Métodos Matemáticos de la Física 2
Examen Parcial
Variable Compleja
Abril 2007

Nombre____

1. Evalue las siguientes funciones

   a) i^i

Solución:

$$i^i = \left(\exp i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)\right)^i = \exp i^2\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = \exp\left(-\frac{\pi}{2} - 2n\pi\right)$$

   b) $\ln\left(\left\{\sqrt{3}+i\right\}^3\right)$

Solución:

$$\ln\left(\left\{\sqrt{3}+i\right\}^3\right) = 3\ln\left(2\exp i\left[\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}\right]\right) = 3\left(\ln 2 + i\left[\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}\right]\right) = \ln 8 + i\left(\frac{\pi}{2} + 6n\pi\right)$$

   (4 ptos)

2. Dado el siguiente polinomio complejo $P(z) = z^6 - z^5 + 4z^4 - 6z^3 + 2z^2 - 8z + 8 = 0$
   Muestre que si por algún método comprobamos que $(z^3 - 2)$ es uno de sus factores, podemos encontrar las raíces del polinomio $P(z)$. ¡ Encuentre esas raíces !
   (4 ptos)

Solución: Claramente si $(z^3 - 2)$ es un factor podemos expresar

$$P(z) = z^6 - z^5 + 4z^4 - 6z^3 + 2z^2 - 8z + 8 = (z^3-2)(z^3 - z^2 + 4z - 4) = (z^3-2)(z-1)(z^2+4)$$

con lo cual, como z es complejo, hay que tener cuidado de las raíces encubiertas

$$z^3 = 2 \quad \Rightarrow (a+ib)^3 = 2 \quad \Rightarrow a^3 - 3ab^2 + i(3a^2b - b^3) = 2 \quad \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a(a^2-3b^2) = 2 \\ \\ b(b^2-3a^2) = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -\frac{1}{\sqrt[3]{4}} \\ \\ b = \pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{4}} \end{array}\right.$$

es decir, las 6 raíces serán

$$z^3 = 2 \quad \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} z = 2 \\ \\ z = -\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\left(1 \pm i\sqrt{3}\right) \end{array}\right. \qquad z = 1, \quad z = \pm 2i$$

3. Una transformación bilineal, se define como

$$w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

   y, entre otras propiedades, lleva tres puntos distintos z_1, z_2, z_3 a otros tres distintos w_1, w_2, w_3. Encontrar la forma de la transformación bilineal que lleva los puntos

$$\left.\begin{array}{l} z_1 = i \\ z_2 = 0 \\ z_3 = 1 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} w_1 = 0 \\ w_2 = 1 \\ w_3 = i \end{array}\right.$$

   donde $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ cantidades complejas (4 ptos).

Solución: Planteamos las ecuaciones.

Para $z_1 \to w_1$

$$\frac{i\alpha + \beta}{i\gamma + \delta} = 0 \quad \Rightarrow i\alpha = -\beta$$

Para $z_2 \to w_2$

$$\frac{\beta}{\delta} = 1 \quad \Rightarrow \beta = \delta$$

Para $z_3 \to w_3$

$$\frac{\alpha + \beta}{\gamma + \delta} = i \quad \Rightarrow \alpha + \beta = i\gamma + i\delta$$

con lo cual se tiene que

$$\alpha + \beta = i\gamma + i\delta \quad \Rightarrow i\beta + \beta = i\gamma + i\beta \quad \Rightarrow \beta = i\gamma$$

y finalmente construimos la transformación bilineal

$$\left.\begin{array}{l} \beta = \delta \\ \alpha = i\beta \\ \beta = i\gamma \end{array}\right\} \quad \Rightarrow w = \frac{i\beta z + \beta}{-i\beta z + \beta} \quad \Rightarrow w = \beta \frac{iz + 1}{-iz + 1}$$

4. Evalue

a)

$$\oint_C \frac{e^{2z} \mathrm{d}z}{(z-2)^2}$$

- Cuando C es una circunsferencia, centrada $z = 0$ y con $|z| = 1$

Solución: Para este caso la función $\frac{e^{2z}}{(z-2)^2}$ es analítica en la región delimitada por la curva C y se cumple que

$$\oint_C \frac{e^{2z} \mathrm{d}z}{(z-2)^2} = 0$$

por el Teorema de Cauchy

- y cuando C es una circunsferencia centrada $z = 0$ y con $|z| = 3$

Solución: Para este caso la función $\frac{e^{2z}}{(z-2)^2}$ tiene un polo en $z - 2$ Por la Integral de Cauchy tenemos que

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2i\pi} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}z \quad \Rightarrow \oint_C \frac{e^{2z}}{(z-2)^2} \mathrm{d}z = 2i\pi \left. \frac{\mathrm{d}e^{2z}}{\mathrm{d}z} \right|_{z=2} = 4i\pi e^4$$

(4 ptos)

b)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2 - 2x)\mathrm{d}x}{(x+1)^2 (x^2 + 4)}$$

(4 ptos)

Solución: Para evaluar este tipo de integrales se convierten al plano complejo esto es, consideramos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2-2x)\mathrm{d}x}{(x+1)^2\,(x^2+4)} \to \oint_{\mathcal{C}} \frac{(z^2-2z)}{(z+1)^2\,(z^2+4)}\mathrm{d}z = \quad \text{con polos en } \left\{ \begin{array}{l} z=1 \\ z=\pm 2i \end{array} \right.$$

y donde la curva C es una semicircunsferencia sobre el plano $z>0$ y el segmento de recta real que cierra esta región. Al considerar esta curva $z=-2i$ deja de ser un polo.
Separamos esa integral en tres integrales de líneas

$$\oint \mathrm{d}z\; F(z) = \int_{-R}^{1-r} \mathrm{d}z\; F(z) + \int_{C_1} \mathrm{d}z\; F(z) + \int_{-R}^{1+r} \mathrm{d}z\; F(z) + \int_{C_2} \mathrm{d}z\; F(z)$$

Donde

$$F(z) = \frac{(z^2-2z)}{(z+1)^2\,(z^2+4)}$$

la curva C_1 rodea e incluye al polo $z=1$ sobre el eje y C_2 es una semicircunsferencia sobre el plano complejo $z>0$
Entonces, el Teorema del Residuo nos dice que

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{(z^2-2z)}{(z+1)^2\,(z^2+4)}\mathrm{d}z = 2i\pi \left(\frac{1}{2}\mathrm{Res}\, \frac{(z^2-2z)}{(z+1)^2\,(z^2+4)}\bigg|_{z=-1} + \mathrm{Res}\, \frac{(z^2-2z)}{(z+1)^2\,(z^2+4)}\bigg|_{z=2i} \right)$$

Los residuos se evalúan fácilmente[1]. Esto es

$$\mathrm{Res}\, \frac{(z^2-2z)}{(z+1)^2\,(z^2+4)}\bigg|_{z=-1} = \lim_{z\to -1} \left(\frac{1}{1!}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{(z^2-2z)}{(z^2+4)} \right] \right) = 2 \lim_{z\to -1} \frac{4\,z+z^2-4}{(z^2+4)^2} = -\frac{14}{25}$$

$$\mathrm{Res}\, \frac{(z^2-2z)}{(z+1)^2\,(z^2+4)}\bigg|_{z=-1} = \lim_{z\to -2i} \frac{(z^2-2z)}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[(z+1)^2\,(z^2+4) \right]} = \lim_{z\to -2i} \frac{(z^2-2z)}{4\,z^3+6\,z^2+10\,z+8} = \frac{1}{25}(7+i)$$

sumando

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{(z^2-2z)}{(z+1)^2\,(z^2+4)}\mathrm{d}z = -2i\pi \left(-\frac{7}{25} + \frac{1}{25}(7+i) \right) = \frac{2\pi}{25}$$

[1] Nótese el factor un medio en el primero de los residuos. Esto ocurre porque la contribución de ese polo es doble.