Números complejos y Funciones de variable compleja

1. Introducción

Desde los cursos elementales de matemática nos hemos tropezado con las llamadas raíces imaginarias o complejas de polinomios. De este modo la solución a un polinomio cúbico

$$x^3 - 3x^2 + 4x - 12 = 0 \quad \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = 2i \\ x = -2i \\ x = 3 \end{array} \right\} \quad \Longrightarrow (x + 2i)(x - 2i)(x - 3) = 0\,,$$

o cuadrático

$$x^2 + 4 = 0 \quad \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = 2i \\ x = -2i \end{array} \right\} \Longrightarrow (x + 2i)(x - 2i) = 0\,,$$

nos lleva a definir un número $i^2 = -1 \Leftrightarrow i = \sqrt{-1}$. Al multiplicar el número imaginario i por cualquier número real obtendremos el número imaginario puro bi, con $b \in \Re$. La nomenclatura de números imaginarios surgió de la idea de que estas cantidades no representan mediciones físicas. Esa idea ha sido abandonada pero quedó el nombre.

1.1. Los números complejos y su álgebra

Un número complejo, z, es la generalización de los números imaginarios (puros), ib. Esto es

$$z = a + ib \qquad \text{con } a, b \in \Re \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} a \rightarrow & \text{parte real} \\ & \\ b \rightarrow & \text{parte imaginaria} \end{array} \right.$$

Obviamente los números reales serán $a + i0$, esto es, números complejos con su parte imaginaria nula. Los números imaginarios puros serán números complejos con su parte real nula, esto es $0 + ib$. Por ello en general diremos que

$$z = a + ib \quad \Longrightarrow a = \mathrm{Re}\,(z) \quad \wedge \quad b = \mathrm{Im}\,(z)$$

es decir, a corresponde a la parte real de z y b a su parte imaginaria.

Cada número complejo, z, tendrá un número complejo conjugado, z^* tal que:

$$z = a + ib \rightleftharpoons z^* = a - ib \quad \Rightarrow \quad (z^*)^* = z\,.$$

Es importante señalar que, en general, no existe relación de orden entre los números complejos. Vale decir, que no sabremos si un número complejo es mayor que otro. No está definida esta operación:

$$z_1 \ngtr z_2 \quad \vee \quad z_1 \nless z_2\,.$$

Las relaciones de orden sólo se podrán establecer entre módulos de números complejos y no números complejos en general.

Rápidamente recordamos el álgebra de los números complejos:

- Dos números complejos serán iguales si sus partes reales e imaginarios lo son

$$z_1 = z_2 \quad \Longrightarrow (a_1 + ib_1) = (a_2 + ib_2) \quad \Longrightarrow a_1 = a_2 \quad \wedge \quad b_1 = b_2 \,.$$

- Se suman dos números complejos sumando sus partes reales y sus partes imaginarias.

$$z_3 = z_1 + z_2 \quad \Longrightarrow (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = \underbrace{(a_1 + a_2)}_{a_3} + i\underbrace{(b_1 + b_2)}_{b_3} = a_3 + ib_3 \,,$$

  claramente $z + z^* = 2 \operatorname{Re} z$, también $z - z^* = 2 \operatorname{Im} z$. Igualmente es inmediato comprobar que

$$(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^* \,.$$

- Se multiplican números complejos por escalares multiplicando el escalar por sus partes reales e imaginarias

$$z_3 = \alpha z_1 \quad \Longrightarrow \alpha\left(a_1 + ib_1\right) = (\alpha a_1) + i\left(\alpha b_1\right) \,.$$

- Se multiplican números complejos entre si, multiplicando los dos binomios y teniendo cuidado que $i^2 = -1$.

$$z_3 = z_1 \cdot z_2 \quad \Longrightarrow (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) + i\left(a_1b_2 + b_1a_2\right) \,,$$

  por lo tanto:

$$z \cdot z^* = a^2 + b^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad |z|^2 = |z^*|^2 = z \cdot z^* \,.$$

  También es inmediato comprobar que $(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$.

- Se dividen números complejos siguiendo la estrategia de racionalización de fracciones irracionales. Esto es:

$$z_3 = \frac{z_1}{z_2} \quad \Longrightarrow \frac{(a_1 + ib_1)}{(a_2 + ib_2)} = \frac{(a_1 + ib_1)}{(a_2 + ib_2)}\frac{(a_2 - ib_2)}{(a_2 - ib_2)} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{\left(a_2^2 + b_2^2\right)} + i\frac{b_1a_2 - a_1b_2}{\left(a_2^2 + b_2^2\right)} \,,$$

  es claro que $z_2 \neq 0 + i0$.

1.2. Vectores y el plano complejo

Mirando con cuidado el álgebra de números complejos nos damos cuenta que un número complejo puede ser representado por una *dupla* de números, es decir,

$$z = (a + ib) \quad \leftrightharpoons \quad z = (a, b) \,,$$

las propiedades entre números complejos de igualdad, suma y multiplicación por un escalar arriba expuestas se cumplen de forma inmediata con esta nueva representación. Hay que definir las operaciones de multiplicación y división entre números complejos de forma que

$$(a_1, b_1)\,(a_2, b_2) = (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + b_1a_2) \quad \wedge \quad \frac{(a_1, b_1)}{(a_2, b_2)} = \left(\frac{a_1a_2 + b_1b_2}{\left(a_2^2 + b_2^2\right)}, \frac{b_1a_2 - a_1b_2}{\left(a_2^2 + b_2^2\right)}\right) \,.$$

Esta asociación de un número complejo con una pareja de números inmediatamente nos lleva a imaginar un punto en un plano (complejo) en el cual la primera componente (horizontal) representa la parte real y la segunda componente (vertical) representa la parte imaginaria. De esta forma asociamos a un número complejo un vector que une a ese punto (a, b) con el origen del plano complejo. Esta representación de números complejos como vectores un el plano (complejo), se conoce con el nombre de Diagrama de Argand[1] a pesar que no fue JeanArgand, sino Caspar Wessel[2] el primero en proponerlo. Por cierto, esta interpretación fue tres veces redescubierta primero por Caspar Wessel en 1799, luego por Jean Argand en 1806 y finalmente por Gauss[3] en 1831.

De esta manera, como un recordatorio al plano real

$$z = x + iy \quad \leftrightharpoons \quad z = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right) \quad \text{con} \left\{ \begin{array}{l} r = \sqrt{zz^*} = |z| = \sqrt{x^2+y^2} \\ \\ \tan\theta = \dfrac{y}{x} \quad \text{donde} \ -\pi \leq \theta \leq \pi\,. \end{array} \right.$$

La interpretación vectorial de números complejos permite que la suma de números complejos sea representada por la "regla del paralelogramo". Mientras que los productos escalar y vectorial nos llevan a

$$z_1 \cdot z_2 = \mathrm{Re}\ z_1 z_2^* = \mathrm{Re}\ z_1^* z_2 \quad \wedge \quad z_1 \times z_2 = \mathrm{Im}\ z_1^* z_2 = -\mathrm{Im}\ z_1 z_2^*$$

Con esta interpretación tendremos:

$$\begin{array}{lcl} x = \mathrm{Re}\ z & \rightleftharpoons & \text{componente real del vector } z \text{ o parte real de } z \\ y = \mathrm{Im}\ z & \rightleftharpoons & \text{componente imaginaria del vector } z \text{ o parte real de } z \\ r = \sqrt{zz^*} = |z| & \rightleftharpoons & \text{módulo, magnitud o valor absoluto de } z \\ \theta & \rightleftharpoons & \text{ángulo polar o de fase del número complejo } z. \end{array}$$

1.3. Fórmulas de Euler y De Moivre

Ya hemos hablado de la expansión en serie de Taylor[4]. Esta serie permite expresar cualquier función infinitamente diferenciable alrededor de un punto x_0 como una serie infinita de potencias

[1] En honor a Jean Robert Argand, (Ginebra, Suiza, 18 Julio 1768; Paris, Francia 13 agosto 1822) Contador pero matemático aficionado. Propuso esta interpretación de números complejos como vectors en un plano complejo en un libro autoeditado con sus reflexiones que se perdió y fue rescatado 7 años después, fecha a partir de la cual Argand comenzó a publicar en Matematicas. Más detalles en `www-groups.dcs.st-and.ac.uk/\char126\relaxhistory/Mathematicians/Argand.html`

[2] Caspar Wessel (Vestby, Noruega 8 junio 1745; 25 marzo 1818, Copenhagen,Dinamarca) Matemático noruego que se dedicó principalemente al levantamiento topográfico de Noruega. Su trabajo sobre la interpretación de números complejos permaneció desconocido por casi 100 años. Más detalles `www-groups.dcs.st-and.ac.uk/\char126\relaxhistory/Mathematicians/Wessel.html`

[3] Johann Carl Friedrich Gauss (30 abril 1777, Brunswick, Alemania; 23 febrero 1855, Göttingen, Alemania). Uno de los mátemáticos más geniales y precoces de la Historia. Desde los 7 años comenzó a mostrar sus condiciones de genialidad. Sus contribuciones en Astronomía y Matemáticas son múltiples y diversas. Más detalles `www-groups.dcs.st-and.ac.uk/\char126\relaxhistory/Mathematicians/Gauss.html`

[4] Brook Taylor (18 agosto 1685, Edmonton, Inglaterra; 29 diciembre 1731, Londres, Inglaterra) Físico y Matemático Inglés contemporaneo de Newton y Leibniz y con ellos participó profundamente en el desarrollo del cálculo diferencial e integral. Además de sus aportes al magnetismo, capilaridad y termometría. Desarrolló el área de diferencias finitas que hasta hoy utilizamos para cálculos encomputación. Inventó la integración por partes y descubrió la serie que lleva su nombre. Más detalles `www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Mathematicians/Taylor.html`

del argumento de la función. Esto es

$$f(x) = f(x_0) + \left.\frac{\mathrm{d}\, f(x)}{\mathrm{d}\, x}\right|_{x=x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2} \left.\frac{\mathrm{d}^2\, f(x)}{\mathrm{d}\, x^2}\right|_{x=x_0} (x - x_0)^2 + \frac{1}{3!} \left.\frac{\mathrm{d}^3\, f(x)}{\mathrm{d}\, x^3}\right|_{x=x_0} (x - x_0)^3 + \cdots\cdots$$

$$f(x) = C_n (x - x_0)^n \qquad \text{con } C_n = \frac{1}{n!} \left.\frac{\mathrm{d}^n\, f(x)}{\mathrm{d}\, x^n}\right|_{x=x_0} \qquad \text{donde } n = 0, 1, 2, 3, 4 \cdots$$

con lo cual, si consideramos $x_0 = 0$ entonces

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{720}x^6 + \frac{1}{5040}x^7 + \cdots\cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 + \cdots\cdots$$

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \cdots\cdots$$

Es fácil convercerse que

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta - \frac{1}{2}\theta^2 - \frac{i}{6}\theta^3 + \frac{1}{24}\theta^4 + \frac{i}{120}\theta^5 - \frac{1}{720}\theta^6 - \frac{i}{5040}\theta^7 + \cdots\cdots$$

lo que puede rearreglarse como

$$e^{i\theta} = \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2}\theta^2 + \frac{1}{24}\theta^4 - \frac{1}{720}\theta^6 + \cdots\cdots\right)}_{\cos\theta} + i\underbrace{\left(\theta - \frac{1}{6}\theta^3 + \frac{1}{120}\theta^5 - \frac{1}{5040}\theta^7 + \cdots\cdots\right)}_{\sin\theta}$$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

esta relación se conoce como la relación de Euler[5]. Si $\theta = 2\pi$ se obtiene la bonita identidad: $e^{2\pi i} = 1$.

Con lo cual ahora tenemos tres formas de representar un número complejo

$$z = x + iy \quad \leftrightharpoons \quad z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \quad \leftrightharpoons \quad z = re^{i\theta}\,.$$

La expresión $z = x + iy$ se conoce como forma cartesiana de representación de un número complejo, la forma $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ será la forma trigonométrica y la expresión $z = e^{i\theta}$ será la

[5] Leonhard Euler (15 abril 1707, Basilea, Suiza; 18 septiembre 1783, San Petersburgo, Rusia). Uno de los matemáticos más prolíficos de todos los tiempos. Desarrolló inmensamente campos como la geometría analítica y trigonometría, siendo el primero que consideró el coseno y el seno como funciones. Hizo aportes significativos en el desarrollo del cálculo diferencial e integral así como también, astronomía, elasticidad y mecánica de medios contínuos. Más detalles `www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Mathematicians/Euler.html`

forma de Euler. Las sumas de números complejos son fácilmente planteables en su forma cartesiana. Mientras las multiplicación y división serán directas en la forma de Euler

$$\left.\begin{array}{l} z_1 = r_1 e^{i\theta_1} \\ \\ z_2 = r_2 e^{i\theta_2} \end{array}\right\} \Longrightarrow z_1 z_2 = r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)} = r_1 r_2 \left(\cos\left(\theta_1+\theta_2\right) + i \sin\left(\theta_1+\theta_2\right)\right) \,.$$

Más aún, si

$$z = x + iy \quad \Longrightarrow e^z = e^{(x+iy)} = e^x e^{iy} = e^x \left(\cos y + i \sin y\right) \,,$$

a partir de la relación o fórmula de Euler se puede demostrar la fórmula de De Moivre[6]

$$\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta} \quad \leftrightharpoons \quad \left(\cos\theta + i\sin\theta\right)^n = \cos\left(n\theta\right) + i\sin\left(n\theta\right) \quad \text{con } n \text{ entero}\,.$$

2. Funciones de Variable Compleja

A continuación, generalizaremos algunos conceptos de funciones de variable real a funciones de variable compleja.

2.1. De la recta real al plano complejo

La idea de función de variable (o variables) reales puede ser extendida (continuada, le dicen también) al plano complejo. La idea es la de siempre: si en una determinada región del plano complejo $\mathcal{R}$ a un número complejo z le corresponde un número (o varios números) complejos $w = f(z)$, diremos que $f(z)$ es una función de variable compleja z. Obvio que $f(z)$ puede ser biyectiva, en cuyo caso tendremos que a z le estará asociado uno y solo un número complejo $w = f(z)$. Es claro también que siempre se podrá expresar

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \quad \text{con } u(x,y) \text{ la parte real y } v(x,y) \text{ la parte imaginaria}\,. \tag{1}$$

Esta representación tiene una interpretación adicional. Como representamos un número complejo en el plano $0xy$ como $z = x + iy$, pero $w = f(z)$ también podrá ser representada como un punto en el plano $0uv$. Entonces, desde el punto de vista geométrico una función de variable compleja podrá ser entendida como una ley de transformación entre pares de puntos (x, y) del plano $0xy$ del argumento z y los puntos (u, v) del plano $0uv$ de valor w.

2.2. Continuidad en el plano complejo

Podemos también extender el concepto de continuidad de una función de variable real a una función de variable compleja. Esto es: diremos que una función compleja[7] $w = f(z)$ será contínua

[6] Abraham de Moivre (26 mayo 1667 in Vitry-le-François, Francia; 27 noviembre 1754, Londres Inglaterra) Matemático francés que tuvo que emigrar a Inglaterra por razones religiosas. Contemporaneo de Newton, Liebniz, Halley, fue pionero con sus contribuciones en Geometría Analítica y Teoría de Probabilides.

[7] A partir de ahora y por razones de simplicidad llamaremos a $f(z)$ *función compleja* en vez de *función de variable compleja*

en z_0 si para un $\epsilon > 0$ siempre existe un $\delta > 0$ tal que $|z - z_0| < \delta$ tan pequeño como uno quiera y siempre se puede encontrar $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$. La otra manera de verlo es la estándar: si existe el límite cuando $z \to z_0$, es decir:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)\,.$$

En este punto se pueden resaltar que los límites (y con ello la idea de continuidad) en el plano complejo hereda las sutilezas y dificultades de los límites y continuidades de las funciones en varias variables. En segundo lugar cabe señalar que la diferencia con las funciones de variable real radica en que los ϵ y δ son radios de un círculo centrado en $f(z_0)$ y z_0, respectivamente. Adicionalmente, para el caso de las funciones complejas no tiene sentido los límites por la derecha y por la izquierda que planteábamos para funciones de variable real. También es obvio que si

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)\,,$$

con $u(x, y)$ y $v(x, y)$ funciones contínuas en (x_0, y_0), entonces $f(z)$ en una función contínua en $z_0 = x_0 + iy_0$.

2.3. Diferenciabilidad de funciones complejas

Una vez más la idea es la misma y la dificultad que subyace es equivalente a las dificultades que enfrentamos en las definiciones de derivadas para funciones de varias variables. Diremos entonces que, una función $f(z)$ univaluada en una región $\mathcal{R}$ entonces $f(z)$ será diferencialble en esa región si la derivada

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} \equiv f'(z) &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \\
&= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to 0} \frac{[u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y)] + i\,[v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x, y)]}{\Delta x + i\Delta y}\,,
\end{aligned}$$

existe y es única. Una vez más, al igual que en el caso de funciones de varias variables, el concepto de límite (y con éste el de derivada), debe existir sin importar la ruta o forma de aproximación al punto sobre el cual estamos calculando la derivada. Esto es, cuando $\Delta z \to 0 \Leftrightarrow \Delta x + i\Delta y \to 0$, entonces:

$$\begin{aligned}
f'(z)|_{\Delta y = 0} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x + \Delta x, y) - u(x, y)] + i\,[v(x + \Delta x, y) - v(x, y)]}{\Delta x} \\
f'(z)|_{\Delta x = 0} &= -i \lim_{\Delta y \to 0} \frac{[u(x, y + \Delta y) - u(x, y)[+ i\,[v(x, y + \Delta y) - v(x, y)]}{\Delta y}\,.
\end{aligned}$$

Ejemplos Un par de ejemplos que ilustran este caso pueden ser: $f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy$. Por lo tanto, la derivada es:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - (y + \Delta y)^2 + 2i(x + \Delta x)(y + \Delta y) - x^2 + y^2 - 2ixy}{\Delta x + i\Delta y}\,,$$

desarrolle y pruebe que independientemente de la ruta en el plano complejo: $\Delta y = 0; \Delta x \to 0$ o viceversa, se tiene:

$$f'(z) = \lim_{(\Delta x, \Delta y)\to 0} \left(2x + i2y + \frac{(\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 + 2i\Delta x \Delta y}{\Delta x + i\Delta y} \right) = 2x + i2y$$

que es más o menos obvio si hubiéramos notado que $f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy = (x+iy)^2 \equiv z^2$ con lo cual

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z+\Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{2z\Delta z + (\Delta z)^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} (2z + \Delta z) = 2z\,.$$

Ahora bien, las cosas no siempre son así. Si consideramos $f(z) = 2x + iy$ es rápido comprobar que no es diferenciable en el plano complejo, ya que

$$f'(z) = \lim_{(\Delta x, \Delta y)\to 0} \frac{2x + 2\Delta x + i(y + \Delta y) - 2x - iy}{\Delta x + i\Delta y} = \lim_{(\Delta x, \Delta y)\to 0} \frac{2\Delta x + i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}\,,$$

el cual, claramente no coincide si las direcciones de aproximación a $z_0 = x_0 + iy_0$ son distintas, vale decir, por ejemplo $\Delta y = 0$; $\Delta x \to 0$ o $\Delta x = 0$; $\Delta y \to 0$.

Como heredamos todas las ideas y métodos del campo real se cumplen todas las reglas de la derivación para funciones reales:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[f(z) + g(z)\right] = \frac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z} + \frac{\mathrm{d}g(z)}{\mathrm{d}z}; \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[f(z)g(z)\right] = \frac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z}g(z) + f(z)\frac{\mathrm{d}g(z)}{\mathrm{d}z}; \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} f\left[g(z)\right] = \frac{\mathrm{d}f(g)}{\mathrm{d}g}\frac{\mathrm{d}g(z)}{\mathrm{d}z}\,.$$

2.4. Funciones Analíticas y Condiciones de Cauchy-Riemann

Diremos que una función es analítica (holomorfa o regular) en una región $\mathcal{R}$, si es univaluada y derivable en todos los puntos dentro de esa misma región $\mathcal{R}$. Puede darse el caso de que sea analítica en la región excepto en un número finito de puntos (donde es singular). Entonces diremos que es es analítica (holomorfa o regular) en $\mathcal{R}$, excepto en esos puntos.

Una función se denomina una función entera si esta es analítica en todos los puntos del plano finito, como por ejemplo, los polinomios.

A partir de dos estrategias (muy particulares) de aproximación a $\Delta z \to 0$ tales como $\Delta y = 0$; $\Delta x \to 0$ o $\Delta x = 0$; $\Delta y \to 0$, podremos encontrar un criterio para identificar donde, una función compleja, $f(x)$, es analítica. Esto es:

$$\begin{aligned} f'(x)_{\Delta y = 0} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[u(x+\Delta x, y) - u(x,y)\right] + i\left[v(x+\Delta x, y) - v(x,y)\right]}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\Delta u(x,y)}{\Delta x} + i\frac{\Delta v(x,y)}{\Delta x}\right]\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x)_{\Delta x = 0} &= -i\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\left[u(x, y+\Delta y) - u(x,y)\right] + i\left[v(x, y+\Delta y) - v(x,y)\right]}{\Delta y} \\ &= \lim_{\Delta y \to 0} \left[-i\frac{\Delta u(x,y)}{\Delta y} + \frac{\Delta v(x,y)}{\Delta y}\right]\,, \end{aligned}$$

y ambas tienen que coincidir. Con lo cual

$$f'(x)_{\Delta y=0} = f'(x)_{\Delta x=0} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{\Delta u(x,y)}{\Delta x} + i\frac{\Delta v(x,y)}{\Delta x}\right] = \lim_{\Delta y \to 0}\left[-i\frac{\Delta u(x,y)}{\Delta y} + \frac{\Delta v(x,y)}{\Delta y}\right],$$

y equivalentemente

$$f'(x)_{\Delta y=0} = f'(x)_{\Delta x=0} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + i\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = -i\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}$$

Con ello hemos encontrado las condiciones *necesarias* para que una función compleja sea analítica, vale decir: las condiciones de Cauchy Riemann

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \quad \wedge \quad \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = -\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} \tag{2}$$

Ahora tendremos un criterio más expedito para determinar que la función $f(z) = 2x + iy$ no es analítica.

$$\left.\begin{array}{l} u(x,y) = 2x \\ v(x,y) = y \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 2 \neq 1 = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \quad \wedge \quad \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = 0 = 0 = -\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$$

Para el caso $f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy$ se cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann

$$\left.\begin{array}{l} u(x,y) = x^2 - y^2 \\ v(x,y) = 2xy \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \quad \wedge \quad \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = 2y = -\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\,.$$

Como esas condiciones son *necesarias* porque para encontrarlas hemos seleccionado un par de rutas muy específicas: $\Delta y = 0; \Delta x \to 0$ y $\Delta x = 0; \Delta y \to 0$, se requiere exigir algunas condiciones adicionales. Sin demostración (puede consultar para detalles y demostraciones las referencias indicadas[8]) exigiremos como condición necesaria y suficiente para que una función sea analítica que las cuatro derivadas parciales para $u(x,y)$ y $v(x,y)$, existan, sean contínuas en la región $\mathcal{R}$ y que se cumplan las condiciones de Cauchy-Riemann. El punto crucial (adicional) es que las derivadas sean contínuas.

Ejercicio Como ejercicio al lector le sugerimos investigar los dominios del plano complejo para los cuales las funciones $f(z) = |x| - i|y|$ y $f(z) = |z|^2 = zz^*$ son analíticas.

2.4.1. Curiosidades de Cauchy-Riemann

Las funciones analíticas satisfacen algunas propiedades adicionales consecuencias de las condiciones de Cauchy-Riemann.

[8] Byron, F.W. y Fuller W.F. (1970) **Mathematics of Classical and Quantum Physics**. R. V. Churchill y J. W. Brown (1989) **Complex Variables and Applications**. K. Knopp (1996) **Theory of Functions, Parts I and II**

La primera es que dada una función compleja $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$; si $f(z)$ es análitica, entonces $u(x, y)$ y $v(x, y)$ serán funciones armónicas conjugadas, $\nabla^2 u(x, y) = \nabla^2 v(x, y) = 0$, i.e. satisfacen la ecuación de Laplace. Si derivamos apropiadamente las ecuaciones (2) respecto a una y otra variable encontramos que

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}\right] = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}\right] = -\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right] \Rightarrow \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0$$

y equivalentemente

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}\right] = -\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right] = -\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\right] = -\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}\right] \Rightarrow \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2} = 0\,,$$

es decir, hemos demostrado que las partes reales e imaginarias de una función analítica son necesariamente armónicas. La importancia de este resultado radica, en primer lugar, que no son arbitrarias las funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$ con las cuales construimos $f(z)$. Ambas deben satisfacer la ecuación de Laplace. En segundo lugar que ambas están ligadas por las condiciones de Cauchy-Riemann, y esto implica que al conocer una de las funciones armónicas conjugadas, siempre es posible encontrar (salvo una constante de integración) la otra.

Ejemplo Para ilustrar lo anterior, supongamos la siguiente función armónica conjugada $u(x, y) = 2x - x^3 + 3xy^2$ correspondiente a la parte real de $f(z)$. Es fácil comprobar que es una función armónica, ahora construyamos la parte imaginaria $v(x, y)$. Esto es

$$u(x,y) = 2x - x^3 + 3xy^2 \quad \Rightarrow \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} = 2 - 3x^2 + 3y^2 \quad \Rightarrow v(x,y) = 2y - 3x^2 y + y^3 + \phi(x)$$

entonces

$$\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = -6xy + \frac{\partial \phi(x)}{\partial x} = -6xy = -\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} \quad \Rightarrow \frac{\partial \phi(x)}{\partial x} = 0 \Rightarrow \phi(x) = C \;\Rightarrow v(x,y) = 2y - 3x^2 y + y^3 + C\,.$$

La segunda curiosidad consecuencia de las ecuaciones (2) es que para una función compleja $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ en la cual además se cumpla que $u(x, y)$ =const y $v(x, y)$ =const, entonces se cumplirá que $\nabla u(x, y) \cdot \nabla v(x, y) = 0$.

$$\nabla u(x,y) \cdot \nabla v(x,y) = \left[\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\mathbf{j}\right] \cdot \left[\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}\mathbf{j}\right] = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}$$

y por obra de las condiciones de Cauchy-Riemann es inmediato comprobar que se anulan

$$\nabla u(x,y) \cdot \nabla v(x,y) = -\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 0$$

Es decir, $u(x, y)$ =const y $v(x, y)$ =const, corresponden a *trayectorias mutuamente ortogonales*. Esta "curiosidad" nos permite construir sistemas de coordenadas alternativos en el plano complejo y, sobre todo saber como establecer su transformación a otros planos complejos.

La tercera curiosidad es un resultado el cual, siendo una formalidad, nos indica que las funciones analíticas $f(z)$ dependen de z y no de su conjugado z^*. O dicho de otra manera que z y z^* son variables independientes. Para demostrar esto procedemos primero a convencernos que si $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ y $f(z)$ analítica, entonces $\frac{\partial f(z)}{\partial z^*} = 0$. Sin detenernos a pensar en el significado de la derivada respecto a la variable conjugada, recordamos que operacionalmente

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{z+z^*}{2} \\ \\ y = \dfrac{z-z^*}{2i} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial f(z)}{\partial z^*} = \frac{\partial f(z)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z^*} + \frac{\partial f(z)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z^*} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + i\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}\right] - \frac{1}{2i}\left[\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + i\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}\right]$$

arreglando tendremos que es inmediato comprobar que se anula si se cumplen las condiciones (2)

$$\frac{\partial f(z)}{\partial z^*} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}\right] + \frac{i}{2}\left[\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x,y)}{\partial x}\right] = 0 \quad \Rightarrow f(z) \not\Leftrightarrow f(x,y) = f\left(\frac{z+z^*}{2}, \frac{z-z^*}{2i}\right)$$

en otras palabras, la funciones analíticas son verdaderas funciones de variable complejas y no, como pudiera parecer, de dos variables reales interpuestas.

Ejercicios

1. Determine la función $f(z)$ analítica cuya parte imaginaria es $(y\cos y + x\operatorname{sen} z)e^x$
2. Muestre que si $f(z)$ es analítica entonces $f^*(z^*)$ también lo es.