{C}(z)$ serán transformadas a curvas continuas $\tilde{\mathcal{C}}(w)$.

El hecho que la transformación conforme preserva el ángulo y las escalas se muestra en la figura 3 y puede comprobarse de la siguiente manera. Considere dos curvas, $\mathcal{C}_1(z)$ y $\mathcal{C}_2(z)$, en el plano complejo $z = x + iy$.

³De esta propiedad es donde la transformación hereda su nombre de conforme. Son transformaciones *isogonales* es decir, que preservan los ángulos entre curvas que se intersectan que son transformadas

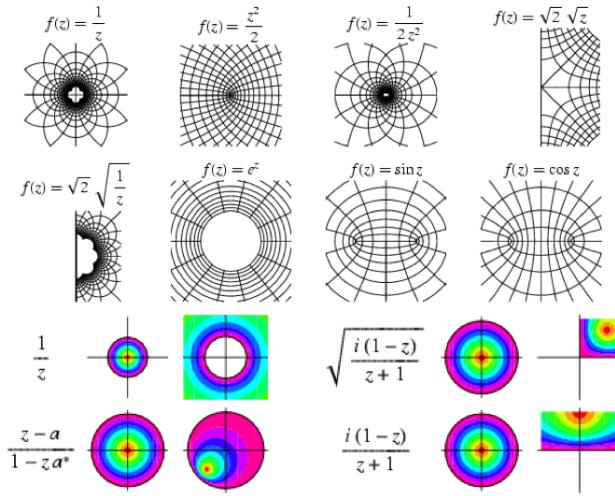


Figura 2: Transformaciones conformes. Tomado de Eric W. Weisstein. **Conformal Mapping**. *MathWorld—A Wolfram Web Resource*. <http://mathworld.wolfram.com/ConformalMapping.html>

Supongamos además que estas curvas se intersectan en un punto $z = z_0$. Entonces, sobre las tangentes a cada curva, en z_0 , definimos otros dos puntos z_1 y z_2 de tal forma que

$$\left. \begin{array}{l} z_1 - z_0 = \rho e^{i\theta_1} \\ z_2 - z_0 = \rho e^{i\theta_2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} w_1 - w_0 = \rho_1 e^{i\phi_1} \\ w_2 - w_0 = \rho_2 e^{i\phi_2} \end{array} \right.$$

Nótese que hemos construido los puntos z_1 y z_2 sobre las tangentes a z_0 a la misma distancia ρ de z_0 y, en principio, hemos supuesto que las distancias a los puntos transformados w_1 y w_2 (las cuales hemos identificado como ρ_1 y ρ_2 , respectivamente), no son iguales. Ahora bien, dado que $w = g(z)$ es analítica entonces

$$\frac{dg(z)}{dz} \Big|_{z=z_0} = \frac{dw}{dz} \Big|_{z=z_0} = \lim_{z_1 \rightarrow z_0} \frac{w_1 - w_0}{z_1 - z_0} = \lim_{z_2 \rightarrow z_0} \frac{w_2 - w_0}{z_2 - z_0} \Rightarrow g'(z_0) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho_1}{\rho} \exp i(\phi_1 - \theta_1) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho_2}{\rho} \exp i(\phi_2 - \theta_2)$$

Es claro que al comparar las magnitudes y las fase demostramos que las transformaciones conformes preservan las distancias, $\rho_1 = \rho_2$, y los ángulos $(\phi_2 - \phi_1) = (\theta_2 - \theta_1)$. Adicionalmente, es muy fácil convencerse que si la transformación conforme conserva los ángulos entre curvas y las escalas en todas direcciones las figuras son transformadas en figuras equivalentes quizá ampliadas y rotadas, pero no deformadas.

5.2. Algunas consecuencias y ejemplos

Las consecuencias de la última afirmación revisten alguna importancia. Si $f = f(z)$ es analítica en el plano (x, y) y la transformación $z = h(w)$ también lo es, entonces la función $F(w) = f(h(w))$ necesariamente es analítica en el plano (r, s) .

$$\frac{\Delta F}{\Delta w} = \frac{\Delta f}{\Delta h} \frac{\Delta h}{\Delta w} \equiv \frac{\Delta f}{\Delta z} \frac{\Delta h}{\Delta w}$$

Por hipótesis supusimos que f y h erán analíticas, por lo cual es inmediato concluir que debido a que los dos factores de la derecha son analíticos, la función $F(w)$ también lo será.

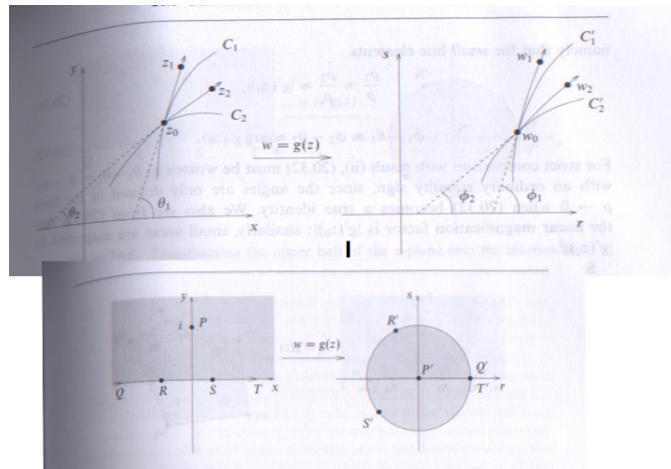


Figura 3: Transformaciones conformes. Cuadrante superior representa las conservación de ángulos y escala bajo transformaciones y el inferior un ejemplo de transformaciones conformes

Esto implica que, tal y como mostramos en la sección 1.5 si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, es analítica, entonces $u(x, y)$ y $v(x, y)$ serán funciones armónicas conjugadas, vale decir que satisfacen la ecuación de Laplace, con lo cual $\nabla^2 u(x, y) = \nabla^2 v(x, y) = 0$. Eso significa que si $F = \Phi(w) + i\Psi(w)$. En otras palabras,

$$f = \phi + i\psi \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow F = \Phi + i\Psi \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0 \end{array} \right\}$$

Esto impone que si $\Re f(z) = \phi$ es constante en el plano (x, y) , también lo será $\Re F(w)\Phi$ en (r, s) (! Demuéstrelo!). Esta propiedad derivó una serie de aplicaciones en la solución de la ecuación de Laplace en dos dimensiones. Si bien es una técnica elegante y útil cuando es posible, no deja de ser limitada porque se restringe a 2D. Hoy los métodos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales en derivadas parciales han superado con creces este tipo de técnicas.

Los ejemplos son variados.

- las siguientes transformaciones representan

traslaciones: $w = z + b$; rotaciones de ángulo θ : $w = ze^{i\theta}$; expansiones de escala a : $w = az$

y pueden ser combinadas como: $w = az+b$ con a y b números complejos. Para la traslación es inmediato. Para la rotación también si recordamos que $z = |z|e^{i\phi}$ con lo cual $w = |z|e^{i\phi}e^{i\theta} = |z|e^{i(\phi+\theta)}$

- también la transformación de inversión $w = 1/z$ que transforma los puntos del interior de un círculo unidad a su exterior y viceversa. Una vez más, $w = \frac{1}{z} = \frac{1}{|z|e^{i\phi}} = \frac{1}{|z|}e^{-i\phi}$. Entonces es claro que

$$0 \leq |z| \leq 1 \Rightarrow \infty < |w| \leq 1 \quad \wedge \quad 1 \leq |z| \leq \infty \Rightarrow 0 < |w| \leq 1$$

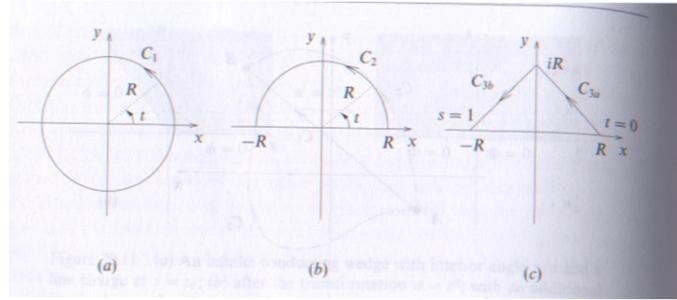


Figura 4: Integrales complejas y circuitos

- Un caso más interesante lo constituye la transformación $w = e^{i\theta} \left(\frac{z - z_0}{z - z_0^*} \right)$, la cual transforma los puntos z_0 del semiplano superior complejo $y > 0$ al interior de un círculo unidad en el w -plano (ver figura 3 en la página 14). Para convencernos de ello notamos que

$$|w| = \left| e^{i\theta} \left(\frac{z - z_0}{z - z_0^*} \right) \right| = \left| \frac{z - z_0}{z - z_0^*} \right|$$

En general si z_0 y z los consideramos en el semiplano complejo superior $y \geq 0$, entonces siempre se cumple que $|z - z_0| \leq |z - z_0^*|$ con lo cual $|w| \leq 1$ y como se cumple para todo z en ese semiplano, entonces cada uno de esos puntos es transformado dentro de un círculo de radio $|w|$. Es inmediato convencerse que, la igualdad se cumple para puntos z sobre el eje real y que el punto $z = z_0$ es llevado al punto $w = 0$. Finalmente, notamos que si conocemos como transforman dos puntos $z_1 \rightarrow w_1$ y $z_2 \rightarrow w_2$ entonces podremos determinar la transformación. Esto es, conocer los valores de los parámetros z_0 y ϕ . Este caso lo podemos apreciar si consideramos un par de puntos en el semiplano complejo y conocemos como transforman. Digamos $z = i$ sobre el eje imaginario e imponemos que sea transformado a $w = 0$ entonces es inmediato determinar que $z_0 = i$. Por otro lado si imponemos que $z = \infty \Rightarrow w = 1$ entonces $1 = w = e^{i\theta} \Rightarrow \theta = 0$ con lo cual $w = \frac{z - i}{z + i}$.

6. Integrales complejas

Como siempre, luego de definir la derivada, construimos el concepto de integral a partir de la suma de Riemann. Esto es

$$S_n = \sum_{j=1}^n f(\zeta_j)(z_j - z_{j-1}) \quad \text{si } n \rightarrow \infty \quad \Rightarrow |z_j - z_{j-1}| \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n f(\zeta_j)(z_j - z_{j-1}) = \int_{z_1}^{z_2} dz f(z)$$

Es decir que si el $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ existe corresponde con la definición de la integral.

6.1. Algunas propiedades

Es claro que esta integral es, necesariamente, una integral de línea, ya que z tiene “dos dimensiones”

$$\int_{z_1}^{z_2} dz f(z) = \int_{z_1}^{z_2} (dx + idy) (u(x, y) + iv(x, y)) = \int_{x_1, y_1}^{x_2, y_2} (u(x, y)dx - v(x, y)dy) + i \int_{x_1, y_1}^{x_2, y_2} (v(x, y)dx + u(x, y)dy) \quad (8)$$

con lo cual transformamos una integral compleja en una suma de integrales reales, pero necesitamos definir el contorno a través del cual vamos de $z_1 = x_1 + iy_1 \rightarrow z_2 = x_2 + iy_2$

La integración compleja tendrá las propiedades acostumbradas

- $\int_{\mathcal{C}} dz (f(z) + g(z)) = \int_{\mathcal{C}} dz f(z) + \int_{\mathcal{C}} dz g(z)$
- $\int_{\mathcal{C}} dz Kf(z) = K \int_{\mathcal{C}} dz f(z)$ con K una constante real o compleja
- $\int_a^b dz f(z) = - \int_b^a dz f(z)$
- $\int_a^b dz f(z) = \int_a^m dz f(z) + \int_m^b dz f(z)$
- $\int_{\mathcal{C}} dz |f(z)| \leq ML$ donde $M = \max |f(z)|$ y L la longitud de \mathcal{C}

Esta última propiedad es importante porque permite establecer cotas a las integrales complejas sin tener que evaluarlas. De la definición de integral es casi inmediata la demostración

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n f(\zeta_j) \Delta z_j = \int_{z_1}^{z_2} dz f(z) \Rightarrow \left| \sum_{j=1}^n f(\zeta_j) \Delta z_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |f(\zeta_j)| |\Delta z_j| \leq M \sum_{j=1}^n |\Delta z_j| \leq ML$$

Donde hemos utilizado que $|f(\zeta_j)| \leq M$ y que la suma de los intervalos $\Delta z_j = z_j - z_{j-1}$ es la longitud L del recorrido \mathcal{C} . Es claro que tomando límites a ambos miembros obtendremos $|\int_{\mathcal{C}} dz f(z)| \leq \int_{\mathcal{C}} dz |f(z)| \leq ML$

6.2. Un par de ejemplos

Por ejemplo, evaluemos la integral compleja $f(z) = z^{-1}$ a lo largo de diferentes contornos, tal y como se ilustran en la figura 4

- un circuito cerrado a lo largo de una circunferencia de radio R

$$\oint dz z^{-1} \equiv \oint d(Re^{i\theta}) R^{-1} e^{-i\theta} = i \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i$$

- siguiendo una semicircunferencia desde $(R, 0) \rightarrow (-R, 0)$. Esto es

$$\int_{z_1=(R,0)}^{z_2=(-R,0)} dz z^{-1} = \int_{(R,0)}^{(R,\pi)} d(Re^{i\theta}) R^{-1} e^{-i\theta} = i \int_0^\pi d\theta = \pi i$$

- siguiendo dos líneas rectas entre los puntos $(R, 0) \rightarrow (0, R) \rightarrow (-R, 0)$. En este caso, procedemos utilizando la expresión cartesiana para los números complejos. Para ello, vamos a parametrizar $z = z(t)$ para $(R, 0) \rightarrow (0, R)$ y $z = z(s)$ cuando $(0, R) \rightarrow (-R, 0)$. Veamos

$$\int_{z_1=(R,0)}^{z_3=(-R,0)} dz z^{-1} = \int_{z_1=(R,0)}^{z_2=(0,R)} dz z^{-1} + \int_{z_2=(0,R)}^{z_3=(0,-R)} dz z^{-1}$$

para cada una de las integrales se cumple, respectivamente, que

$$z = (1-t)R + itR \quad \text{con } 0 \leq t \leq 1 \quad \wedge \quad z = -sR + i(1-s)R \quad \text{con } 0 \leq s \leq 1$$

con lo cual

$$\int_{z_1=(R,0)}^{z_2=(-R,0)} \frac{dz}{z} = \int_0^1 dt \frac{-1+i}{1+t(-1+i)} + \int_0^1 ds \frac{-1-i}{i+s(-1-i)}$$

procedemos entonces con la primera de las integrales

$$\int_0^1 \frac{(-1+i)dt}{(1-t)+it} = \int_0^1 \frac{(-1+i)((1-t)-it)dt}{(1-t)^2-t^2} = \int_0^1 \frac{(2t-1)dt}{1-2t+2t^2} + i \int_0^1 \frac{dt}{1-2t+2t^2}$$

es decir

$$\int_0^1 \frac{(-1+i)dt}{(1-t)+it} = \frac{1}{2} \ln(1-2t+2t^2) \Big|_0^1 + i \arctan\left(\frac{t-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right) \Big|_0^1 = 0 + \frac{i}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{2}$$

y, la segunda integral también tendrá el mismo resultado, con lo cual

$$\int_{z_1=(R,0)}^{z_2=(-R,0)} \frac{dz}{z} = \pi i \quad ! \text{ el mismo resultado que a través del arco de circunferencia !}$$

Es interesante notar que si regresamos al punto $(R,0)$ a través del contorno $(-R,0) \rightarrow (0,-R) \rightarrow (R,0)$ la integral cerrada se anula, no así cuando nos regresamos a través el arco complementario de circunferencia. En pocas palabras, como se esperaba, el valor de las integrales de camino, para algunas funciones, dependerán del camino seleccionado. En la próxima sección veremos a cuáles funciones corresponderá un mismo valor de la integral cerrada, independientemente del circuito que uno elija. Queda como ejercicio al lector repetir los mismos pasos anteriores para el caso de $f(z) = (z^*)^{-1}$

Otro ejemplo ilustrativo lo constituye

$$\oint \frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}} \Rightarrow \int_0^{2\pi} \frac{Re^{i\theta} d\theta}{R^{n+1} e^{i(n+1)\theta}} = \frac{i}{R^n} \int_0^{2\pi} d\theta e^{-in\theta} \Rightarrow \begin{cases} n=0 : & \int_0^{2\pi} d\theta = 2i\pi \\ n \neq 0 : & \frac{i}{R^n} \int_0^{2\pi} d\theta (\cos n\theta - i \sin n\theta) = 0 \end{cases}$$

donde hemos utilizado la forma polar $z - z_0 \equiv Re^{i\theta}$ e integrado a lo largo de una circunferencia de radio R centrada en $z = z_0$

7. Teorema Integral de Cauchy

7.1. El Teorema y las Regiones

El teorema integral de Cauchy es uno de los dos teoremas básicos en la teoría de funciones de variable compleja. Este teorema considera que si $f(z)$ es analítica en una región simplemente conexa, \mathcal{R} , en su contorno \mathcal{C} y su derivada $f'(z)$ existe y es continua en esta región⁴, entonces la circulación a lo largo de cualquier contorno cerrado \mathcal{C} se anula. Esto es

$$\oint_{\mathcal{C}} dz f(z) = 0$$

⁴Esta última condición no es necesaria, pero la demostración del Teorema se torna mucho más sofisticada, y referimos al lector a los libros especializados, vale decir a las referencias [Churchill y Brown 1989, Knopp 1996]

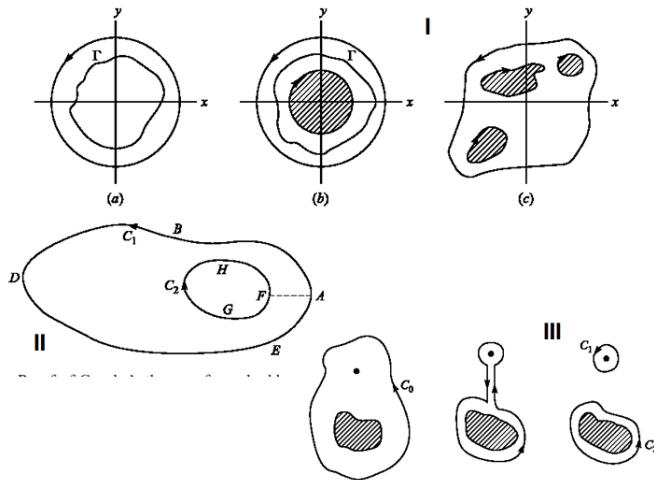


Figura 5: Regiones en el plano complejo

Antes que nada, y como parte de ese adiestramiento en lenguaje, precisaremos qué queremos decir (qué quieren decir los matemáticos) con regiones *simplemente conexa* y *múltiplemente conexa*

Una región *simplemente conexa* es aquella que no tiene “huecos”, o dicho de una manera más precisa y elegante, en la cual una curva Γ puede ser reducida (encogida) a un punto sin salir de la región \mathcal{R} . En la figura 5 cuadrante Ia se muestra una región simplemente conexa y en los cuadrantes Ib y Ic regiones *múltiplemente conexas*. Estas dos últimas figuras clarifican este concepto. Es decir, una *región múltiplemente conexa* es aquella que no es *simplemente conexa* y con eso queremos decir que “tiene huecos”, o lo que es lo mismo existen curvas que no se pueden reducir a puntos en la región.

Tal y como hemos comentado la demostración rigurosa del Teorema de Cauchy está fuera de los alcances de estas notas, pero algo se puede hacer si invocamos el Teorema de Stokes (o uno de los Teoremas de Green en el plano) que vimos cuando estudiamos análisis vectorial. Con ello recordamos la ecuación (8), entonces

$$\int_{z_1}^{z_2} dz f(z) = \int_{x_1, y_1}^{x_2, y_2} (u(x, y)dx - v(x, y)dy) + i \int_{x_1, y_1}^{x_2, y_2} (v(x, y)dx + u(x, y)dy)$$

El Teorema de Stokes no dice que

$$\int_{\mathcal{R}} dx dy \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} \right) = \oint_C (p dy - q dx)$$

con lo cual, si una vez más suponemos $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ y $dz = dx + idy$, entonces tendremos que

$$\oint_C (udx - vdy) + i \oint_C (vdx + udy) = \int_{\mathcal{R}} dx dy \left(\frac{\partial(-v)}{\partial x} + \frac{\partial(-u)}{\partial y} \right) + i \int_{\mathcal{R}} dx dy \left(\frac{\partial(u)}{\partial x} + \frac{\partial(-v)}{\partial y} \right) = 0$$

y acto seguido, como $f(z)$ es analítica, invocamos las condiciones de Cauchy Riemann (ecuación (2)) y es inmediato ver que se anula la integral de circulación.

7.2. Algunas observaciones y el Teorema de Morera

De la anterior “demostración” del Teorema de Cauchy Riemann emergen algunas observaciones

- La primera es la insistencia de que la condición que la derivada $f'(z)$ existe y es continua en esta región no es necesaria.
- La segunda es que el Teorema de Cauchy Riemann, es válido también para regiones múltiplemente conexas. Consideremos una región como la descrita en la figura 5 cuadrante II , es claro que podemos circular la integral en los siguientes contornos

$$\oint_C dz f(z) = \int_{ABDEAFGHFA} dz f(z) \equiv \int_{ABDEA} dz f(z) + \int_{AF} dz f(z) + \int_{FGHF} dz f(z) + \int_{FA} dz f(z) = 0$$

y como $\int_{AF} dz f(z) = -\int_{FA} dz f(z)$ entonces

$$\int_{ABDEA} dz f(z) + \int_{FGHF} dz f(z) = 0 \Leftrightarrow \oint_{C_1} dz f(z) + \oint_{C_2} dz f(z) = 0$$

con lo cual se nota que para regiones múltiplemente conexas, a pesar que las circulaciones son opuestas, el “observador” que circula por C_1 y C_2 siempre tiene la región \mathcal{R} a su izquierda.

- Siguiendo con la reflexión anterior, podemos invertir el sentido de la circulación en el contorno C_2 con lo cual

$$\oint_{C_1} dz f(z) - \oint_{C_2} dz f(z) = 0 \Leftrightarrow \oint_{C_1} dz f(z) = \oint_{C_2} dz f(z)$$

Es decir, que si $f(z)$ es analítica en una región \mathcal{R} , da igual cualquier recorrido por las fronteras de una región y el valor de la integral permanecerá inalterado.

- Más aún este resultado puede extenderse a regiones con n huecos de tal forma que, tal y como ilustra en la figura 5 cuadrante III

$$\oint_{C_1} dz f(z) = \sum_{j=1}^n \oint_{C_j} dz f(z)$$

Con lo cual estamos afirmando que, dada una región que contiene un número finito (¿numerable?) n de singularidades, la integral a lo largo del contorno que encierra la región \mathcal{R} es equivalente a la suma de las integrales que encierran cada una de las n singularidades.

Enunciaremos sin demostración el Teorema de Morera⁵, también conocido como el teorema inverso de Cauchy.

Teorema de Morera: Si una función $f(z)$ es continua en una región \mathcal{R} encerrada por un contorno C y $\oint_C dz f(z) = 0$ entonces $f(z)$ es analítica en \mathcal{R}

Ejemplo: Considere la función definida en una región \mathcal{R}

$$f(z) = \frac{1}{z - z_0} \quad \text{con } \begin{cases} z_0 \text{ fuera de la región } \mathcal{R} \\ z_0 \text{ dentro de la región } \mathcal{R} \end{cases}$$

- Si z_0 está **fuera** de la región, entonces $f(z)$ es analítica en \mathcal{R} , con lo cual el Teorema de Cauchy implica que

$$\oint_C dz f(z) = 0$$

⁵Pueden consultar la demostración en la referencia [Arfken, Weber y Weber 2000]

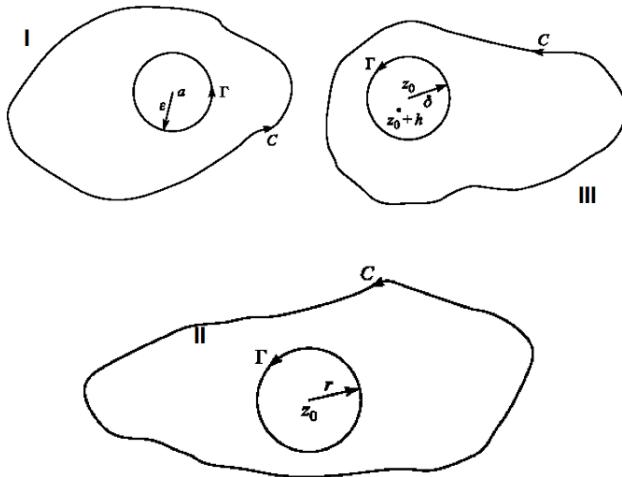


Figura 6: Circulaciones y Polos

- Si z_0 está **dentro** de la región, entonces $f(z)$ no es analítica en \mathcal{R} por cuanto existe una singularidad $z = z_0$. Si consideramos C el contorno que bordea a \mathcal{R} , como una circunferencia centrada en $z = z_0$ y Γ otra circunferencia que aisla a z_0 con un radio $|z - z_0| = \epsilon$ (esta situación se ilustra en la figura 6 cuadrante I). Entonces, si hacemos $z - z_0 = \tilde{z} = \epsilon e^{i\theta}$ el Teorema de Cauchy implica

$$\oint_C \frac{dz}{z - z_0} = \oint_{\Gamma} \frac{dz}{z - z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{\epsilon i e^{i\theta} d\theta}{\epsilon e^{i\theta}} = i \int_0^{2\pi} d\theta = 2i\pi$$

7.3. Fórmula integral de Cauchy

El ejemplo de la sección anterior nos lleva a una de las expresiones más útiles e importantes del análisis complejo: *La Fórmula Integral de Cauchy* la cual dice que si $f(z)$ es analítica en una región \mathcal{R} encerrada por un contorno C y consideramos un punto $z = z_0$ contenido en esa región, entonces

$$\frac{1}{2i\pi} \oint_C \frac{f(z) dz}{z - z_0} = f(z_0)$$

Para probar esta afirmación supongamos, una vez más un circuito en encierra al polo $z = z_0$ (ver figura 6, cuadrante II). Con lo cual, como $f(z)$ es analítica en una región, el Teorema de Cauchy nos garantiza

$$\frac{1}{2i\pi} \oint_C \frac{f(z) dz}{z - z_0} = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\Gamma} \frac{f(z) dz}{z - z_0} \quad \text{si } z - z_0 = re^{i\theta} \quad \Rightarrow \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta}) rie^{i\theta} d\theta}{re^{i\theta}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta$$

si hacemos $r \rightarrow 0$ tendremos que

$$\frac{1}{2i\pi} \oint_C \frac{f(z) dz}{z - z_0} = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\Gamma} \frac{f(z) dz}{z - z_0} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lim_{r \rightarrow 0} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta = f(z_0)$$

Observaciones Surgen también observaciones al respecto

- Obvio que es válido para regiones múltiplemente conexas y es fácil demostrarlo. Se lo dejamos al lector como ejercicio.

- Si reacomodamos la expresión para la forma integral podemos hacer en esa fórmula es válida para todo z

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}$$

- Más aún veremos que es fácil generalizar esta fórmula para derivadas de funciones, vale decir

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}}$$

Veamos con el caso más sencillo y demostremos que para $n = 1$

$$f'(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^2} \Rightarrow f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z) dz}{h} \left\{ \frac{1}{z - z_0 - h} - \frac{1}{z - z_0} \right\} dz \right]$$

tal y como se muestra en la figura 6, cuadrante III tenemos que

$$f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z) dz}{(z - z_0 - h)(z - z_0)} \right] = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^2}$$

Pero mucho más interesante hubiera sido “derivar respecto a una constante”. Este truco implica que

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} \Rightarrow f^{(n)}(z) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{\partial^n}{\partial z^n} \left[\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \right] d\zeta = \frac{n!}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}} \quad (9)$$

Esta fórmula es muy útil para calcular integrales. Considere, por ejemplo la siguiente integral

$$I = \oint_{\mathcal{C}} \frac{e^{2z} dz}{(z + 1)^4} \equiv \frac{2i\pi}{3!} f^{(3)}(-1) \quad \text{con } f(z) = e^{2z} \quad \Rightarrow I = \frac{8i\pi}{3} e^{-2}$$

donde hemos supuesto que el contorno \mathcal{C} encerraba el punto $z = -1$, porque de otro modo la función $\frac{e^{2z}}{(z + 1)^4}$ sería analítica y la integral se anularía por el Teorema de Cauchy.

8. Otra vez Taylor y ahora Laurent

En la sección 2.2 consideramos series complejas de potencias. En esta sección revisaremos, desde la perspectiva de haber expresado la derivada n -ésima de una función analítica en la ecuación (9), el equivalente a las series de Taylor para funciones complejas de variable complejas.

8.1. Series de Taylor para funciones analíticas

Si $f(z)$ es analítica en un círculo de radio R , encerrado por un contorno \mathcal{C} y centrado en un punto $z = z_0$. Entonces $f(z)$ puede ser expandida en series de potencias (enteras positivas) para todo $|z - z_0| < R$ de la forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \equiv f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2}(z - z_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n + R_n$$

con el resto $R_n(z)$ definido como

$$R_n(z) = \frac{(z - z_0)^n}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^n (\zeta - z)}$$

Para probar esta afirmación partimos de la fórmula integral de Cauchy escrita convenientemente

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} d\zeta \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \left[\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} \right] \quad (10)$$

de donde

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} \equiv \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} d\zeta \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \left[1 + \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right) + \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^2 + \cdots + \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n + \frac{\left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^{n+1}}{\left(\frac{\zeta - z}{\zeta - z_0} \right)} \right]$$

este último corchete proviene de una forma ingeniosa de utilizar una serie geométrica de razón $r = \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}$.

Para entenderlo, recordemos que para una serie geométrica, se cumple que

$$1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} = \frac{1}{1 - r} - \frac{r^{n+1}}{1 - r} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{1 - r} = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n + \frac{r^{n+1}}{1 - r} \quad (11)$$

Entonces

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} \equiv \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} d\zeta \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \left[\sum_{j=0}^n \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^j + \frac{\left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^{n+1}}{\left(\frac{\zeta - z}{\zeta - z_0} \right)} \right] \quad (12)$$

con lo cual

$$f(z) = \sum_{j=0}^n (z - z_0)^j \left(\frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} d\zeta \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{j+1}} \right) + R_n(z) = \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(z_0)}{j!} (z - z_0)^j + R_n(z) \quad (13)$$

donde

$$R_n(z) = \frac{(z - z_0)^n}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} d\zeta \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^n (\zeta - z)} \quad (14)$$

Obvio que la serie (13) converge si $R_n(z) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ y de eso es fácil convencerse al acotar la ecuación (14). Esto es, considerando ζ sobre el contorno \mathcal{C} y z en el interior de \mathcal{R} , entonces

$$|R_n(z)| = \left| \frac{(z - z_0)^n}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} d\zeta \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^n (\zeta - z)} \right| < \frac{|z - z_0|^n}{2\pi} \oint_{\mathcal{C}} \left| \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^n (\zeta - z)} d\zeta \right| < \frac{|z - z_0|^n}{2\pi} M \frac{1}{R^n} 2\pi R \quad (15)$$

donde, una vez más, hemos utilizado la forma polar $\tilde{\zeta} = \zeta - z_0 = Re^{i\theta}$ y hemos acotado $\left| \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \right| < M$, con

lo cual es inmediato constatar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z - z_0}{R} \right|^n = 0 \Rightarrow R_n(z) \rightarrow 0$, con lo cual la serie converge.

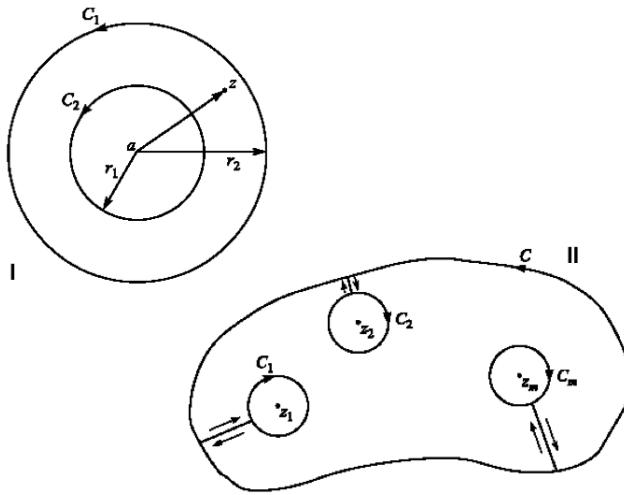


Figura 7: Expansión de Laurent

Ejemplos Expanda

- $f(z) = \frac{1}{1-z}$ alrededor de $z = z_0$

$$f(z) = \frac{1}{1-z_0} + \frac{1}{(1-z_0)^2}(z-z_0) + \frac{1}{(1-z_0)^3}(z-z_0)^2 + \frac{1}{(1-z_0)^4}(z-z_0)^3 + \dots + \frac{(z-z_0)^n}{(1-z_0)^{n+1}} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(1-z_0)^{n+1}}$$

- $f(z) = \ln 1+z$ alrededor de $z = 0$ (Serie de Maclaurin)

$$f(z) = \ln 1+z = \ln(1+z)|_{z=0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n!}{(1-z)^{n+1}} \Big|_{z=0} z^n \equiv f(0) + f'(0)z + \frac{f''(0)}{2}z^2 + \frac{f'''(0)}{3!}z^3 + \dots = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \dots$$

- $f(z) = \ln \left(\frac{1+z}{1-z} \right)$ alrededor de $z = 0$ (Serie de Maclaurin)

$$\ln \left(\frac{1+z}{1-z} \right) \equiv \ln(1+z) - \ln(1-z) = \left(z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} \dots \right) - \left(-z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} \dots \right) = 2 \left(z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} \dots \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2z^{2n+1}}{2n+1}$$

8.2. Series de Laurent

Hemos dicho que si una función $f(z)$ es analítica en una región (digamos que circular) \mathcal{R} , entonces puede ser expandida por series de Taylor. Sin embargo, si $f(z)$ tiene un polo de orden p , digamos, en $z = z_0$, dentro de la región \mathcal{R} , no será analítica en ese punto, mientras que $g(z) = (z - z_0)^p f(z)$ si lo será en todos los puntos de esa región. Entonces $f(z)$ podrá ser expandida como series de potencias (de Laurent) de la

forma

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_k (z-z_0)^k = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} \quad \text{con } a_n = \frac{1}{2i\pi} \oint_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta-z)^{n+1}} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (16)$$

o equivalentemente

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^p} = \frac{a_{-p}}{(z-z_0)^p} + \frac{a_{-p+1}}{(z-z_0)^{p-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots \quad (17)$$

La suma de todos los términos que tengan potencias negativas, vale decir $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}$, se denomina *parte principal* de $f(z)$.

Para demostrar (16) o (17), recordamos que, tal y como muestra la figura 7 cuadrante I , si $f(z)$ es analítica en la región anular, entonces el Teorema de Cauchy, nos garantiza que

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{C_1} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} + \frac{1}{2i\pi} \oint_{C_2} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} \equiv \frac{1}{2i\pi} \oint_{C_1} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2i\pi} \oint_{C_2} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}$$

donde en el segundo caso hemos supuesto que ambas circulaciones tienen el mismo sentido.

Del mismo modo como procedimos en la ecuación (10) re escribimos el segundo par de integrales como

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{C_1} d\zeta \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \left[\frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{\zeta-z_0}} \right] + \frac{1}{2i\pi} \oint_{C_2} d\zeta \frac{f(\zeta)}{z-z_0} \left[\frac{1}{1 - \frac{\zeta-z_0}{z-z_0}} \right]$$

y ahora invocando, una vez más la progresión geométrica (11) podemos construir expresiones de integrales equivalentes a la ecuación (12). Vale decir

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{C_1} d\zeta \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \left[\sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0} \right)^j + \frac{\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0} \right)^n}{\left(\frac{\zeta-z}{\zeta-z_0} \right)} \right] + \frac{1}{2i\pi} \oint_{C_2} d\zeta \frac{f(\zeta)}{z-z_0} \left[\sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{\zeta-z_0}{z-z_0} \right)^j + \frac{\left(\frac{\zeta-z_0}{z-z_0} \right)^n}{\left(\frac{\zeta-z}{z-z_0} \right)} \right]$$

y equivalentemente

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \sum_{j=0}^{n-1} (z-z_0)^j \underbrace{\oint_{C_1} d\zeta \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{j+1}}}_{a_n} + R_{n1}(z) + \frac{1}{2i\pi} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{(z-z_0)^{j+1}} \underbrace{\oint_{C_2} d\zeta f(\zeta)(\zeta-z_0)^j}_{a_{-n}} + R_{n2}(z) \quad (18)$$

Con lo cual queda demostrado la forma funcional de los coeficientes de la expansión de Laurent. La demostración de la convergencia, esto es $n \rightarrow \infty \Rightarrow R_{n1}(z) \rightarrow R_{n2}(z) \rightarrow 0$ sigue el mismo esquema que utilizamos para demostrar la convergencia de la ecuación (15) y se lo dejamos como ejercicio al lector.

8.3. Algunos Ejemplos

En muchos casos las expansiones en series de Laurent no se generan a partir de la fórmula de la ecuación (16) sino a partir de manipulaciones algebraicas y expansiones en Taylor moduladas por otros factores.

Consideremos los siguientes ejemplos de desarrollo en Series de Laurent

1.

$$f(z) = \frac{1}{z(z-2)^3}$$

Alrededor de las singularidades $z = 0$ y $z = 2$

2.

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)}$$

Esta función tiene polos de orden 1 en $z = -1$ y $z = -3$. Además expresando $f(z)$ como una suma de fracciones parciales, tendremos

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z+1} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z+3} \right)$$

a) para $1 < |z| < 3$

Expresando $f(z)$ como una suma de fracciones parciales, tendremos

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z+1} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z+3} \right)$$

b) para $|z| > 3$

c) para $0 < |z+1| < 2$

d) para $|z| < 1$

3.

$$f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-1)^3}$$

4.

$$f(z) = \frac{z - \operatorname{sen} z}{z^3}$$

9. Integración por el método de los residuos

Desde siempre hemos sabido que las expansiones de funciones en series de potencias dejan “residuos” al detener la expansión para una determinada potencia. Esto se puede apreciar claramente en la expresión de Taylor para funciones analíticas (13) y, en particular en (14). Ahora, las expansiones de Laurent (18) nos muestran otro “residuo”. Explotaremos las series de Laurent para funciones con polos y construiremos un método para evaluar integrales de funciones en esos puntos. Primero estudiaremos los residuos en general y luego los utilizaremos para evaluar integrales.

9.1. Los residuos de Laurent

Hemos dicho que si $f(z)$ tiene un polo de orden p en $z = z_0 \in \mathcal{R}$, entonces

$$\oint_C dz f(z) \neq 0 \Rightarrow f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_k (z-z_0)^k = \frac{a_{-p}}{(z-z_0)^p} + \frac{a_{-p+1}}{(z-z_0)^{p-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots$$

más aún, siguiendo (16) tendremos que los coeficientes de la expansión pueden ser calculados a partir de

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad \text{si } n = -1 \Rightarrow \oint_{\mathcal{C}} f(\zeta) d\zeta = 2i\pi a_{-1} \equiv 2i\pi \operatorname{Res} f(z) \quad (19)$$

Es decir, la integración a lo largo de un contorno \mathcal{C} que aísla al polo $z = z_0$ es proporcional al residuo correspondiente a la expansión de Laurent alrededor de ese polo. Nos queda entonces calcular el residuo para así no calcular la integral.

Esta situación se ilustra con el siguiente ejemplo. Supongamos

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^4} = \frac{1}{z^4} \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} \right) + \dots = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{3!z} + \frac{z}{5!} + \dots \Rightarrow a_{-1} = -\frac{1}{3!} \Rightarrow \oint_{\mathcal{C}} f(\zeta) d\zeta = 2i\pi a_{-1} = -\frac{i\pi}{3}$$

En general, si $f(z)$ tiene un polo de orden p en $z = z_0 \in \mathcal{R}$, entonces

$$(z - z_0)^p f(z) = a_{-p} + a_{-p+1}(z - z_0) + \dots + a_0(z - z_0)^p + \dots \Rightarrow \frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}}[(z - z_0)^p f(z)] = (p-1)! a_{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$$

con lo cual

$$a_{-1} \equiv \operatorname{Res} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \left(\frac{1}{(p-1)!} \frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}}[(z - z_0)^p f(z)] \right)$$

Si, por ejemplo consideramos

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2 + 1)^2} \equiv \frac{e^{iz}}{(z+i)^2(z-i)^2} \Rightarrow \begin{cases} z_0 = i \Rightarrow \frac{d}{dz}[(z-i)^2 f(z)] = \frac{d}{dz} \left[\frac{e^{iz}}{(z+i)^2} \right] \\ z_0 = -i \Rightarrow \frac{d}{dz}[(z+i)^2 f(z)] = \frac{d}{dz} \left[\frac{e^{iz}}{(z-i)^2} \right] \end{cases}$$

con lo cual

$$\operatorname{Res} \frac{e^{iz}}{(z^2 + 1)^2} \Big|_{z=i} = \lim_{z \rightarrow i} \left(\frac{1}{1!} \frac{d}{dz} \left[\frac{e^{iz}}{(z+i)^2} \right] \right) = \lim_{z \rightarrow i} \left(\frac{(z+i)^2 i e^{iz} - e^{iz} 2(z+i)}{(z+i)^2} \right) = \frac{-4ie^{-1} - -4ie^{-1}}{16} = -\frac{i}{2e}$$

del mismo modo se procede para el caso $z = -i$

Un caso particular y muy útil lo constituyen las funciones racionales del tipo $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ y $f(z)$ tiene un polo simple en $z = z_0$. Esto es $q(z_0) = 0$ entonces

$$\operatorname{Res} f(z)|_{z=z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \left(\frac{(z - z_0)p(z)}{q(z)} \right) = p(z_0) \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z - z_0)}{q(z)} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

porque hemos utilizado el Teorema de l'Hopital. Este caso lo podemos ejemplificar si consideramos una función

$$f(z) = \frac{4 - 3z}{z^2 - z} \equiv \frac{4 - 3z}{z(z-1)} \quad \text{con lo cual tendría polos en } z = 0; z = 1 \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{Res} f(z)|_{z=0} = \frac{4 - 3z}{2z-1} \Big|_{z=0} = -4 \\ \operatorname{Res} f(z)|_{z=1} = \frac{4 - 3z}{2z-1} \Big|_{z=1} = 1 \end{cases}$$

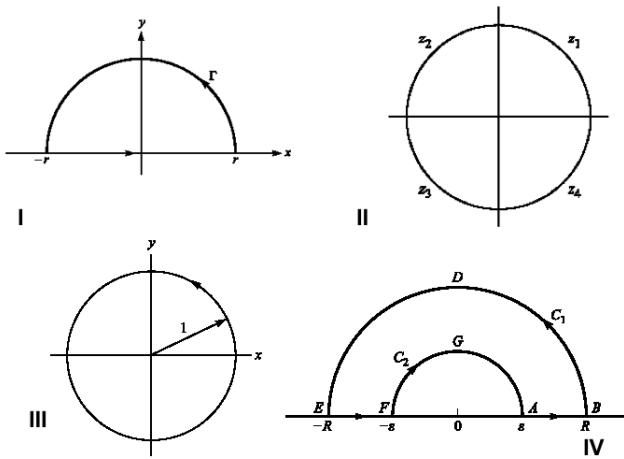


Figura 8: Circuitos e Integrales

9.2. Teorema del Residuo

Hemos visto como calcular las integrales de funciones, en regiones múltiplemente conexas, con polos simples a partir de residuos. Ahora generalizaremos ese esquema para una región, también en múltiplemente conexa, pero con un número finito de polos. Tal y como se muestra en la figura 7 en el cuadrante *II*, realizamos una circulación ingeniosa, de tal modo que aislamos los distintos polos. Ahora bien, como la función es analítica en la región bordeada por todos esos contornos, entonces

$$\left[\oint_C dz f(z) + \oint_{C_1} dz f(z) + \oint_{C_2} dz f(z) + \cdots + \oint_{C_m} dz f(z) \right] = 0$$

y al cambiar el sentido de circulación comprobamos lo que ya sabíamos

$$\oint_C dz f(z) = \oint_{C_1} dz f(z) + \oint_{C_2} dz f(z) + \cdots + \oint_{C_m} dz f(z) \Leftrightarrow \oint_C dz f(z) = 2i\pi \sum_{j=1}^m \text{Res } f(z)_{z=z_{0j}}$$

donde hemos utilizado lo que hicimos para la ecuación (19)

Con ello podemos enunciar el Teorema del Residuo que ya hemos demostrado

Si $f(z)$ es analítica en una región \mathcal{R} excepto en un número, m , finito de polos $z_{01}, z_{02}, z_{03}, \dots, z_{0m}$ entonces

$$\oint_C dz f(z) = 2i\pi \sum_{j=1}^m \text{Res } f(z)_{z=z_{0j}} =$$

Una vez más ejemplificamos

- 9.3. Integrales impropias $\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x)$
- 9.4. Integrales de funciones racionales de $\cos \theta$ y $\sin \theta$
- 9.5. Integrales de Fourier
- 9.6. Otras Integrales Imprópias

Referencias

- [Aleksandrov Kolmogorov y Lavrentiev 1999] A. D. Aleksandrov, A. N. Kolmogorov y M. A. Lavrentiev (1999) **Mathematics: Its Content, Methods and Meaning.** (*Dover Publications, New York*) Existe traducción por Editorial Alianza Universidad.
- [Arfken, Weber y Weber 2000] Arfken, G. B., Weber, y H., Weber, H.J. (2000) **Mathematical Methods for Physicists** 5ta Edición (*Academic Press, Nueva York*)
- [Byron y Fuller 1970] Byron, F.W. y Fuller W.F. (1970) **Mathematics of Classical and Quantum Physics** (*Dover Publications, New York*)
- [Chow 2000] T. L. Chow (2000) **Mathematical Methods for Physicists: A Concise Introduction** (*Cambridge University Press, Cambridge*)
- [Churchill y Brown 1989] R. V. Churchill y J. W. Brown (1989) **Complex Variables and Applications** (*McGraw-Hill, New York*).
- [Denney y Krzywicki 1995] P. Denney y A. Krzywicki (1995) **Mathematics for Physicists** (*Dover Publications, New York*)
- [Gonzalez 2003] A. González-López **Variable Compleja** Universidad Complutense de Madrid, Madrid España. Disponible en <http://www.ucm.es/info/metodos/pdf/Apuntes/vc-ag/vc-ag.pdf>
- [Harper 1971] Harper, C. (1971) **Introduction to Mathematical Physics** (*Prentice Hall, Englewood Cliff, N.J.*)
- [Knopp 1996] K. Knopp (1996) **Theory of Functions, Parts I and II** (*Dover Publications, New York*)
- [math-atlas.org URL] **The Mathematical Atlas** <http://www.math-atlas.org/welcome.html>
- [Núñez 2005] L.A. Núñez (2005) **Los Vectores de Siempre** Formulario de Métodos Matemáticos de la Física 1. Universidad de Los Andes, Mérida Venezuela, Disponible en <http://webdelprofesor.ula.ve/ciencias/nunez/cursos.html>
- [Núñez 2006] L.A. Núñez (2006) **Serie de Series** Formulario de Métodos Matemáticos de la Física 2. Universidad de Los Andes, Mérida Venezuela, Disponible en <http://webdelprofesor.ula.ve/ciencias/nunez/cursos.html>
- [Riley, Hobson y Bence 2002] Riley, K.F., Hobson, M.P. y Bence, S.J. (2002) **Mathematical Methods for Physics and Engineering** (*Cambridge University Press, London*)
- [Spiegel 1959] Spiegel, M. (1967) **Variable Compleja** (*Schaum's Outline Series, McGraw Hill New York*)
- [Weisstein URL] Weisstein, E. W., **MathWorld** <http://mathworld.wolfram.com/>
- [Wyld 1999] H. W. Wyld (1999) **Mathematical Methods for Physics** (*Westview Press, Boulder Co.*)