Series

1. Más sobre las series geométricas

La serie geométrica: $a + az + az^2 + az^3 + \cdots + az^n + \cdots$, con $|z| < 1$ es uno de los pocos ejemplos donde se puede encontrar el término de las sumas parciales a través de una expresión sencilla. Esta serie se puede tomar como punto de partida para encontrar la suma de un gran número de series interesantes. Consideremos el caso $a = 1$ y $z = x$.

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x}\,, \quad |x| < 1\,. \tag{1}$$

Si cambiamos x por x^2 en (1) resulta

$$1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots + x^{2n} + \cdots = \frac{1}{1-x^2}\,, \quad |x| < 1\,. \tag{2}$$

Si se multiplica (2) por x se obtiene

$$x + x^3 + x^5 + x^7 + \cdots + x^{2n+1} + \cdots = \frac{x}{1-x^2}\,, \quad |x| < 1\,. \tag{3}$$

Si cambiamos x por $-x$ en (1) resulta

$$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots = \frac{1}{1+x}\,, \quad |x| < 1\,. \tag{4}$$

Si cambiamos x por x^2 en (4) resulta

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots = \frac{1}{1+x^2}\,, \quad |x| < 1\,. \tag{5}$$

Si se multiplica (5) por x se obtiene

$$x - x^3 + x^5 - x^7 + \cdots + (-1)^n x^{2n+1} + \cdots = \frac{x}{1+x^2}\,, \quad |x| < 1\,. \tag{6}$$

Si cambiamos x por $2x$ en (2) resulta

$$1 + 4x^2 + 16x^4 + \cdots + 4^n x^{2n} + \cdots = \frac{1}{1-4x^2}\,, \quad |x| < \frac{1}{2}\,. \tag{7}$$

Si se deriva (1) entonces

$$1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots = \frac{1}{(1-x)^2}\,, \quad |x| < 1\,. \tag{8}$$

Si se integra (4):

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} + \cdots = \log(1+x)\,, \quad |x| < 1\,. \tag{9}$$

Si se integra (5) ahora resulta

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots = \arctan(x)\,, \quad |x| < 1\,. \tag{10}$$

2. El método de la diferencia

A veces para una serie finita $s_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$ uno encuentra que para el término n-ésimo $a_n = f(n) - f(n-1)$ para alguna función $f(n)$. En ese caso es inmediato demostrar

$$s_N = \sum_{n=1}^{N} a_n = f(N) - f(0) \qquad \Rightarrow s_N = \sum_{n=1}^{N} a_n = \sum_{k=1}^{m} f(N-k+1) - \sum_{k=1}^{m} f(1-k) \tag{11}$$

más aún, se puede ir más allá. Si identificamos que el término n-ésimo tiene la forma de $a_n = f(n) - f(n-m)$ es fácilmente demostrable que la suma de la serie se puede escribir como la segunda ecuación de (11). Hay que hacer notar que el argumento $n-m$ puede ser positivo o negativo. Con lo cual el método de la diferencia resulta versátil y muy útil cuando se requiere encontrar la suma de series de variada dificultad

- Así, la suma de la serie

  $$s_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} \rightarrow a_n = \frac{1}{n(n+1)} = -\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right) \rightarrow f(n) = \frac{-1}{n+1}$$

  se podrá expresar como

  $$s_N = f(N) - f(0) = \frac{-1}{N+1} + 1 = \frac{N}{N+1}$$

- También siguiendo la estrategia de la expansión en fracciones simples se puede encontrar que

  $$s_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+2)} \rightarrow a_n = \frac{1}{n(n+2)} = -\left(\frac{1}{2(n+2)} - \frac{1}{2n}\right) \rightarrow f(n) = \frac{-1}{2(n+2)}$$

  de forma y manera que

  $$s_N = f(N) + f(N-1) - f(0) - f(-1) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{N+2} + \frac{1}{N+1}\right)\,.$$

Con alguna frecuencia surgen las series de números naturales. La más simple es

$$s_N = 1 + 2 + 3 + \cdots + N = \sum_{n=1}^{N} n = \frac{N(N+1)}{2} \quad \text{una serie aritmética de razón } d = 1$$

o también más interesante puede ser la serie de cuadrados de números enteros

$$s_N = 1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + N^2 = \sum_{n=1}^{N} n^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$$

Este resultado, nada intuitivo, surge de la aplicación ingeniosa del método de la diferencia. Tal y como hemos dicho, se trata de encontrar que el elemento genérico de la serie $a_n = f(n) - f(n-1) = n^2$ para alguna función. Suponga una función del tipo

$$f(n) = n(n+1)(2n+1) \quad \Rightarrow f(n-1) = (n-1)n(2n-1)\,,$$

entonces

$$f(n) - f(n-1) = n(n+1)(2n+1) - (n-1)n(2n-1) = 6n^2$$

con lo cual

$$a_n = n^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} \quad \Rightarrow s_N = \frac{f(N) - f(0)}{6} = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}\,.$$

2.1. Sumando por analogía

Como siempre, intentaremos proceder por analogía. La intención es expresar una serie complicada como sumas de series conocidas. Considere el siguiente ejemplo

$$s_N = \sum_{n=1}^{N}(n+1)(n+3) = \sum_{n=1}^{N}\left(n^2 + 4n + 3\right) = \sum_{n=1}^{N} n^2 + \sum_{n=1}^{N} 4n + \sum_{n=1}^{N} 3$$

con lo cual

$$s_N = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} + \frac{N(N+1)}{2} + 3N = \frac{N(2N^2 + 15N + 31)}{6}$$

3. Algebra Elemental de Series

Las series se suman, se igualan y se multipilican. Para ello es importante que tengamos cuidado con los índices y sus valores. Consideremos un par de series infinitas $u = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y $v = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ con lo cual la suma de esas series será

$$u + v = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)$$

Los índices son mudos y se acomodan para ser sumados. Para sumar series es imperioso que los índices de cada serie comiencen con el mismo valor esto es

$$\left.\begin{array}{l} u = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \\ \\ v = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{j=1}^{\infty} b_j = \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n-1} + b_n) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$$

nótese que hemos hecho $j = n$ y $n = n - 1$.

Algo parecido ocurre cuando las series se igualan

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \quad \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} [(n+1) a_{n+1} - b_n] = 0$$

Para finalizar se puede comprobar que las series también se pueden multiplicar

$$u\, v = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \,,$$

donde:

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_j b_{n-j} + \cdots + a_{n-2} b_2 + a_{n-1} b_1 + a_n b_0 \,.$$

Cuando las sucesiones comprenden sumas y productos de otras sucesiones, es decir, sí u_k y v_k son dos sucesiones con $u_k \to U$ y $v_k \to V$ cuando $k \to \infty$, entonces se cumple que:

1. si a y b son números independientes de k, entonces $a u_k + b v_k \to aU + bV$ cuando $k \to \infty$.
2. $u_k v_k \to UV$ para $k \to \infty$.
3. si $V \neq 0$ entonces $u_k / v_k \to U/V$ a medida que $k \to \infty$.
4. si $u_k < v_k \;\forall\; k > N$ entonces $U \leq V$ cuando $k \to \infty$.

Teorema: Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge, entonces cualquiera de sus restos converge. Si cuelquier resto de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge, entonces la propia serie también converge y si además

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \,, \quad s_i = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \,, \quad r_i = \sum_{n=i+1}^{\infty} u_n \,,$$

Entonces

$$S = s_i + r_i \,.$$

Se tiene entonces que es posible agregar o quitar un número finito de términos a la serie dada y esta operación no influirá sobre su convergencia. También se desprende del teorema anterior que si la serie converge entonces su resto tiende a cero:

$$\lim_{i\to\infty} r_i = \lim_{i\to\infty} (S - s_i) = 0\,. \tag{12}$$

4. Series telescópicas

Una propiedad importante de las series finitas es la propiedad telescópica:

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k+1}) = a_1 - a_{n+1}\,, \tag{13}$$

para el caso de series infinitas, se consideran aquellas series $\sum u_n$ donde cada término se puede expresar como una diferencia de la forma:

$$u_n = a_n - a_{n+1}\,.$$

Teorema: Sean $\{u_n\}$ y $\{a_n\}$ dos sucesiones de números complejos tales que

$$u_n = a_n - a_{n+1} \quad \text{para} \quad n = 1, 2, 3, \ldots\,.$$

Entonces la serie $\sum u_n$ converge si y sólo si la sucesión $\{a_n\}$ converge, en cuyo caso se tiene:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = a_1 - L \quad \text{donde} \quad L = \lim_{n\to\infty} a_n\,.$$

Ejemplo: Consideremos la siguiente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}\,.$$

Tenemos entonces que

$$u_n = \frac{1}{n^2+n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\,,$$

es decir que: $a_n = 1/n$, $a_1 = 1$ y además ya vimos que la sucesión $a_n = 1/n$ converge. Entonces:

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0\,.$$

Por lo tanto:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} = 1\,.$$

Las series pueden llegar a tener comportamientos extraños, como se ve con la siguiente serie

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots\,,$$

como se verá más adelante la suma tienen el valor de $S = \ln(2)$, pero si se arreglan los términos de la manera siguiente:

$$S = 1 + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \frac{1}{13}\right) + \cdots\,,$$

la cual contiene exáctamante los mismos términos, aunque en orden diferente, la suma es ahora $S = \frac{3}{2}\ln(2)$.

A pesar de que las series pueden presentan estos comportamientos extraños, las series resultan muy buenas representaciones aproximadas de funciones, por ejemplo:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\,. \tag{14}$$

La suma directa de una serie infinita no es un método práctico para estudiar su convergencia, por ejemplo, la serie

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ln k}{k^2}\,,$$

converge al valor $0,937548...$, pero para obtener estos primeros cinco decimales se tendría que sumar unos 10^7 términos!

Es necesario entonces desarrollar algunos criterios que nos permitan saber si una serie puede llegar a converger o no.

5. Ejercicios

1. Muestre que $s_N = 1 + 2^3 + 3^3 + \cdots + N^3 = \sum_{n=1}^{N} n^3 = \left(\sum_{n=1}^{N} n\right)^2 = \frac{N^2(N+1)^2}{4}$.

2. Demuestre que para $|x| < 1$

    a) $\sum_{n=1}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$

    b) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = \frac{x^2+x}{(1-x)^3}$

    c) $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n = \frac{x^3+4x^2+x}{(1-x)^4}$

    d) $\sum_{n=1}^{\infty} n^4 x^n = \frac{x^4+11x^3+11x^2+x}{(1-x)^5}$