Métodos Matemáticos de la Física 2
Examen Parcial
Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden
Junio 2007

Nombre____

1. Encuentre los valores de α y β para que la ecuación sea exacta

$$F(x,y) = \left(\frac{1}{x^2+2} + \frac{\alpha}{y}\right)\mathrm{d}x + \left(xy^\beta + 1\right)\mathrm{d}y$$

y con esos valores encuentre la solución de la ecuación (4 ptos)

Soluci'on: Para que sea exacta se debe cumplir que

$$F(x,y) = \mathrm{d}\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\mathrm{d}y \equiv \left(\frac{1}{x^2+2} + \frac{\alpha}{y}\right)\mathrm{d}x + \left(xy^\beta + 1\right)\mathrm{d}y$$

donde obviamente

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \Leftrightarrow \frac{\partial\left(\frac{1}{x^2+2} + \frac{\alpha}{y}\right)}{\partial y} = \frac{\partial\left(xy^\beta + 1\right)}{\partial x} \Leftrightarrow -\frac{\alpha}{y^2} = y^\beta \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha = -1 \\ \beta = -2 \end{array}\right.$$

2. Resuelva

$$\alpha y' + \beta y = g(x) \qquad \text{para } y(1) = 0 \qquad \text{con} \qquad g(x) = \left\{\begin{array}{lll} \beta x^2 & \text{si} & 0 \leq x < 1 \\ \beta & \text{si} & x \geq 1 \end{array}\right.$$

(6 ptos.)

Soluci'on: En general tendremos que

$$y(x) = \left(\int g(x) e^{\frac{\beta x}{\alpha}} \alpha^{-1} dx + C\right) e^{-\frac{\beta x}{\alpha}}$$

Para el primer tramo tendremos

$$\alpha y' + \beta y = \beta x^2 \quad \Rightarrow y(x) = 2\,\frac{\alpha^2}{\beta^2} - 2\,\frac{x\alpha}{\beta} + x^2 + e^{-\frac{\beta x}{\alpha}} C_1$$

la constante de integraci'on queda fija con

$$y(1) \to 0 \quad \Rightarrow 2\,\frac{\alpha^2}{\beta^2} - 2\,\frac{\alpha}{\beta} + 1 + e^{-\frac{\beta}{\alpha}} C_1 = 0 \quad \Rightarrow C_1 \to -\left(2\,\alpha^2 - 2\,\alpha\,\beta + \beta^2\right) e^{\frac{\beta}{\alpha}} \beta^{-2}$$

y para el segundo tramo

$$\alpha \frac{d}{dx} y\left(x\right) + \beta\, y\left(x\right) = \beta \quad \Rightarrow y(x) = 1 + e^{-\frac{\beta\, x}{\alpha}} C_2 \quad \Rightarrow C_2 = -e^{\frac{\beta}{\alpha}}$$

por lo tanto

$$y(x) = \begin{cases} 2\,\frac{\alpha^2}{\beta^2} - 2\,\frac{x\alpha}{\beta} + x^2 + e^{-\frac{\beta\, x}{\alpha}} C_1 & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ \\ 1 + e^{-\frac{\beta\, x}{\alpha}} C_2 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

donde

$$C_1 \rightarrow -\left(2\,\alpha^2 - 2\,\alpha\,\beta + \beta^2\right) e^{\frac{\beta}{\alpha}} \beta^{-2} \qquad \text{y} \qquad C_2 = -e^{\frac{\beta}{\alpha}}$$

3. Resuelva

$$\dot{R}^2 = k\left(\frac{1}{R(t)} - 1\right) \qquad \text{para} \quad R(0) = 1$$

(4 ptos)

Soluci'on: Una forma inmediata es obligarla a ser separable

$$\frac{\mathrm{d}R}{\pm\sqrt{\left(\frac{1}{R} - 1\right)}} = \sqrt{k}\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \begin{cases} t + \frac{\sqrt{-(R(t))^2 k + kR(t)}}{k} - \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{k}\left(R(t) - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{-(R(t))^2 k + kR(t)}}\right)\frac{1}{\sqrt{k}} - C = 0 \\ \\ t - \frac{\sqrt{-(R(t))^2 k + kR(t)}}{k} + \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{k}\left(R(t) - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{-(R(t))^2 k + kR(t)}}\right)\frac{1}{\sqrt{k}} - C = 0 \\ \\ R(t) = 1 \end{cases}$$

La otra es resolverla en forma param'etrica

$$\dot{R} = \frac{\mathrm{d}R(t)}{\mathrm{d}t} = p(t) \quad \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} p^2(t) = k\left(\frac{1}{R(t)} - 1\right) \\ \\ \frac{\mathrm{d}R(t)}{\mathrm{d}t} = p(t) \end{array} \right\} \Rightarrow R(t) = \frac{k}{p(t)^2 + k} \Rightarrow \mathrm{d}R = -2\,\frac{kp}{\left(p^2 + k\right)^2}\mathrm{d}p$$

con lo cual

$$\frac{\mathrm{d}R(t)}{\mathrm{d}t} = p = -2\,\frac{kp}{\left(p^2 + k\right)^2}\frac{\mathrm{d}p(t)}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \mathrm{d}t = -2\,\frac{k}{\left(p^2 + k\right)^2}\mathrm{d}p \Rightarrow t + C = -\frac{p}{p^2 + k} - \arctan\left(\frac{p}{\sqrt{k}}\right)\frac{1}{\sqrt{k}}$$

es decir, la soluci'on ser'a

$$\begin{array}{l} R = \frac{k}{p^2 + k} \\ t = -\frac{p}{p^2 + k} - \arctan\left(\frac{p}{\sqrt{k}}\right)\frac{1}{\sqrt{k}} + C \end{array}$$

4. La ecuación de equilibrio hidrostático para un fluido autogravitante newtoniano es

$$\frac{\mathrm{d}P(r)}{\mathrm{d}r} = -G\frac{m(r)\rho(r)}{r^2} \qquad \text{donde} \quad \frac{\mathrm{d}m(r)}{\mathrm{d}r} = 4\pi r^2\rho(r)$$

Donde $m(r), P(r)$ y $\rho(r)$ representan la función masa, la distribuci ón de presiones y el perfil de densidades, respectivamente. Si consideramos que $m(0) = 0$ y $P(a) = 0$, donde $r = a$ es el borde de la distribución material, ecuentre la distribución de presiones $P(r)$, para un perfil de densidades $\rho = \rho_c e^{-\beta r/a}$ con ρ_c la densidad central constante. (6 ptos)

Soluci'on: Si

$$\rho = \rho_c e^{-\beta r/a} \Rightarrow m(t) = \int_0^r \mathrm{d}\tilde{r}\ 4\pi\tilde{r}^2\rho(\tilde{r}) \equiv \int_0^r \mathrm{d}\tilde{r}\ 4\pi\tilde{r}^2\rho_c e^{-\beta\tilde{r}/a}$$

es decir

$$m(r) = \frac{-4\,a\,(2\,a^2 + 2\,ra\beta + r^2\beta^2)}{\beta^3}\pi\rho_c\, e^{-\frac{\beta\, r}{a}} + \pi\rho_c\frac{8a^3}{\beta^3}$$

con lo cual

$$\frac{\mathrm{d}P(r)}{\mathrm{d}r} = -G\frac{\left(\frac{-4\,a\left(2\,a^2+2\,ra\beta+r^2\beta^2\right)}{\beta^3}\pi\rho_c\, e^{-\frac{\beta\, r}{a}} + \pi\rho_c\frac{8a^3}{\beta^3}\right)\rho_c e^{-\beta r/a}}{r^2}$$

con lo cual se integra