Sucesiones y Series: nociones básicas

1. Notas Preliminares

Básicamente el tema central de este curso tiene que ver con el estudio de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y el desarrollo de métodos para resolverlas. Las Ecuaciones Diferenciales aparecen ya como tema de estudio, o curiosidad matemática, desde los tiempos de Isaac Newton[1] cuando se comenzó con el dearrollo del Cálculo Diferencial. El propio Newton las estudia en su tratado de Cálculo Diferencial donde discute sus soluciones a través de una expansión en series.

Newton estudia la siguiente ecuación diferencial, que por contener una primera derivada llamaremos una ecuación diferencial de primer orden:

$$\frac{dy(x)}{dx} = 1 - 3x + y(x) + x^2 + xy(x) \tag{1}$$

Para buscar su solución, Newton propone el siguiente método que consiste en suponer una solución que tiene la forma de una serie infinita. El primer término de la serie es:

$$y = 0 + \cdots$$

el cual corresponde al valor inicial $x = 0$ en la ecuación (1). Al insertar este valor en (1) resulta

$$y' = 1 + \cdots$$

que al integrarse resulta en

$$y = x + \cdots$$

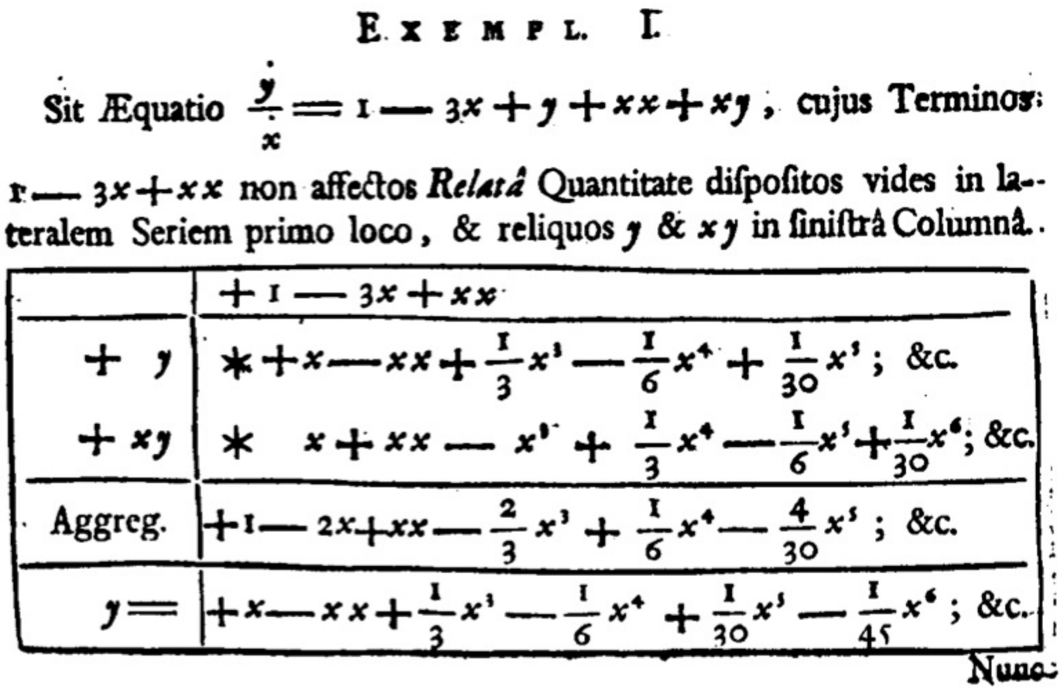
Sustituyendo esta última expresión en (1), resulta

$$\frac{dy(x)}{dx} = 1 - 3x + x + \cdots = 1 - 2x + x^2 + \cdots$$

Integrando esta última ecuación, se obtiene

$$y = x - x^2 + \cdots$$

[1] **Sir Isaac Newton** (1643-1727), fue un científico, físico, filósofo, inventor, alquimista y matemático inglés, autor de los *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, más conocidos como los Principia, donde describió la ley de gravitación universal y estableció las bases de la Mecánica Clásica mediante las leyes que llevan su nombre. Entre sus otros descubrimientos científicos destacan los trabajos sobre la naturaleza de la luz y la óptica y el desarrollo del cálculo matemático. Newton fue el primero en demostrar que las leyes naturales que gobiernan el movimiento en la Tierra y las que gobiernan el movimiento de los cuerpos celestes son las mismas. Es, a menudo, calificado como el científico más grande de todos los tiempos, y su obra como la culminación de la revolución científica. Tomado de WikipediA.



EXEMPL. I.

Sit Æquatio $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 1 - 3x + y + xx + xy$, cujus Terminos $1 - 3x + xx$ non affectos *Relatâ* Quantitate dispositos vides in lateralem Seriem primo loco, & reliquos y & xy in sinistrâ Columnâ.

	$+1 - 3x + xx$
$+y$	$* + x - xx + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{30}x^5$; &c.
$+xy$	$* \quad x + xx - x^3 + \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{6}x^5 + \frac{1}{30}x^6$; &c.
Aggreg.	$+1 - 2x + xx - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^4 - \frac{4}{30}x^5$; &c.
$y =$	$+x - xx + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{30}x^5 - \frac{1}{45}x^6$; &c.

Nunc

Figura 1: El esquema de Newton

Repitiendo el proceso:

$$\frac{dy(x)}{dx} = 1 - 2x + x^2 + \cdots \quad \Rightarrow \quad y = x - x^2 + \frac{x^3}{3} + \cdots$$

y continuando con el método

$$y = x - x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{6} + \frac{x^5}{30} - \frac{x^6}{45} + \cdots$$

Por otra parte, notemos que para cada valor de x y y, la ecuación (1) no es más que la derivada $y'(x)$ (pendiente) de las soluciones de

$$y'(x) = 1 - 3x + y(x) + x^2 + xy(x)$$

Así, con un poco de paciencia, o con algún programa de computación apropiado, se puede obtener el *campo vectorial* correspondiente a la ecuación diferencial, como se puede apreciar en la Figura 2a. En realidad las soluciones se pueden apreciar como las curvas determinadas por las direcciones indicadas en el campo vectorial, Figura 2b.

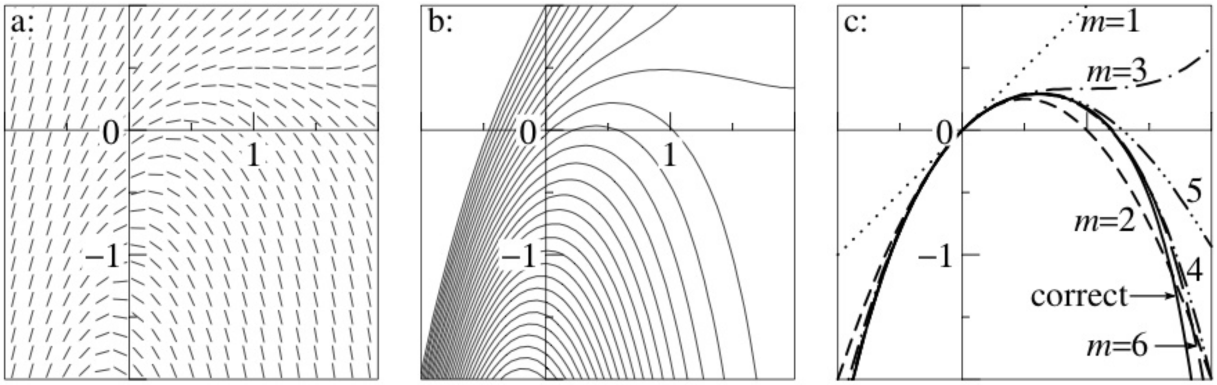


Figura 2: (a) Representación de los campos vectoriales. (b) Diferentes soluciones para la ecuación diferencial (1). (c) La solución correcta correspondiente al los valores iniciales $y(0) = 0$ y $y'(0) = 1$ con las diferentes soluciones aproximadas

Las aproximaciones que se van obteniendo con el método mostrado anteriormente se pueden observar, junto con la solución verdadera en la Figura 2c. Notemos que todas las aproximaciones son más cercanas entre si cuando x toma valores cada vez más próximos a cero.

Comencemos entonces nuestro estudio sobre Ecuaciones Diferenciales precisamente con las Series Matemáticas.

2. Introducción a las Series

Para empezar, vayamos a la noción elemental de sucesiones, básicamente, una sucesión es una colección numerable de elementos, dados en cierto orden, como:

$$1, 2, 3, 4, \ldots, \qquad 1, x, x^2, \ldots.$$

Una sucesión puede contener infinitos elementos y en este caso se denomina una sucesión infinita, por lo tanto, si a cada número entero positivo se le asocia un elemento u_n, entonces el conjunto ordenado: $u_1, u_2, u_3, \ldots u_n, \ldots$ define una sucesión infinita. Cada término u_n tendrá un siguiente término u_{n+1} y por lo tanto no existe un último término.

Las sucesiones se pueden expresar de una manera mas sencilla definiendo el n-ésimo término, como por ejemplo:

$$u_n = \frac{1}{n};$$

cuyos primeros cuatro términos son:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\,.$$

Otra manera de definir sucesiones es por medio de una relación de recurrencia, por ejemplo, para la bien conocida sucesión de Fibonacci la relación de recurrencia es

$$u_1 = u_2 = 1\ , \qquad u_{n+1} = u_n + u_{n-1}\ , \qquad n \geq 2\,,$$

cuyos primeros términos son:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots\,.$$

Existe una función que permite generar los números de Fibonacci, esta función cuando se expande en potencias de x tiene como coeficientes los números de Fibonacci:

$$f(x) = \frac{x}{1 - x - x^2} = x + x^2 + 2\,x^3 + 3\,x^4 + 5\,x^5 + 8\,x^6 + 13\,x^7 + 21\,x^8 + 34\,x^9 + \cdots$$

También es posible definir una sucesión a través del concepto de función. Se define una función para los enteros positivos, de manera que $f(n)$ es el término n-ésimo de la sucesión para cada $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Los términos de las sucesion se escriben como:

$$f(1), f(2), f(3), \ldots f(n), \ldots\,.$$

Las siguientes fórmulas son ejemplos de sucesiones

$$f(n) = (-1)^n\ , \qquad f(n) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\ , \qquad f(n) = (-1)^n\left[1 + \frac{1}{n}\right]\,.$$

Una sucesión $\{f(n)\}$ se dice que es creciente si

$$f(n) < f(n+1) \quad \forall\, n \geq 1\,,$$

o decreciente si:

$$f(n) > f(n+1) \quad \forall\, n \geq 1\,.$$

Una sucesión se denomina monótona cuando es creciente o decreciente, y en estos casos se tiene que la convergencia o divergencia se determina de manera sencilla, como lo indica el siguiente teorema:

Teorema Una sucesión monótona converge si y sólo si es acotada.

Una sucesión $\{f(n)\}$ se dice acotada si existe un número positivo M tal que $|f(n)| \leq M$ para todo n.

A medida que n se hace cada más grande, el valor de una sucesión u_n se puede comportar de una manera bastante particular. Por ejemplo, si $u_n = 1/n$, es claro que u_n *converge* a cero a medida que $n \to \infty$. Pero si $u_n = e^{an}$, el límite dependerá del valor de a.

La pregunta a responder tiene que ver con el hecho de saber si los términos de u_n tienden, o no, a un límite finito cuando n crece indefinidamente.

Con el concepto de sucesiones es posible definir una expresión analítica que formalmente tiene aspecto de suma, que contiene un número infinito de sumandos y que se denomina *serie infinita*. Si u_n, $n = 1, 2, 3, ...$, es una sucesión infinita de números reales o complejos, es posible formar una nueva sucesión s_n a partir de tomar sumas parciales de $\{u_n\}$:

$$s_1 = u_1\,, \quad s_2 = u_1 + u_2\,, \quad s_3 = u_1 + u_2 + u_3\,, \quad \ldots \quad s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots u_n = \sum_{i=1}^{n} u_i\,.$$

Si la sucesión s_n tiende a un límite S, la serie infinita $\sum_{i=1}^{n} u_i$ se dice que es convergente y converge al valor S, el cual es único. Entonces se puede escribir:

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad \Rightarrow \quad S = \lim_{n\to\infty} s_n\,. \tag{2}$$

El número S se denomina la suma de la serie infinita y debe ser entendido como el límite de la sucesión. Se dirá que la serie *diverge* si el valor de la sumatoria aumenta indeteniblemente, pero también puede oscilar, con lo cual tampoco converge.

$$s_i = \sum_{n=1}^{i} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + (-1)^i + \cdots$$

Esto se puede formalizar un poco diciendo que la condición para la existencia de un límite S es que para cada $\epsilon > 0$ existe un número $N = N(\epsilon)$ tal que

$$\|S - s_i\| < \epsilon \quad \text{para } i > N \qquad \Rightarrow \|s_j - s_i\| < \epsilon \quad \text{para, todo} \;\; i, j > N$$

Esta afirmación se denomina **criterio de Cauchy**[2] sobre la convergencia de las series parciales. Esto es, la condición necesaria y suficiente para que una suma parcial s_i converja y

[2] **Augustin Louis Cauchy**París, 1789 - 1857, matemático francés pionero en los estudios de análisis (real y complejo) y de la Teoría de los Grupos de Permutación. Cauchy hizo aportes importantes en los criterios de convergencia y divergencia de series infinitas, así como tambien, en ecuaciones diferenciales, determinantes, probabilidades y Física Matemática

quiere decir que las sumas parciales convergen a medida que avanzamos en los términos de la serie.

La serie cuyos términos son tomados a partir del $(n+1)$-ésimo término, y en el mismo orden, de la serie (2) se llama el *resto n-ésimo* de la serie (2) y se denota por:

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \quad \Rightarrow \quad u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \cdots \,. \tag{3}$$

Si el resto n-ésimo de la serie (2) converge, entonces su suma

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \,, \tag{4}$$

se denomina el *resto de la serie*.

De las series nos interesa conocer cuanto suman. Es decir, cuál es el valor de s_i para una serie finita cuando $i = N$ Pero también estamos interesados en conocer cuánto suma una serie infinita. Empecemos con las finitas.

2.1. Series elementales

De cursos anteriores hemos conocido algunas series emblemáticas

Serie aritmética Desde siempre hemos oído hablar de progresiones aritméticas. Ellas son, sencillamente

$$s_N = \sum_{n=0}^{N-1} (a + nd) = a + (a+d) + (a+2d) + (a+3d) + (a+4d) + \cdots + [a + (N-1)d] \,.$$

donde a y d son números reales o complejos.

Es fácil comprobar que al desarrollar la serie en orden inverso y sumarla con la serie original:

$$\begin{array}{llllllll} s_N = & a & +(a+d) & +(a+2d) & +(a+3d) & +\cdots & +[a+(N-1)d] \\ s_N = & [a+(N-1)d] & +[a+(N-2)d] & +[a+(N-3)d] & +[a+(N-4)d] & +\cdots & +a \end{array}$$

resulta

$$s_N = \frac{N}{2}\left[a + a + (N-1)d\right] \rightarrow s_N = \frac{N}{2}\left[\text{Primer Término} + \text{Ultimo Término}\right]$$

obviamente, si $N \rightarrow \infty$ la serie diverge.

Serie Geométrica De ésta también sabemos que

$$s_N = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{N-1} = \sum_{i=0}^{N} ar^i$$

y si restamos

$$\begin{array}{rcccccc} s_N = & a & +ar & +ar^2 & +ar^3 & +\cdots & +ar^{N-1} \\ rs_N = & ar & +ar^2 & +ar^3 & +ar^4 & +\cdots & +ar^N \end{array}$$

también es inmediato comprobar que si $\|r\| < 1$

$s_N = \dfrac{a(1-r^N)}{1-r}$ con lo cual tendremos que la suma de la serie será: $S = \lim\limits_{N\to\infty} s_N = \dfrac{a}{1-r}$

y, divergirá (u oscilará) si $\|r\| \geqslant 1$.

Series Aritmético-geométricas Estas series, un poco más exóticas y como su nombre lo sugiere son una combinación de las anteriores. Estos es

$$s_N = a+(a+d)r+(a+2d)r^2+(a+3d)r^3+(a+4d)r^4+\cdots+[a+(N-1)d]\,r^{N-1} = \sum_{n=0}^{N-1}(a+nd)r^n$$

y con la misma estrategia de las geométricas se llega a encontrar el valor de la suma S, nada intuitiva:

$$s_N = \frac{a - [a+(N-1)d]\,r^N}{1-r} + \frac{rd(1-r^{N-1})}{(1-r)^2}$$

Otra vez, si si $\|r\| < 1$ entonces cuando $N \to \infty$

$$S = \frac{a}{1-r} + \frac{rd}{(1-r)^2}\,.$$

Serie Armónica Quizá no la conocíamos con este nombre (y menos por sus propiedades) pero seguro nos la hemos tropezado

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots \frac{1}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Esta serie es engañosa, en apariencia parece converger, pero no es así. Si analizamos con más cuidado, veremos que hay sutilezas

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\sigma_0} + \underbrace{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)}_{\sigma_1} + \underbrace{\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)}_{\sigma_2} + \underbrace{\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{16}\right)}_{\sigma_3} + \cdots$$

y puede ser reescrita como

$$1+\underbrace{\frac{1}{1+1}}_{\sigma_0}+\underbrace{\frac{1}{2+1}+\frac{1}{2+2}}_{\sigma_1}+\underbrace{\frac{1}{4+1}+\frac{1}{4+2}+\frac{1}{4+3}+\frac{1}{4+4}}_{\sigma_2}$$

$$+\underbrace{\frac{1}{8+1}+\frac{1}{8+2}+\cdots+\frac{1}{8+8}}_{\sigma_3}+\cdots+\sum_{j=1}^{2^n}\frac{1}{2^n+j}+\cdots$$

con lo cual

$$\sigma_0=\frac{1}{2};\quad \sigma_1=\frac{7}{12}>\frac{1}{2};\quad \sigma_2=\frac{533}{840}>\frac{1}{2};\quad \sigma_3=\frac{95549}{144144}>\frac{1}{2};$$

y claramente diverge ya que

$$1+\sigma_0+\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3+\cdots>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots$$

Esta prueba aparentemente se le debe a Nicole D'Oresme[3]. Una de las generalizaciones de la serie armónica es la función Zeta de Riemann[4]

$$\zeta(p)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-p}\,,\quad \Re(p)>1\,.$$

Esta última expresión es también un ejemplo donde a partir de una serie se define una función.

[3]**Nicole D'Oresme** (1323-1382) Matemático francés que inventó la geometría coordenada antes de Descartes. Más detalles en `http://www-history.mcs.st-and.ac.uk` y más detalles sobre la serie harmónica en `http://mathworld.wolfram.com/HarmonicSeries.html`

[4]**Georg Friedrich Bernhard Riemann** 1826 Hanover, Alemania - 1866 Selasca, Italia, Matemático alemán cuyas ideas sobre las geometría del espacio han tenido un profundo impacto en el desarrollo de la Física Teórica. Igualmente clarificó la noción de integral al introducir el concepto de lo que hoy se conoce como *integral de Riemann*.
Más detalles en `http://www-history.mcs.st-and.ac.uk`

3. Ejercicios

1. Encuentre la suma de los 100 primeros enteros.
2. Encuentre la distancia total que recorre una pelota que rebota verticalmente y que en cada rebote pierde 2/3 de su energía cinética.
3. Encuentre la suma de la serie $S = 2 + \frac{5}{2} + \frac{8}{4} + \frac{11}{8} + \cdots$.
4. Determine el limite de las siguientes sucesiones cuando $n \to \infty$.

    a) $u_n = \frac{n}{n+1}$

    b) $u_n = \frac{1}{1+n^2}$

    c) $u_n = \frac{n^2}{1+n}$

    d) $u_n = \frac{(an+b)^2}{cn^2+d}$