Funciones de Variable Compleja

1. Series de Potencias en Variable Compleja

En esta sección generalizaremos la idea a series de potencias en variable compleja z. Esta generalización se conoce como "prolongación" o "continuación" (analítica) de una función real al plano complejo[1]. Si se cumple que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \equiv \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta} ,$$

entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ es absolutamente convergente si: } \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n \text{ converge} . \qquad (1)$$

Donde hemos utilizado la forma polar para un número complejo $z = re^{i\theta}$. La conclusión más importante de (1) es que siempre es posible asociarle a una serie de potencias complejas, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, una de potencias reales $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$. La convergencia (absoluta) de ésta última condiciona la convergencia de la primera. Por ello los criterios de convergencia de series reales serán aplicables también en este contexto.

1.1. La convergencia y sus criterios

Suponemos que existe el límite

$$\rho = \frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| ,$$

donde R se denomina el *radio de convergencia* y define una región círcular en torno a un punto z_0.

Si seleccionamos el criterio del cociente de D'alembert, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n} \right| = |z| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \quad \text{entonces, en las regiones} \quad \left\{ \begin{array}{lll} |z| < R & \Longrightarrow & \text{converge} \\ |z| > R & \Longrightarrow & \text{diverge} \\ |z| = R & \Longrightarrow & \text{indeterminado} \end{array} \right.$$

Por lo tanto, cuando $R = \infty$ la serie converge en todo punto y en contraste si $R = 0$, sólo converge en el origen. Por su parte, si $R = R_0$ la serie converge en una región (un círculo) del plano complejo de radio R_0 centrada en $z_0 = 0$.

Entonces, se puede analizar el comportamiento de series complejas utilizando el criterio del cociente de D'alembert.

[1] Por simplicidad y economía consideraremos desarrollos en serie alrededor de $z = 0$, ya que la generalización a otros puntos $z = z_0$ es sencilla y no involucra ninguna sutileza conceptual adicional.

Ejemplos:

1.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n!}{(n+1)!} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{n+1} \right| = 0 = \frac{1}{R} \quad \Rightarrow R \to \infty \quad \Rightarrow \text{converge } \forall\, z \in \mathbb{C}\,.$$

2.

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n(1+i)^{n+1}}{(n+1)(1+i)^n} \right| &= |1+i| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n}{n+1} \right| \\ &= \sqrt{2} \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n}{n+1} \right| \Rightarrow R = 1 \Rightarrow |z| = \sqrt{2} > 1\,, \end{aligned}$$

y por lo tanto esta serie diverge. Es claro que esta serie únicamente convergerá para $|z| < 1$.

1.2. Consecuencias y conclusiones para series de potencias complejas

Dentro del círculo de convergencia la función $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ estará bien definida y disfrutará de las propiedades ideales para una función bien comportada. Es decir

1. La expansión $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ es única. Vale decir que si existen dos series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$, convergentes para $|z| < R$ y tienen la misma suma para un entorno de z. Entonces, necesariamente $a_n \equiv b_n$.

2. La función $f(z)$ también podrá ser expandida alrededor de cualquier otro punto z_p contenido en el entorno de convergecia de radio R, su expansión $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_p)^n$ también será única. El radio de convergencia para esta segunda serie será $R_p = R - |z_p|$

3. Por ser una expansión en potencias de z, la función $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ es diferenciable en todo punto z_p en el círculo de convergencia de radio R y la derivada puede ser hecha a partir de la misma expansión en series de potencias, término a término, de tal forma que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \Rightarrow \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n z^{n-1} \quad \Rightarrow f'(z_p) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n z_p^{n-1} \tag{2}$$

   Por lo tanto las funciónes $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ así descritas son analíticas en el entorno de convergencia de radio R.

4. Como $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ y $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n z^{n-1}$ tienen el mismo radio de convergencia, podemos aplicar k veces la afirmación anterior y obtendremos

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n z^{n-1} \quad \Rightarrow f^k(z_p) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)\, a_n z_p^{n-k}$$

para
$$z_p = 0 \Rightarrow a_k = \frac{f^k(0)}{k!}\,,$$
con lo cual la expansión de una función analítica es en realidad una expansión en series de Taylor
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!} z^n\,.$$
Con esta última afirmación se cierra la idea que nos hacemos de una función bien comportada o analítica: es una función infinitamente contínua y contínuamente diferenciable, la cual puede ser expandida en series de Taylor. Si bien los fenómenos físicos no requieren, necesariamente, ser descritos por este tipo de funciones, debido a sus notables propiedades han resultado ser una de las más estudiadas en Matemáticas. Más adelante revisaremos estos conceptos a luz de la Fórmula Integral de Cauchy.

Los detalles de estas afirmaciones, que son teoremas, se pueden consultar en la bibliografía recomendad[2]

2. Algunas Funciones Complejas Elementales

Con todos los ingredientes anteriores, la primera función candidata para una continuación analítica es la función exponencial. Es decir

$$e^z = 1+z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots \qquad \text{claramente } R\rightarrow\infty \quad \text{con lo cual converge } \forall\, z\in\mathbb{C} \tag{3}$$

Como ejercicio puede ser interensante demostrar que $e^{z_1}e^{z_2} = e^{(z_1+z_2)}$. Vale decir

$$e^{z_1}e^{z_2} = \left[1+z_1+\frac{z_1^2}{2}+\cdots+\frac{z_1^n}{n!}+\cdots\right]\left[1+z_2+\frac{z_2^2}{2}+\cdots+\frac{z_2^n}{n!}+\cdots\right]$$

con un poco de álgebra y orden podremos rearreglar la expresión de la forma

$$e^{z_1}e^{z_2} = 1+\left[\frac{z_1}{1!}+\frac{z_2}{1!}\right]+\left[\frac{z_1^2}{2!}+\frac{z_1}{1!}\frac{z_2}{1!}+\frac{z_2^2}{2!}\right]+\cdots+\frac{z_1^n}{n!}+\frac{z_1^{n-1}}{(n-1)!}\frac{z_2}{1!}+\frac{z_1^{n-2}}{(n-2)!}\frac{z_2^2}{2!}+\cdots+\frac{z_1}{1!}\frac{z_2^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{z_2^n}{n!}$$

y mejor aún

$$e^{z_1}e^{z_2} = 1+\left[\frac{z_1}{1!}+\frac{z_2}{1!}\right]+\left[\frac{z_1^2}{2!}+\frac{z_1}{1!}\frac{z_2}{1!}+\frac{z_2^2}{2!}\right]+\cdots+\frac{1}{n!}\left[z_1^n+\frac{n!}{(n-1)!1!}z_1^{n-1}z_2+\cdots+\frac{n!}{1!(n-1)!}z_1z_2^{n-1}+z_2^n\right]$$

que no es otra cosa que la expansión binomial con lo cual hemos demostrado que $e^{z_1}e^{z_2} = e^{(z_1+z_2)}$.

[2] K. Knopp (1996) **Theory of Functions**, Parts I and II.

Adicionalmente, con la expansión en serie (3) podemos hacer un par de extensiones inmeditas: $a^z = e^{z \ln a}$ y

$$\text{para } z = iy \quad \Rightarrow e^{iy} = \cos y + i\text{sen}\, y \quad \Rightarrow e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\text{sen}\, y) \tag{4}$$

Nótese que, como era de esperarse en general $z = |z|e^{i\theta}$, entonces la función $f(z) = e^z \neq 0 \quad \forall z$ tiene un período $2i\pi$, vale decir: $f(z) \equiv f(z + 2i\pi)$.

A partir de la construcción (3), se definen las funciones hiperbólicas y trigonométricas

$$\cosh z = \frac{1}{2}\left(e^z + e^{-z}\right) , \text{senh}\, z = \frac{1}{2}\left(e^z - e^{-z}\right) , \cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) , \text{sen}\, z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) .$$

Al igual que para el caso real $y = e^x \Rightarrow x = \ln y$ entonces $w = f(z) = e^z \Rightarrow z = \text{Ln}\, w$ es decir $z = \ln w$ es la función inversa para $w = e^z$.

Si $e^w = z$, y $w = u + iv$ con $z = x + iy \equiv |z|e^{i\theta}$ entonces

$$e^w = e^{u+iv} = e^u e^{iv} = |z|e^{i\theta} = z \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} e^u = |z| & \Leftrightarrow & u = \ln|z| \\ & & \\ & v = \theta & \end{array} \right\} \Rightarrow w = \text{Ln}\, z = \ln|z| + i(\theta + 2n\pi) .$$

Es decir para un determinado valor de n es univaluada, en particular para $n = 0$ la función $f(z) = \text{Ln}\, z$ tiene como el *valor principal* $\ln z = \ln|z| + i\theta$ con $-\pi < \theta \leq \pi$. Es inmediato comprobar que los logaritmos de números complejos negativos si están definidos. Esto es

$$\text{Ln} -7 \equiv \text{Ln}\left(|-7|e^{i(\pi+2n\pi)}\right) = \ln 7 + i(\pi + 2n\pi) \quad \Rightarrow \ln(-7) = \ln 7 + i\pi \quad \text{¡ un número complejo !}$$

Ejercicios

1. Muestre que si definimos $f(z)e^z$ como aquella función cuya derivada es ella misma, que se reduce a la función de variable real $e^z \to e^x$ si $\text{Im}\, z = 0$ y la cual, por ser analítica, cumple con la condiciones de Cauchy-Riemann, entonces $e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\text{sen}\, y)$

2. Muestre que a partir de las definiciones (5) se obtienen las sempiternas propiedades de esas funciones, vale decir

$$\cos z = \cos(-z); \quad -\text{sen}\, z = \text{sen}\,(-z); \quad \cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \text{sen}\, z_1 \text{sen}\, z_2$$

$$\frac{\mathrm{d}\cos z}{\mathrm{d}z} = -\text{sen}\, z \qquad \frac{\mathrm{d}\,\text{sen}\, z}{\mathrm{d}z} = \cos z \qquad \text{sen}\,(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \text{sen}\, z_2 \pm \text{sen}\, z_1 \cos z_2$$

3. Muestre que $\arctan z = \dfrac{1}{2i} \ln\left(\dfrac{1+zi}{1-zi}\right)$ y luego úselo para evaluar $\arctan\left(\dfrac{2\sqrt{3} - 3i}{7}\right)$

3. Puntos de corte, líneas de cortes y ceros de funciones complejas

Hemos mencionamos anteriormente, que los números complejos se representan por su forma polar en dos ejes coordenados. Ese diagrama bidimiensional se lo llamamos Diagrama de Argand. Como en el caso del Análisis de Funciones Reales, existen funciones *multivaluadas*, a las cuales les debemos imponer ciertas condiciones para convertirlas en *univaluadas*. El la idea que si una función es multivaluada, automáticamente deja de ser analítica. El objetivo de esta sección es identificar ese conjunto de condiciones para detectar en cual región del plano complejo una determinada función es univaluada.

3.1. Puntos y líneas de corte

Consideremos entonces la función $f(z) = z^{1/2}$ y hagamos distintos circuitos cerrados para $0 \leq \theta < 2\pi$ con el "vector" z.

$$f(z) = z^{1/2} \equiv r^{1/2}e^{i\theta/2} \quad \to f(z) = r^{1/2}e^{i\theta/2} \quad \to r^{1/2}e^{i(\theta+2\pi)/2} = -r^{1/2}e^{i\theta/2}\,.$$

Visto así nos tendremos que preguntar ahora cual fue el circuito que recorrimos con z, y dependiendo de ese circuito identificaremos algunos puntos con características distintas. Si el circuito cerrado descrito por z **no** contiene el punto $z = 0$, la función $f(z) = z^{1/2}$ retoma su valor original (ver Figura 1 cuadrante superior izquierdo contorno $\mathcal{C}_1$). Pero si, como se aprecia en la misma Figura 1, el circuito cerrado $\mathcal{C}_2$ **si** contiene el punto $z = 0$ entonces la función no retoma su valor original, $f(z) \to -f(z)$. También es claro que si el circuito cerrado lo recorremos dos veces $\theta \to 4\pi$ entonces $f(z) = z^{1/2}$ retoma su valor inicial.

Los puntos alrededor de los cuales se construye un circuito cerrado en el diagrama de Argand y para el cual la función no retoma su valor inicial se denominan *puntos de corte* y las *líneas de corte* (o simplemente *cortes*) serán aquellas líneas que separan regiones en las cuales una determinada función es univaluada. Es claro que los puntos de corte son puntos singulares, en los cuales la función deja de ser analítica y existirán si θ toma, valores $0 \leq \theta \leq 2n\pi$. Es decir, puede dar n vueltas.

En este caso, para nuestra función $f(z) = z^{1/2}$, la línea de corte será cualquiera que comience en $z = 0$ y continúe para $|z| \to \infty$. Por simplicidad es costumbre tomar las líneas de corte a lo largo de los ejes reales o complejos. De este modo aparece ilustrado en la Figura 1 cuadrante superior derecho, la línea de corte que sigue el eje positivo de las x.

La situación se torna más interesante cuando estas definiciones se analizan a la luz de funciones con más de un punto de corte. Consideremos la función

$$f(z) = \sqrt{z^2+1} \Rightarrow f(z) = \sqrt{(z-i)(z+i)} \equiv \sqrt{\left(r_1e^{i\theta_1}\right)\left(r_2e^{i\theta_2}\right)} = \sqrt{r_1r_2}e^{i(\theta_1+\theta_2)/2}\,.$$

Analicemos entonces, varios contornos en el plano de Argand. Otra vez la Figura 1 ilustra en el cuadrante inferior los distintos contornos $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ y $\mathcal{C}_4$ Tal y como se aprecia en esa figura, se dan cuatro caso

1. Contorno $\mathcal{C}_1$ no incluye ningún punto de corte, entonces $\theta_{1min} \leq \theta_1 \leq \theta_{1max}$ y $\theta_{2min} \leq \theta_2 \leq \theta_{2max}$, con lo cual $f(z)$ retoma su valor inicial luego de recorrer el $\mathcal{C}_1$

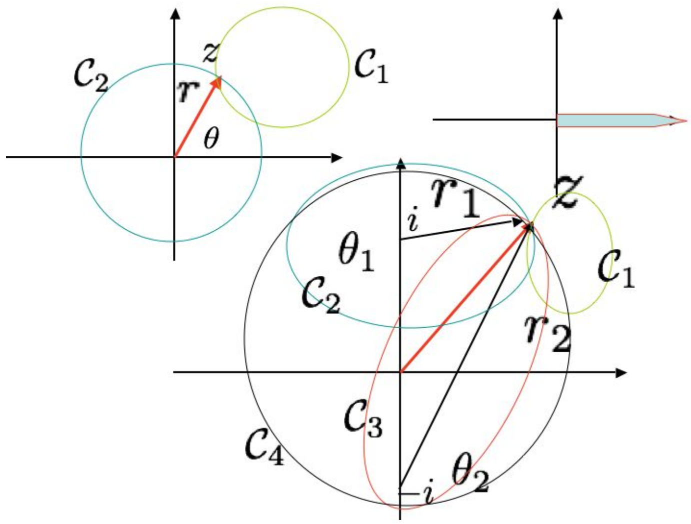

Figura 1: Los distintos contornos que identifican los puntos de corte

2. Contorno $\mathcal{C}_2$ incluye $z = i$ como punto de corte, entonces $0 \leq \theta_1 \leq 2n\pi$ y $\theta_{2min} \leq \theta_2 \leq \theta_{2max}$, por lo cual $f(z) \to -f(z)$
3. Contorno $\mathcal{C}_3$ incluye $z = -i$ como punto de corte, entonces $\theta_{1min} \leq \theta_1 \leq \theta_{1max}$ y $0 \leq \theta_2 \leq 2n\pi$, por lo cual $f(z) \to -f(z)$
4. Contorno $\mathcal{C}_4$ incluye ambos como punto de corte,$z = i$ y $z = -i$, entonces $0 \leq \theta_1 \leq 2n\pi$ y $0 \leq \theta_2 \leq 2n\pi$, por lo cual $f(z) \to f(z)$ retoma su valor.

De este modo para construir los cortes que impidan que nuestra función se multivaluada podremos seleccionar

- $z_{\text{corte}} > i$ y $z_{\text{corte}} < -i$
- $-i < z_{\text{corte}} < i$

3.2. Puntos singulares

Un punto donde la función $f(z)$ no es analítica se denomina un punto singular. Estos puntos pueden ser:

- **Singularidades aisladas:** sí una función es analítica en todo el entorno de un punto z_0, excepto en el propio punto z_0, entonces se dice que el punto z_0 es una singularidad aislada o un punto singular de la función $f(z)$.

  Por ejemplo, para la función $f(z) = 1/z$, sabemos que es analítica en todo punto excepto en $z = 0$. La única singularidad de la función esta en el punto $z = 0$ y este punto es entonces una singularidad aiaslada.

- **Singularidades no aisladas:** Si una función contiene un conjunto de singularidades aisladas en una vecindad de un punto z_0, entonces se dice que z_0 es una singularidad no aislada. Es decir, una singularidad no aislada de una función es un punto límite del conjunto de sus singularidades.

3.2.1. Clasificación de las singularidades aisladas

1. Un punto singular aislado z_0 de una función f se denomina removible o evitable si:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) \quad \exists\,.$$

Observemos que:

a) la función f puede no estar definida en z_0 y por esta razón la función no es analítica en z_0.

b) la función puede estar definida en z_0 pero de valor diferente al $\lim_{z\to z_0} f(z)$. Con lo cual la función no es contínua en z_0 y por lo tanto no es analítica en z_0.

c) la función puede estar definida en z_0 y su valor igual al del $\lim_{z\to z_0} f(z)$. En este caso la función no es singular en z_0.

Por lo tanto, sí f tiene una singularidad removible en z_0 entonces una de las posibilidades (a) o (b) debe ser la causa de que la función no sea analítica o regular en z_0.

Si una función g es igual a f en todos los puntos, excepto en z_0, y

$$g(z_0) = \lim_{z \to z_0} f(z)\,,$$

entonces g no es singular en z_0, esto significa que la singularidad de f puede ser removida mediante la redefinición de la función f en z_0.

2. Un punto singular aislado z_0 de una función f que no esta definida en z_0 se llama un polo de orden n de f si:

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^n f(z) = M \neq 0\,,$$

donde n es un número entero positivo. Un polo de orden 1 se denomina un polo simple.

3. Un punto singular aislado de una función f recibe el nombre de singularidad esencial de f si

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^n f(z) \quad \nexists\,,$$

para ningún entero positivo de n.

Ejemplos 1.- Consideremos la función

$$f(z) = \frac{3z^2 + 2z}{(z-4)(z-i)}\,,$$

la función es analítica en todos los puntos, excepto en $z = 4$ y $z = i$. Entonces, las únicas singularidades están en los puntos $z = 4$ y $z = i$, y como son un conjunto finito de singularidades cada una de estas son singularidades aisladas.

2.- Sea f la función:

$$f(z) = \left(\operatorname{sen}\left[\frac{x}{|z|^2}\right]\cosh\left[\frac{y}{|z|^2}\right] - i\cos\left[\frac{x}{|z|^2}\right]\operatorname{senh}\left[\frac{y}{|z|^2}\right]\right)^{-1}\,,$$

Si denotamos al denominador como $g(z)$, entonces

$$\begin{aligned} g(z) &= \operatorname{sen}\left[\frac{x}{x^2+y^2}\right]\cosh\left[\frac{y}{x^2+y^2}\right] - i\cos\left[\frac{x}{x^2+y^2}\right]\operatorname{senh}\left[\frac{y}{x^2+y^2}\right] \\ &= u(x,y) + iv(x,y) \neq 0\,, \end{aligned}$$

Es claro que $z \neq 0$. Por otra parte, de las condiciones de Cauchy-Riemann se tiene:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\cos\left[\frac{x}{x^2+y^2}\right]\cosh\left[\frac{y}{x^2+y^2}\right] - \frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}\operatorname{sen}\left[\frac{x}{x^2+y^2}\right]\operatorname{senh}\left[\frac{y}{x^2+y^2}\right] = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}\cos\left[\frac{x}{x^2+y^2}\right]\cosh\left[\frac{y}{x^2+y^2}\right] + \frac{x^2 - y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\operatorname{sen}\left[\frac{x}{x^2+y^2}\right]\operatorname{senh}\left[\frac{y}{x^2+y^2}\right] = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Las condiciones de Cauchy-Riemann se satisfacen en todas partes salvo en $z = 0$, donde ni g ni las derivadas parciales están definidas. Como las derivadas parciales son contínuas, entonces g es analítica en todos los puntos excepto $z = 0$. Por lo tanto, f es analítica salvo en $z = 0$. Por otra parte, $g = 0$ si su parte real como su parte imaginaria son nulas, así que las singularidades de f, además de $z = 0$, vienen dadas por el siguiente sistema ecuaciones:

$$\operatorname{sen}\left[\frac{x}{x^2+y^2}\right]\cosh\left[\frac{y}{x^2+y^2}\right] = 0 \quad \text{y} \quad \cos\left[\frac{x}{x^2+y^2}\right]\operatorname{senh}\left[\frac{y}{x^2+y^2}\right] = 0$$

Como $\cosh(\alpha) > 0$, la primera ecuación se satisface si

$$\operatorname{sen}\left[\frac{x}{x^2+y^2}\right] = 0 \;\Rightarrow\; \frac{x}{x^2+y^2} = \pm\, n\pi\,,$$

puesto que $\cos(\alpha) \neq 0$ cuando $\operatorname{senh}(\alpha) = 0$, entonces la segunda ecuación se satisface si $y = 0$. Por lo tanto, el sistema se satisface simultáneamente si

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{x}{x^2+y^2} = \pm\, n\pi \\ \\ y = 0 \end{array}\right. \quad \Rightarrow\; \frac{1}{x} = \pm\, n\pi\,,\;\; n = 0, 1, 2, \ldots$$

Las singularidades ocurren en el eje real y en los puntos donde $x = \pm 1/n\pi$. El punto límite de este conjunto, cuando $n \to \infty$, es el punto $z = 0$. Por lo tanto, f tiene una singularidad no aislada en $z = 0$ y singularidades aisladas en los puntos $z = \pm 1/n\pi$, con $n = 1, 2, 3, ...$

3.- Dada la función

$$f(z) = \frac{z^2 + 16}{z - 4i}\,, \quad z \neq 4i\,,$$

esta función es el cociente de dos funciones enteras y por lo tanto es analítica, salvo donde el denominador se hace nulo, esto es en $z = 4i$. Por otra parte:

$$f(z) = \frac{(z + 4i)(z - 4i)}{z - 4i} = z + 4i\,,$$

y

$$\lim_{z \to 4i} f(z) = \lim_{z \to 4i} z + 4i = 8i.$$

la función f tiene una singularidad removible en $z = 4i$ pues el límite existe. Podemos definir una función g igual a f, para $z \neq 4i$

$$g(z) = \begin{cases} z + 4i & \text{si } z \neq 4i \\ \\ 8i & \text{si } z = 4i \end{cases}$$

y queda claro que g es una función entera.

4. Transformaciones conformes

Nos interesará ahora considerar transformaciones entre planos complejos. Esto es

$$z = x + iy \leftrightarrow w = r + is \Rightarrow w = g(z) = r(x, y) + is(x, y) \leftrightarrow z = h(w) = x(r, s) + iy(r, s)\,.$$

4.1. Definiciones y propiedades

Vamos a estudiar transformaciones entre puntos $(x, y) \leftrightarrow (r, s)$ correspondientes a dos diagramas de Argand, de tal modo que existe una función inversa función $z = h(g(z))$, con $w = g(z)$ y $z = h(w)$ funciones analíticas, salvo en un número finito de polos aislados. Denominaremos a este tipo de transformaciones *transformaciones conformes* si además, en todo punto z y w (excepto en aquellos en los cuales $g'(z)$ y por lo tanto $h'(w)$ son cero o infinita) cumple con

- Curvas contínuas en el plano z transforman en curvas contínuas en el w
- Los ángulos entre dos curvas cualesquiera que se intersecten en el plano z serán los mismos que los que formen las curvas transformadas en el plano w. Esto es los ángulos entre las curvas serán invariantes bajo la transformación[3]

[3] De esta propiedad es donde la transformación hereda su nombre de conforme. Son transformaciones *isogonales* es decir, que preservan los ángulos entre curvas que se intersectan que son transformadas

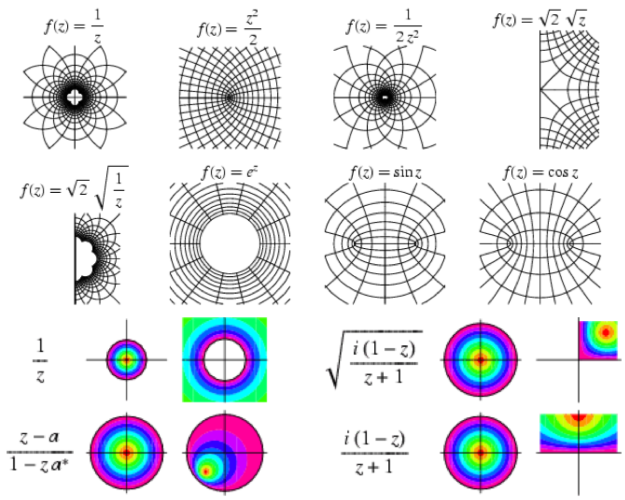

Figura 2: Tranformaciones conformes. Tomado de Eric W. Weisstein. **Conformal Mapping**. *MathWorld–A Wolfram Web Resource.* http://mathworld.wolfram.com/ConformalMapping.html

- El cambio de escala en la vecindad de puntos transformados es independiente de la dirección en la cual se mida.
- Cualquier función analítica en $z = x + iy$ transforma en otra función $w = r + is$ también analítica

La segunda de las afirmaciones es inmediata a partir de la primera. Es decir, si una transformación conforme de coordenadas tienen inversa y ambas son analíticas, es obvio que curvas contíunas $\mathcal{C}(z)$ serán transformadas a curvas contínuas $\tilde{\mathcal{C}}(w)$.

El hecho que la transformación conforme preserva el ángulo y las escalas se muestra en la figura 3 y puede comprobarse de la siguiente manera. Considere dos curvas, $\mathcal{C}_1(z)$ y $\mathcal{C}_2(z)$, en el plano complejo $z = x + iy$. Supongamos además que estas curvas se intersectan en un punto $z = z_0$. Entonces, sobre las tangentes a cada curva, en z_0, definimos otros dos puntos z_1 y z_2 de tal forma que

$$\left.\begin{array}{l} z_1 - z_0 = \rho e^{i\theta_1} \\ \\ z_2 - z_0 = \rho e^{i\theta_2} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} w_1 - w_0 = \rho_1 e^{i\phi_1} \\ \\ w_2 - w_0 = \rho_2 e^{i\phi_2} \end{array}\right.$$

Nótese que hemos construido los puntos z_1 y z_2 sobre las tangentes a z_0 a la misma distancia ρ de z_0 y, en principio, hemos supuesto que las distancias a los puntos transformados w_1 y w_2 (las cuales hemos identificado como ρ_1 y ρ_2, respectivamente), no son iguales. Ahora bien, dado que $w = g(z)$ es analítica entonces

$$\left.\frac{\mathrm{d}g(z)}{\mathrm{d}z}\right|_{z_0} = \left.\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right|_{z_0} = \lim_{z_1 \to z_0} \frac{w_1 - w_0}{z_1 - z_0} = \lim_{z_2 \to z_0} \frac{w_2 - w_0}{z_2 - z_0} \Rightarrow g'(z_0) = \lim_{\rho \to 0} \frac{\rho_1}{\rho} e^{i(\phi_1 - \theta_1)} = \lim_{\rho \to 0} \frac{\rho_2}{\rho} e^{i(\phi_2 - \theta_2)} \,.$$

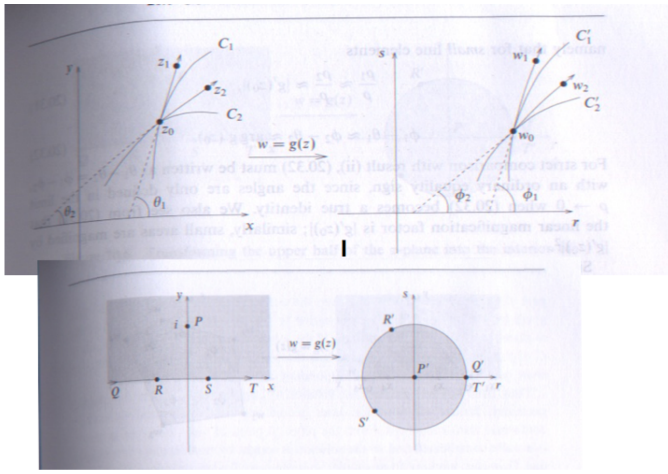

Figura 3: Tranformaciones conformes. Cuadrante superior representa las conservación de ángulos y escala bajo transformaciones y el inferior un ejemplo de transformaciones conforme

Es claro que al comparar las magnitudes y las fase demostramos que las transformaciones conformes preservan las distancias, $\rho_1 = \rho_2$, y los ángulos $(\phi_2 - \phi_1) = (\theta_2 - \theta_1)$. Adicionalmente, es muy fácil convecerse que si la transformación conforme conserva los ángulos entre curvas y las escalas en todas direcciones las figuras son transformadas en figuras equivalentes quizá ampliadas y rotadas, pero no deformadas.

4.2. Algunas consecuencias y ejemplos

Las consecuencias de la última afirmación revisten alguna importancia. Si $f = f(z)$ es analítica en el plano (x, y) y la transformación $z = h(w)$ también lo es, entonces la función $F(w) = f(h(w))$ necesariamente es analítica en el plano (r, s).

$$\frac{\Delta F}{\Delta w} = \frac{\Delta f}{\Delta h}\frac{\Delta h}{\Delta w} \equiv \frac{\Delta f}{\Delta z}\frac{\Delta h}{\Delta w}$$

Por hipótesis supusimos que f y h eran analíticas, por lo cual es inmediato concluir que debido a que los dos factores de la derecha son analíticos, la función $F(w)$ también lo será.

Esto implica que, tal y como mostramos, si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es analítica, entonces $u(x, y)$ y $v(x, y)$ serán funciones armónicas conjugadas, vale decir que satisfacen la ecuación de Laplace, con lo cual $\nabla^2 u(x, y) = \nabla^2 v(x, y) = 0$. Esto significa que $F = \Phi(w) + i\Psi(w)$. En otras palabras,

$$f = \phi + i\psi \quad \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \\ \\ \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \end{array} \right\} \quad \Leftrightarrow \quad F = \Phi + i\Psi \quad \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \\ \\ \dfrac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0 \end{array} \right\}$$

Esto impone que si $\Re f(z) = \phi$ es constante en el plano (x, y), también lo será $\Re F(w)\Phi$ en (r, s) (¡ Demuéstrelo !). Esta propiedad derivó una serie de aplicaciones en la solución de la ecuación de Laplace en dos dimensiones. Si bien es una técnica elegante y útil cuando es posible, no deja de ser limitada porque se restringe a 2D. Hoy los métodos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales en derivadas parciales han superado con creces este tipo de técnicas.

Los ejemplos son variados.

- las siguientes transformaciones representan

  $$\text{traslaciones: } w = z + b; \text{ rotaciones de ángulo } \theta : w = z e^{i\theta}; \text{ expansiones de escala } a : \; w = az$$

  y pueden ser combinadas como: $w = az + b$ con a y b números complejos. Para la traslación es inmediado. Para la rotación también, si recordamos que $z = |z|e^{i\phi}$ con lo cual $w = |z|e^{i\phi}e^{i\theta} = |z|e^{i(\phi+\theta)}$

- también la transformación de inversión $w = 1/z$ que transforma los puntos del interior de un círculo unidad a su exterior y viceversa. Una vez más, $w = \frac{1}{z} = \frac{1}{|z|e^{i\phi}} = \left|\frac{1}{z}\right| e^{-i\phi}$. Entonces es claro que

  $$0 \leq |z| \leq 1 \quad \Rightarrow \infty < |w| \leq 1 \qquad \wedge \qquad 1 \leq |z| \leq \infty \quad \Rightarrow 0 < |w| \leq 1$$

- Un caso más interesante lo constituye la transformación $w = e^{i\theta}\left(\frac{z - z_0}{z - z_0^*}\right)$, la cual transforma los puntos z_0 del semiplano superior complejo $y > 0$ al interior de un círculo unidad en el $w-$plano (ver figura 3 en la página 11). Para convencernos de ello notamos que

  $$|w| = \left| e^{i\theta}\left(\frac{z - z_0}{z - z_0^*}\right)\right| = \left|\frac{z - z_0}{z - z_0^*}\right|$$

  En general si z_0 y z los consideramos en el semiplano complejo superior $y \geq 0$, entonces siempre se cumple que $|z - z_0| \leq |z - z_0^*|$ con lo cual $|w| \leq 1$ y como se cumple para todo z en ese semiplano, entonces cada uno de esos puntos es transformado dentro de un círculo de radio $|w|$. Es inmediato convencerse que, la igualdad se cumple para puntos z sobre el eje real y que el punto $z = z_0$ es llevado al punto $w = 0$ Finalmente, notamos que si conocemos como transforman dos puntos $z_1 \to w_1$ y $z_2 \to w_2$ entonces podremos determinar la transformación. Esto es, conocer los valores de los parámetros z_0 y ϕ Este caso lo podemos apreciar si consideramos un par de puntos en el semiplano complejo y conocemos como tranforman. Digamos $z = i$ sobre el eje imaginario e imponemos que sea transformado a $w = 0$ entonces es inmediato determinar que $z_0 = i$ Por otro lado si imponemos que $z = \infty \Rightarrow w = 1$ entonces $1 = w = e^{i\theta} \Rightarrow \theta = 0$ con lo cual $w = \frac{z - i}{z + i}$.