Métodos Matemáticos de la Física 2
Examen Parcial
Serie de Series
Abril 2007

Nombre____

1. Típicamente los bancos tienen una tasa de interés de un 7 % anual. Si ahorramos Bs. 50.000 mensual. Determine el monto acumulado al cabo de 25 años

   a) Si los intereses se abonan al capital sobre un saldo semestral

   b) Si los intereses se abonan al capital sobre un saldo mensual

   (3 ptos)

Solución La serie de ahorro para el caso de abono de los intereses en un tiempo T será

$$S_N = s_{T1} + s_{T2} + \cdots + s_{Tn} + \cdots + s_{TN}$$

donde s_{Tn} representa el saldo en el período en el cual se abonen los intereses. Por lo tanto

$$S_N = s_{T1} + s_{T1}\left(1 + \frac{Int}{Nveces}\right) + s_{T1}\left(1 + \frac{Int}{Nveces}\right)\left(1 + \frac{Int}{Nveces}\right) + \cdots + s_{T1}\left(1 + \frac{Int}{Nveces}\right)^N$$

donde hemos representado Int el interés anual, $Nveces$ el número de veces al año que se abonan los intereses y N las veces que se abonan los intereses. Claramente la serie

$$S_N = s_{T1}\left(\sum_{n=0}^{N}\left(1 + \frac{Int}{Nveces}\right)^n\right) = s_{T1}\frac{\left(1 + \frac{Int}{Nveces}\right)^{N+1} - 1}{\left(1 + \frac{Int}{Nveces}\right) - 1}$$

por ser una serie geométrica de razón $r = \left(1 + \frac{Int}{Nveces}\right)$.
Para el caso de abono semetral de los intereses $Int = 0{,}07;\ N = 50;\ Nveces = 2$

$$S_{50} = 50{,}000 \times 6\left(\frac{\left(1 + \frac{0{,}07}{2}\right)^{50+1} - 1}{\left(1 + \frac{0{,}07}{2}\right) - 1}\right) \approx Bs{,}40{,}974{,}851$$

y para el abono de intereses sobre saldos mensuales

$$S_{300} = 50{,}000\left(\frac{\left(1 + \frac{0{,}07}{12}\right)^{300+1} - 1}{\left(1 + \frac{0{,}07}{12}\right) - 1}\right) \approx 40{,}789{,}852$$

2. La energía promedio de un sistema de osciladores cuánticos, cada uno de frecuencia ν y temperatura T puede expresarse

$$\bar{E} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} nh\nu \exp\left[-nx\right]}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp\left[-nx\right]} \qquad \text{con} \quad x = \frac{h\nu}{kT}$$

   donde h, la constante de Planck y k la constante de Boltzmann. Muestre que esa serie converge y calcule su suma[1]. (6 ptos)

[1] Ayuda: derive la serie del denominador y compárela con el numerador

Solución: Para la serie del numerador se tiene que

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(n+1)h\nu e^{-(n+1)x}}{nh\nu e^{-nx}}\right| = \left|\frac{(n+1)}{n}e^{-x}\right| \qquad \text{si} \quad n\to\infty \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to e^{-x}$$

la serie del numerador converge. La serie del denominador es una serie geométrica de razón $r = e^{-x}$, que es menor que 1 y por lo tanto También converge.

Para calcular expresión de la energía promedio, debemos calcular la de las series en el numerador y denominador. Como hemos dicho la serie del denominador es una serie geométrica y por lo tanto tendrá com suma

$$S_{deno} = 1 + e^{-x} + e^{-2x} + \cdots + e^{-nx} = \frac{1}{1-e^{-x}}$$

Adicionalmente, nos damos cuenta que la serie del numerador es la derivada de la serie del denominador

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(S_{deno}\right) = -e^{-x} - 2e^{-2x} + \cdots - ne^{-nx} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1-e^{-x}}\right) = \frac{e^{-x}}{\left(1-e^{-x}\right)^2}$$

con lo cual

$$\bar{E} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} nh\nu \exp\left[-nx\right]}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp\left[-nx\right]} = \frac{h\nu e^{-x}}{\left(1-e^{-x}\right)^2}\frac{1-e^{-x}}{1} = \frac{h\nu}{e^{x}-1}$$

3. La ecuación de equilibrio hidrostático para un objeto autogravitante, esférico en Relatividad General es

$$\frac{\mathrm{d}\,P}{\mathrm{d}\,r} + (\rho + P)\left(\frac{m + 4\pi r^3 P}{r\,(r-2m)}\right) = R = 0. \quad \text{donde} \quad m(\rho, r) = 4\pi\int_0^r \rho\bar{r}^2 d\bar{r}, \quad \text{y} \quad P_r = P_r(\rho). \qquad (1)$$

Considere que perturbamos la densidad de la forma $\rho + \delta\rho$, con lo cual las perturbaciones en R hasta primer orden se pueden escribir

$$R(\rho+\delta\rho, \rho+\delta\rho, P+\delta P, m+\delta m, r) = R(\rho, P, m, r) + \delta R = R + \mathcal{A}(\rho, P, m, r)\delta\rho$$

encuentre la expresión para la $\mathcal{A}(\rho, P, m, r)$[2]. (5 ptos)

Solución: Expandir R hasta primer orden significa

$$R(\rho+\delta\rho, \rho+\delta\rho, P+\delta P, m+\delta m, r) \approx R_0(\rho, P, m, r) + \underbrace{\frac{\partial R}{\partial \rho}\delta\rho + \frac{\partial R}{\partial P}\delta P + \frac{\partial R}{\partial m}\delta m}_{\delta R}$$

Es decir expandir R series de Taylor de varias variables alrededor del punto de equilibrio (ρ, P, m, r). Ahora bien hemos dicho que pertubamos la densidad y que como consecuencia se perturban las otras variables que son función de ρ. Entonces

$$\rho + \delta\rho \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} P(\rho+\delta\rho, r) \approx P(\rho, r) + \frac{\partial P}{\partial \rho}\delta\rho \\ \\ m(\rho+\delta\rho, r) = 4\pi\int_0^r(\rho+\delta\rho)\bar{r}^2 d\bar{r} \approx m(\rho, r) + \frac{4\pi}{3}r^3\delta\rho \end{array}\right. \qquad (2)$$

[2]Suponga que el gradiente de presiones $\mathrm{d}\,P/\mathrm{d}\,r$ no se ve afectado por las perturbaciones $\delta\rho$

Entonces relacionamos las perturbaciones δP y δm con la perturbación de la densidad, y podremos determinar $\mathcal{A}(\rho, P, m, r)$

$$\delta R = \underbrace{\left(2\frac{\partial R}{\partial \rho} + \frac{4\pi}{3} r^3 \frac{\partial R}{\partial m}\right)}_{\mathcal{A}(\rho,P,m,r)} \delta\rho \tag{3}$$

Explícitamente

$$\frac{\partial P}{\partial \rho} = \frac{m + 4\pi\, P_r r^3}{r(r-2m)} \quad \text{y} \quad \frac{\partial R}{\partial m} = \frac{(\rho + P_r)\left(1 + 8\pi\, P_r r^2\right)}{(r - 2\, m)^2} \tag{4}$$

4. Los polinomios de Laguerre, que se utilizan para encontrar los niveles de energía del átomo de hidrógeno tienen la siguiente función generatriz

$$\mathcal{G}(x,t) = \frac{1}{1-t} e^{-\frac{xt}{1-t}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n}{n!} t^n \tag{5}$$

A partir de la función generatriz (5), muestre que los polinomios de los polinomios de Laguerre cumplen con las siguientes relaciones de recurrencia

$$\frac{\mathrm{d}\, L_n}{\mathrm{d}x} - n\frac{\mathrm{d}\, L_{n-1}}{\mathrm{d}x} + nL_{n-1} = 0 \qquad \text{y} \qquad L_{n+1} - (2n+1-x)L_n + n^2 L_{n-1} = 0 \tag{6}$$

(5 ptos)

Solución: Derivando la función generatriz respecto a x y sustituyendo la expansión en series tendremos

$$\frac{\partial \mathcal{G}(x,t)}{\partial x} = \frac{-t}{1-t}\mathcal{G} \quad \Rightarrow (1-t)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{L'_n}{n!} t^n = -t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n}{n!} t^n \quad \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L'_n}{n!} t^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L'_n}{n!} t^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L'_n}{n!} t^{n+1} = 0$$

con lo cual

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{L'_n}{n!} t^n - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{L'_{m-1}}{(m-1)!} t^m + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{L_{m-1}}{(m-1)!} t^m = 0 \quad \Rightarrow \underbrace{L'_0}_{=0} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{L'_m}{m!} - \frac{L'_{m-1}}{(m-1)!} + \frac{L_{m-1}}{(m-1)!}\right) t^m = 0$$

para que finalmente

$$\frac{L'_m}{m!} - \frac{L'_{m-1}}{(m-1)!} + \frac{L_{m-1}}{(m-1)!} = 0 \quad \Rightarrow L'_m - mL'_{m-1} + mL_{m-1} = 0$$

Ahora derivando respeto a t y siguiendo el mismo procedimiento anterior, se puede escribir

$$\frac{\partial \mathcal{G}(x,t)}{\partial t} = -\frac{x-1+t}{(1-t)^2}\mathcal{G}(x,t) \quad \Rightarrow (1-2t+t^2)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nL_n}{n!} t^{n-1} = (1-x-t)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n}{n!} t^n$$

Agrupando y acomodando índices

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m+1)L_{m+1}}{(m+1)!} t^m - \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1-x)\, \frac{L_n}{n!} t^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \frac{L_n}{n!} t^{n+1} = 0$$

y todavía más

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{L_{m+1}}{m!}t^m-\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1-x)\,\frac{L_n}{n!}t^n+\sum_{p=0}^{\infty}\frac{pL_{p-1}}{(p-1)!}t^p=0$$

Finalmente tendremos

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{L_{m+1}}{m!}-(2m+1-x)\,\frac{L_m}{m!}+\frac{mL_{m-1}}{(m-1)!}\right)t^m=0\quad\Rightarrow L_{m+1}-(2m+1-x)\,L_m+m^2L_{m-1}=0$$

5. Determine la expansión de Fourier para la función $f(x)=x$ en el rango $-\pi<x<\pi$ y a partir de ese desarrollo muestre que

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$$

(5 ptos)

Solución: En general la expansión de cualquier función $f=f(x)$ con $0\leq x\leq T$

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right)+b_n\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi nx}{T}\right)\right)\quad\text{con}\quad\left\{\begin{array}{ll}a_0= & \frac{2}{T}\int_{x_0}^{x_0+T}\mathrm{d}x\ f(x)\\ \\ a_n= & \frac{2}{T}\int_{x_0}^{x_0+T}\mathrm{d}x\ f(x)\cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right)\\ \\ b_n= & \frac{2}{T}\int_{x_0}^{x_0+T}\mathrm{d}x\ f(x)\ \mathrm{sen}\left(\frac{2\pi nx}{T}\right)\end{array}\right.$$

En nuestro caso particular tenemos que $f(x)=x$ (una función impar) y el período es $T=2\pi$ el término a_0 y los coeficientes de Fourier pares, a_n, se anulan. Los coeficientes impares serán

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}x\ x\ \mathrm{sen}\ (nx)=\left.\frac{\mathrm{sen}\ (nx)}{\pi n^2}\right|_{-\pi}^{\pi}-\left.\frac{2x\cos(nx)}{\pi n}\right|_{-\pi}^{\pi}=-\frac{2\cos(n\pi)}{n}=2\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

y la serie de Fourier quedaría

$$x=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\mathrm{sen}\ (nx)\quad\underbrace{\Rightarrow}_{x=\frac{\pi}{2}}\frac{\pi}{4}=\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^{p+1}}{2p-1}\mathrm{sen}\left((2p-1)\frac{\pi}{2}\right)=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$$