Métodos Matemáticos de la Física 2
Examen Parcial
Serie de Series
Noviembre 2008

Nombre____

1. Encuentre el entorno de valores de x y el comportamiento en función de j para las siguientes series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} \qquad\qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-j)!}{n!} \quad \text{con } j \text{ entero}$$

(5 ptos)

Solución: *a*)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} \quad \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{n+2}\frac{n+1}{x^n} = x$$

con lo cual la serie convergerá para $|x| < 1 \quad \Leftrightarrow -1 < x < 1$ pero adicionalmente se puede demostrar que la serie alternante converge para $x = -1$

b) Si con j entero y

- $j = 1$ entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Entonces, para $j \leq 1$ cada uno de términos de esta serie es mayor que los de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ que diverge, cosa que puede verse fácilmente agrupando términos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots$$

Cada uno de los paréntesis suman algo más que $\frac{1}{2}$, por lo tanto diverge. Entonces, por el criterio de comparación la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-j)!}{n!}$ también diverge.

- Para

$$j = 2 \quad \Rightarrow \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n\,(n-1)}$$

entoces para $j \geq 2$

$$S_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots$$

con lo cual rearreglando

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \cdots \to 1$$

con lo cual converge a 1, y como para $j \geq 2$ cada término de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-j)!}{n!}$ será menor o igual que cada término de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$. Entonces converge también.

2. Expandir por series de Taylor una función para encontrar la solución de ecuaciones trascendentes, puede que no sea una manera eficiente de resolverla. Considere la siguiente ecuación trascendente y su solución numérica
$$f(x) \to \operatorname{sen} x + \tan x - 2 = 0 \quad \Rightarrow x \approx 0{,}8862872916$$
Encuentre la soluición expandiendo la función hasta orden 4. ¿ cuál sería el órden de la expansión para obtener una solución con 3 cifras significativas. (5 ptos)

Solución: Expandiendo $f(x)$ hasta orden 3
$$f(x) \to f(x) = -2 + 2x + O\left(x^3\right) = 0 \quad \Rightarrow x \approx 1$$
y hasta orden 5, tenemos que
$$f(x) \to f(x) = -2 + 2x + \frac{x^3}{6} O\left(x^5\right) = 0 \quad \Rightarrow x \approx 0{,}9324410478$$
La por lo tanto se requerirá una expansión de ¡ orden 15 !
$$f(x) = -2+2\,x+\frac{1}{6}x^3+\frac{17}{120}x^5+\frac{271}{5040}x^7+\frac{7937}{362880}x^9+\frac{353791}{39916800}x^{11}+\frac{22368257}{6227020800}x^{13}+\frac{1903757311}{1307674368000}x^{15}+O\left(x^{16}\right)$$
para obtener, numéricamente, una solución $x \approx 0{,}8863228005$ con una "exactitud" de tres cifras significativas. El esfuerzo numérico para resolver un polinomio de grado 15, puede ser mayor que el resolver la ecuación trascendente directamente.

3. Los Polinomios de Hermite pueden definirse a partir de la fórmula de Rodrigues correspondiente como
$$H_n(x) = (-1)^n \exp(x^2) \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\, x^n}\left(\exp(-x^2)\right)$$
Para $n = 1, 2, 3, 4$ muestre que:

   a)
   $$\mathcal{G}(x,t) = \exp(2xt - t^2)$$
   es la función generatríz para los polinomios de Hermité $H_n(x)$

   Solución: Para mostrar que $\mathcal{G}(x,t)$ es la función generatriz, expandimos en series de Taylor en potencias de t. Esto es
   $$\mathcal{G}(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n = 1+2\,xt+\left(-1+2\,x^2\right)t^2+\left(-2\,x+\frac{4x^3}{3}\right)t^3+\left(\frac{1}{2}-2\,x^2+\frac{2x^4}{3}\right)t^4+O\left(t^5\right)$$
   Entonces, a partir de la utilización de la fórmula de Rodrigues se verifica que los coeficientes de la expansión son proporcionales a los polinomios de Hermite. Esto es
   $$H_0(x) = 1; \quad H_1(x) = 2x; \quad H_2(x) = -2+4x^2; \quad H_3(x) = -12x+8x^3; \quad H_4(x) = 12-48x^2+16x^4$$
   (2 ptos)

   b) que $\mathcal{G}(x,t)$ satisface la ecuación
   $$\frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial x^2} - 2x\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} + 2t\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} = 0$$

Solución:

$$4t^2\exp(2xt-t^2)-4xt\exp(2xt-t^2)+4t(x-t)\exp(2xt-t^2) = 4t^2\mathcal{G}(x,t)-4xt\mathcal{G}(x,t)+4t(x-t)\mathcal{G}(x,t) = 0$$

(1 pto)

c) y que los polinomios de Hermité $H_n(x)$ satisfacen la relación de recurrencia

$$H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x) \qquad \text{con } n \neq 0$$

Solución: En general, es inmediato de la definición de la función generatriz que

$$\frac{\partial^2\mathcal{G}(x,t)}{\partial x^2} = 4t^2\mathcal{G}(x,t); \qquad \frac{\partial\mathcal{G}(x,t)}{\partial x} = 2t\mathcal{G}(x,t); \qquad \frac{\partial\mathcal{G}(x,t)}{\partial t} = 2(x-t)\mathcal{G}(x,t)$$

con los cual, de la segunda de las ecuaciones tenemos

$$\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial x} = 2t\mathcal{G}(x,t) \quad \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)}{n!}t^n\right) \equiv \sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n'(x)}{n!}t^n = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)}{n!}t^{n+1}$$

Es decir

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n'(x)}{n!}t^n = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{k}\frac{H_{k-1}(x)}{(k-1)!}t^k \quad \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n'(x)}{n!}t^n = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{kH_{k-1}(x)}{k!}t^k$$

y al comparar término a término queda demostrado (2 ptos).

4. ¿ cuál de las siguientes funciones puede ser expandida en serie de Fourier en el rango indicado ?

$$\tan x \quad -\infty < x < \infty \qquad\qquad \frac{1}{\sqrt{|\operatorname{sen} x|}} \quad -\infty < x < \infty \qquad\qquad x\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \quad -\frac{1}{\pi} < x < \frac{1}{\pi}$$

(4 ptos)

Solución: Para que una función pueda ser expandida en Series de Fourier debe cumplir con las condiciones de Dirichlet. Vale decir

a) La función debe ser periódica

b) La función debe ser univaluada, contínua, excepto quizá, en un número finito de puntos en los cuales puede ser discontínua y esas discontinuidades deben ser finitas

c) La función debe tener un número finito de máximos y mínimos en un período

d) La integral de $|f(x)|$ en un período debe ser finita

Entonces:

- $$\tan x \quad -\infty < x < \infty$$

  Es periódica, pero sus discontinuidades son infinitas y la integral de $|f(x)|$ diverge. No cumple con la segunda y cuarta condición de Dirichlet

- $$\frac{1}{\sqrt{|\operatorname{sen} x|}} \qquad -\infty < x < \infty$$

  Es una función periódica con período π. Si bien $\lim_{x\to n\pi} |\operatorname{sen} x|^{-1/2} \to \infty$ esa discontinuidad no es infinita. Cuando $x \approx 0 \quad \Rightarrow |\operatorname{sen} x|^{-1/2} \approx |x|^{-1/2}$ y por lo tanto su módulo es integrable. Por lo tanto $|\operatorname{sen} x|^{-1/2}$ puede ser expandida en Series de Fourier

- $$x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \qquad -\frac{1}{\pi} < x < \frac{1}{\pi}$$

  Es periódica por construcción, acotada, e integrable en el período. Sin embargo, alrededor de $x\ 0$ oscila, generando un número infinito de máximos y mínimo, con lo cual no cumple con la tercera de las condiciones de Dirichlet.

5. Encuentre los coeficientes de Fourier a_n y b_n para la expansión de Fourier de la función $f(x) = \exp(x)$ en el intervalo $-1 < x < 1$ ¿ a cuál valor convergerá esa función en el punto $x = 2$? (4 ptos)

Solución: Como la función $f(x) = \exp(x)$ viene definida en el intervalo $(-1, 1)$, como la obligamos a ser periódica, tendrá período $T = 2$. Con lo cual $x = 2\ \in (1, 3)$ será equivalente a $x = 0\ \in (-1, 1)$ por lo tanto la función convergerá a 1.

Por su parte, el primero de los coeficientes será

$$a_n = \frac{2}{2}\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\ \exp(x)\cos(n\pi x) = \exp(x)\cos(n\pi x)|_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\ n\pi \operatorname{sen}(n\pi x)\ \exp(x)$$

es decir

$$a_n = (-1)^n(\exp(1) - \exp(-1)) +\ n\pi\ \exp(x)\operatorname{sen}(n\pi x)|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\ n^2\pi^2\ \exp(x)\cos(n\pi x)$$

con lo cual

$$a_n = 2(-1)^n \sinh(1) - n^2\pi^2\ a_n \qquad \Rightarrow a_n = \frac{2(-1)^n \sinh(1)}{1 + n^2\pi^2}$$

Similarmente

$$b_n = \frac{2}{2}\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\ \exp(x)\operatorname{sen}(n\pi x) = \exp(x)\operatorname{sen}(n\pi x)|_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\ n\pi\ \cos(n\pi x)\ \exp(x)$$

$$b_n = 0 +\ n\pi\ \cos(n\pi x)\ \exp(x)|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\ n^2\pi^2 \exp(x)\operatorname{sen}(n\pi x) = 2(-1)^{n+1} n\pi \sinh(1) - n^2\pi^2\ b_n$$

y finalmente

$$b_n = \frac{2(-1)^{n+1} n\pi \sinh(1)}{1 + n^2\pi^2}$$