Métodos Matemáticos de la Física 2
Examen Parcial
Ecuaciones Diferenciales de Orden Superior
Julio 2007

Nombre____

Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales.

1.
$$y''' - y'' + 4y' - 4y = e^{2x}\cos 4x$$

6ptos

Solución: Resolvemos primero la homogénea. Esto es construimos su polinomio característico

$$y''' - y'' + 4y' - 4y = 0 \quad \Rightarrow r^3 - r^2 + 4r - 4 = 0 \quad \Rightarrow r = 1 \quad \text{es raíz}$$

entonces

$$r^3 - r^2 + 4r - 4 = (r^2 + 4)(r - 1) = 0 \quad \Rightarrow r = \pm 2i \quad \text{son raíces complejas}$$

con la cual la solución para la ecuación homogénea tendrá la forma

$$y_h(x) = C_1\, e^x + C_2\,\mathrm{sen}(2x) + C_3\,\cos(2\,x)$$

ahora bien la solución de la inhomogénea será por el método de los coeficientes indeterminados. La propuesta de solución inhomogenea será

$$y(x) = e^{2x}\left(A\cos(4x) + B\,\mathrm{sen}(2x)\right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y'(x) = 2e^{2x}(B - 2A)\mathrm{sen}(4x) + 2e^{2x}(A + 2B)\cos(4x) \\ y''(x) = -4e^{2x}(3B + 4A)\mathrm{sen}(4x) - 4e^{2x}(3A - 4B)\cos(4x) \\ y''(x) = 8e^{2x}(2A - 11B))\mathrm{sen}(4x) - 8e^{2x}(11A + 2B)\cos(4x) \end{array} \right.$$

con lo cual al sustituir en la ecuación diferencial nos queda

$$\begin{array}{l} -8\,e^{2\,x}\,(11\,B - 2\,A)\,\mathrm{sen}\,(4\,x) - 8\,e^{2\,x}\,(11\,A + 2\,B)\cos\,(4\,x) \\ +4\,e^{2\,x}\,(3\,B + 4\,A)\,\mathrm{sen}\,(4\,x) + 4\,e^{2\,x}\,(3\,A - 4\,B)\cos\,(4\,x) \\ +8\,e^{2\,x}\,(B - 2\,A)\,\mathrm{sen}\,(4\,x) + 8\,e^{2\,x}\,(A + 2\,B)\cos\,(4\,x) - 4\,e^{2\,x}\,(A\cos\,(4\,x) + B\mathrm{sen}\,(4\,x)) = e^{2x}\cos 4x \end{array}$$

para que finalmente

$$8\,e^{2\,x}\,(2\,A - 9\,B)\,\mathrm{sen}\,(4\,x) - 8\,e^{2\,x}\,(9\,A + 2\,B)\cos\,(4\,x) = e^{2x}\cos 4x$$

es decir

$$\left. \begin{array}{l} (2\,A - 9\,B) = 0 \\ (9\,A + 2\,B) = \frac{-1}{8} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = -\frac{9}{680} \\ B = -\frac{1}{340} \end{array} \right.$$

para que finalmente

$$y(x) = C_1\, e^x + C_2\,\mathrm{sen}(2x) + C_3\,\cos(2\,x) - \frac{9}{85}\cos(2\,x) - \frac{2}{85}\mathrm{sen}(2x)$$

2.
$$y'' + 5y' + 6y = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & 0 \le x \le \pi/2 \\ 1 & \pi/2 < x < \pi \\ e^{\pi - x} & \pi \le x < \infty \end{array} \right.$$

8ptos

Solución: Para abordar la solución a este problema utilizaremos el método de la transformada de Laplace. para ello contruimos la parte inhomgénea con funciones escalones. Esto es

$$y'' + 5y' + 6y = u_{\pi/2}(x) - u_\pi(x) + u_\pi(x)e^{\pi - x} \qquad \text{con} \quad u_c(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & x < c \\ 1 & x \geq c \end{array} \right. \qquad \text{donde} \quad c > 0$$

Entonces, transformado a ambos miembros

$$\mathcal{L}[y'' + 5y' + 6y] = \mathcal{L}[u_{\pi/2}(x) - u_\pi(x) + u_\pi(x)e^{\pi - x}]$$

entonces

$$s^2 Y(s) - y'(0) - sy(0) + 5sY(s) - 5y(0) + 6\, Y(s) = \frac{e^{-\frac{s\pi}{2}} - e^{-s\pi}}{s} + \frac{e^{-s\pi}}{s+1}$$

es decir

$$\left(s^2 + 5s + 6\right) Y(s) = \frac{e^{-\frac{s\pi}{2}} - e^{-s\pi}}{s} + \frac{e^{-s\pi}}{s+1} + (5+s)y_0 + y_0' =$$

con lo cual

$$Y(s) = \frac{e^{-\frac{s\pi}{2}} - e^{-s\pi}}{s(s+3)(s+2)} + \frac{e^{-s\pi}}{(s+1)(s+3)(s+2)} + \frac{(5+s)y_0}{(s+3)(s+2)} + \frac{y_0'}{(s+3)(s+2)}$$

y ahora antitransformado término a término

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-\frac{s\pi}{2}} - e^{-s\pi}}{s(s+3)(s+2)}\right] \rightarrow \frac{\left(1 + 2e^{-3x + \frac{3\pi}{2}} - 3\, e^{-2\,x+\pi}\right)}{6} u_{\frac{\pi}{2}}(x) - \frac{\left(1 + 2e^{-3\,x+3\,\pi} + 3e^{-2\,x+2\,\pi}\right)}{6} u_\pi$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-s\pi}}{(s+1)(s+3)(s+2)}\right] \rightarrow \frac{\left(-2e^{-2x+2\pi} + e^{-3x+3\pi} + e^{\pi - x}\right)}{2} u_\pi(x)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(5+s)y_0 + y_0'}{(s+3)(s+2)}\right] \rightarrow (2y_0 + y_0')e^{-3\,x} - e^{-2\,x}(3y_0 + y_0')$$

entonces

$$y(x) = \frac{\left(1 + 2e^{-3x + \frac{3\pi}{2}} - 3\, e^{-2\,x+\pi}\right)}{6} u_{\frac{\pi}{2}}(x) - \frac{\left(1 + 2e^{-3\,x+3\,\pi} + 3e^{-2\,x+2\,\pi}\right)}{6} u_\pi +$$

$$\frac{\left(-2e^{-2x+2\pi} + e^{-3x+3\pi} + e^{\pi - x}\right)}{2} u_\pi(x) + (2y_0 + y_0')e^{-3\,x} - e^{-2\,x}(3y_0 + y_0')$$

3.

$$x^2 y'' + 5xy' + 6y = \frac{1}{x}$$

6ptos

Solución: Esta es una ecuación inhomogénea de Cauchy Euler, con lo cual la solución de la homogénea toma la forma de

$$x^2 y'' + 5xy' + 6y = 0 \Rightarrow y_h(x) = x^m \Rightarrow (m(m-1) + 5m + 6)x^m = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} m = -2 + i\sqrt{2} \\ m = -2 - i\sqrt{2} \end{array} \right.$$

con lo cual, la solución de la homogénea será

$$y_h(x) = \frac{C_1 \mathrm{sen}(\sqrt{2}\ln(x))}{x^2} + \frac{C_2 \cos(\sqrt{2}\ln(x))}{x^2}$$

para la solución de la inhomogénea procedemos, una vez más con el método de los coeficientes indeterminados. Esto es probamos con para un candidato a solución

$$y_{ih}(x) = \frac{A}{x} \quad \Rightarrow x^2\left(\frac{2A}{x^3}\right) + 5x\left(-\frac{A}{x^2}\right) + 6\frac{A}{x} = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow A = \frac{1}{3}$$

con lo cual la solución general será

$$y(x) = \frac{C_1 \mathrm{sen}(\sqrt{2}\ln(x))}{x^2} + \frac{C_2 \cos(\sqrt{2}\ln(x))}{x^2} + \frac{1}{3x}$$