Criterios de Convergencia

1. Introducción

Sólo podremos calcular la suma de algunas series, en la mayoría nos será imposible y nos tendremos que conformar con saber si convergen o no, o peor aún, si una suma parcial converge sin poder calcular el valor de esa suma. Los términos de una serie pueden ser positivos, negativos o números complejos y las series pueden converger (decrecer o crecer hacia un valor finito) diverger (incrementar o decrecer indefinidamente) u oscilar, Existen una serie de criterios y teoremas de aplicación general que expondremos a continuación.

2. Convergencia Absoluta o Condicional

Para estudiar la convergencia de una serie dada i.e. $\sum a_i$ siempre podremos asociarle otra de la forma $\sum \|a_i\|$, es decir la serie de valores absolutos, con lo cual garantizamos la positividad (y que sean números reales) de los términos de la serie. Si la serie de los valores absolutos $\sum \|a_i\|$ converge, entonces también covergerá la serie original $\sum a_i$ y diremos que esa serie es *absolutamente convergente*. Sin embargo si la serie de valores absolutos diverge, no podremos decir que $\sum a_i$ siempre converja. De hecho si converge diremos que es *condicionalmente convergente* y, con un rearreglo de sus términos podrá converger, diverger u oscilar.

Teorema: Si $\sum \|a_n\|$ converge, entonces también converge $\sum a_n$ y se tiene que

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|a_n\|$$

Para una serie de términos positivos el criterio de convergencia más intuitivo (necesario pero no suficiente) es que en límite cuando $n \to \infty$ el término n-ésimo tienda a cero. Con lo cual tenemos que si esta condición no se satisface, la serie diverge.

Teorema: Si la serie $\sum a_n$ converge, el término n-ésimo tiende a cero, esto significa que:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0\,.$$

Notemos que para la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0\,,$$

sin embargo, como ya vimos anteriormente, esta serie diverge. Esto significa que el teorema suministra una condición suficiente para que exista la divergencia de la serie, es decir, si para el término n-ésimo de la serie a_n no se cumple que tiende a cero cuando $n \to \infty$, entonces la serie $\sum a_n$ diverge.

3. Criteterio de Comparación

En segundo lugar de simplicidad está el criterio de comparación entre un par de series de términos positivos. Si conocemos el comportamiento de una de ellas comparamos el de la otra. Esto es, suponga que consideremos dos serie, una de prueba $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y una serie conocida y convergente (o divergente) $\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n$, entonces

$$\text{Si } \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a_n} \text{ converge y } \forall\, n \text{ se tiene que } \tilde{a_n} \geqslant a_n \quad \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a_n} \geqslant \sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge}$$

Por otro lado

$$\text{Si } \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a_n} \text{ diverge y } \forall\, n \text{ se tiene que } 0 \leqslant \tilde{a_n} \leqslant a_n \quad \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a_n} \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ diverge}$$

Ejemplo Para ilustrar esta estrategia consideremos las siguientes series

$$s = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{25} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!+1}$$

En ese caso compararmos con una serie conocida

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots = 1 + \underbrace{1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots}_{e} = 1 + e$$

y es claro que la serie indicada no es otra cosa que e, con lo cual la serie claramente converge y su suma es $1 + e$.

4. Criterio de la Raíz

Dada una serie de términos positivos $s = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$, el criterio de la raíz (o también de la raíz de Cauchy) puede resumirse en el siguiente par de afirmaciones. Si:

$$(a_n)^{\frac{1}{n}} \leqslant \rho < 1 \quad \text{para un } n \text{ suficientemente grande y } \rho \text{ independiente de } n \implies \text{converge}$$

$$(a_n)^{\frac{1}{n}} > 1 \quad \text{para un } n \text{ suficientemente grande y } \rho \text{ independiente de } n \implies \text{diverge}$$

$$(a_n)^{\frac{1}{n}} = 1 \quad \text{para un } n \text{ suficientemente grande y } \rho \text{ independiente de } n \implies (?)$$

Otra forma, más compacta de expresarlo sería

$$\text{Si } \rho = \lim_{n\to\infty} (a_n)^{\frac{1}{n}} \quad \text{entonces:} \quad \begin{cases} \rho < 1 \implies \text{converge} \\ \rho > 1 \implies \text{diverge} \\ \rho = 1 \implies (?) \end{cases}$$

Es fácil ver que si utilizamos el criterio de comparación, entonces

$$(a_n)^{\frac{1}{n}} \leqslant \rho \qquad \Rightarrow a_n \leqslant \rho^n \qquad \Rightarrow \begin{cases} \text{cuando } \rho < 1 \quad \text{la serie converge} \\ \text{cuando } \rho \geqslant 1 \quad \text{la serie diverge} \end{cases}$$

Ejemplo Dada la siguiente serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{n}{n+1}\right]^{n^2},$$

por lo tanto:

$$(a_n)^{\frac{1}{n}} = \left[\frac{n}{n+1}\right]^{n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \quad \Rightarrow \quad \rho = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1\,.$$

La serie converge.

5. Criterio de D'Alembert

Dada una serie de términos positivos $s = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$, el criterio de D'Alembert[1] o también llamado criterio del cociente, compara el valor relativo de un término de la serie con el que

[1]**Jean Le Rond D'Alembert** París, Francia 1717 - 1783 Matemático francés pionero en el estudio de las ecuaciones diferenciales y su utilización en la Física, en particular en el estudio de los fluídos
Más detalles en `http://www-history.mcs.st-and.ac.uk`

le precede. Este criterio se resume también fácilmente

$$\text{Si } \rho = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \quad \text{entonces:} \quad \begin{cases} \rho < 1 & \Longrightarrow \quad \text{converge} \\ \\ \rho > 1 & \Longrightarrow \quad \text{diverge} \\ \\ \rho = 1 & \Longrightarrow \quad \text{indeterminado} \end{cases}$$

Nótese que si

$$\rho < 1 \quad \Rightarrow \rho < r < 1 \quad \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} < r \quad \Rightarrow a_{n+1} = a_n r$$

Entonces para un $N < n$, pero también suficientemente grande, tendremos que los términos de la serie a partir de ese N serán

$$a_N + a_{N+1} + a_{N+2} + a_{N+3} \cdots = a_N + r a_N + r^2 a_N + r^3 a_N \cdots = a_N \left(1 + r + r^2 + r^3 + r^4 \cdots\right)$$

y que no es otra cosa que una serie geométrica con razón $r < 1$ y por consiguiente converge. Es claro que un argumento similar se puede utilizar para probar la divergencia.

Ejemplo Un ejemplo inmediato lo constituye la serie

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{1}{4} + \frac{5}{32} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} \quad \Rightarrow \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \frac{1}{2}\frac{n+1}{n} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right),$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right] = \frac{1}{2} < 1\,,$$

con lo cual tiene que converger.

6. Criterio de la Integral de Maclaurin

El criterio de la Integral de Maclaurin[2] es otro criterio de comparación, pero esta vez se compara la serie con una integral. Así supondremos que existe una función $f(x)$ contínua y monótonamente decreciente para un valor de $x \geqslant x_0$ y que, adicionalmente, se cumple que para algún valor entero $x = n$ el valor de la función es igual a un término de la serie. Esto es $f(n) = a_n$. Entonces se tendrá que si el límite $\lim_{N\to\infty} \int^N \mathrm{d}x\ f(x)$ existe y es finito, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Por el contrario si el límite no existe o es infinito, entonces diverge.

[2] **Colin Maclaurin** 1698, Argyllshire, Escocia - 1746 Edinburgo, Escocia. Matemático escocés quien escribió el *Tratado de los Fluxiones* el primer tratado que expuso de una manera sistemática y rigurosa el cálculo diferencial ideado por Newton. Este tratado fue como respuesta a la crítica de Berkeley sobre la falta de rigurosidad de los métodos Newton.

La idea de este criterio es comparar la integral de $f(x)$ (es decir, el área bajo la curva) con la suma de rectángulos que representa la serie. Entonces, la suma parcial

$$s_i = \sum_{n=1}^{i} a_n \equiv \sum_{n=1}^{i} f(n) \,.$$

Pero:

$$\left.\begin{array}{l} s_i > \int_1^{i+1} \mathrm{d}x \; f(x) \\ \\ s_i - a_1 < \int_1^{i} \mathrm{d}x \; f(x) \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \int_1^{i+1} \mathrm{d}x \; f(x) \leq s_i \leq \int_1^{i} \mathrm{d}x \; f(x) + a_1$$

donde $a_1 = f(1)$, con lo cual, al hacer $i \to \infty$ tendremos que si el límite de la integral existe, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

$$\int_1^{\infty} \mathrm{d}x \; f(x) \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \int_1^{\infty} \mathrm{d}x \; f(x) + a_1$$

Ejemplos

1. Un ejemplo inmediato podría ser determinar si la siguiente serie converge

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(n - \frac{3}{2}\right)^2} \quad \Rightarrow f(x) = \frac{1}{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2} \quad \Rightarrow \lim_{N \to \infty} \int^{N} \mathrm{d}x \; \frac{1}{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2} \quad \Rightarrow \lim_{N \to \infty} \left(\frac{-1}{N - \frac{3}{2}} \right) = 0$$

   con lo cual claramente converge

   Este criterio es muy útil para acotar (entre un ínfimo y un supremo) el residuo de una determinada serie. Vale decir

   $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{N} a_n + \underbrace{\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n}_{\text{Residuo}} \qquad \Rightarrow \int_{N+1}^{\infty} \mathrm{d}x \; f(x) \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \leq \int_{N+1}^{\infty} \mathrm{d}x \; f(x) + a_{N+1}$$

2. Comprobar que la función Zeta de Riemann, $\zeta(p) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}$, efectivamente converge. En este caso $f(x) = x^{-p}$, entonces

   $$\zeta(p) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-p} \qquad \Rightarrow \int_1^{\infty} \mathrm{d}x \; x^{-p} = \left\{ \begin{array}{ll} \left. \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right|_1^{\infty} & \text{Para } p \neq 1 \\ \\ \left. \ln x \right|_1^{\infty} & \text{Para } p = 1 \end{array} \right.$$

   y es claro que para $p > 1$ el límite existe y es finito, por lo tanto, la función Zeta de Riemann, $\zeta(p) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}$, converge para $p > 1$.

7. Series alternantes y convergencia condicional

Hasta ahora todos los criterios que analizamos eran para una serie de términos positivos $s = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ por lo cual todos esos criterios nos llevaban al concepto de series absolutamente convergente. Esto es, si $\sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\|$ converge, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ también converge. Sin embargo, muchas veces nos tendremos que conformar con que una serie sea simplemente convergente y no requerir que sea absolutamente convergente. Este es el caso de las series alternantes. Series en las cuales se alternas términos positivos y negativos. Son series del tipo

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + \cdots + a_{2n-1} - a_{2n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (a_n) \qquad \text{con } a_n \geq 0$$

Entonces, si la serie es monótona decreciente para un n suficientemente grande tenemos lo que se denomina el Criterio de Leibniz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (a_n) \text{ converge, si:} \quad \left\{ \begin{array}{lc} a_n > a_{n-1} & \forall \quad n > N \\ & \wedge \\ a_n \to 0 & \text{cuando } n \to \infty \end{array} \right.$$

De otro modo la serie oscilará.

Estas condiciones son fáciles de ver si reorganizamos la serie de los primeros $2m$ términos, a partir de un determinado N par y $N > n$, entonces

$$s_{2m} = (a_N - a_{N-1}) + (a_{N-2} - a_{N-3}) + \cdots + (a_{N+2m-2} - a_{N+2m-1})$$

donde todos los paréntesis son positivos, con lo cual $s_{2m} > 0$ y se incrementa al incrementar m. Ahora bien, si rearreglamos la serie tendremos que

$$s_{2m} = a_N - (a_{N-1} - a_{N-2}) - (a_{N-3} - a_{N-4}) + \cdots - (a_{N+2m-1} - a_{N+2m-2}) - a_{N+2m-1}$$

donde, otra vez los paréntesis son positivos y es inmediato comprobar que entonces $s_{2m} < a_n$ para todo m.

Como $a_n \to 0$ cuando $n \to \infty$, la serie alternante necesariamente converge.

La series alternantes ya eran conocidas desde hace mucho tiempo, como por ejemplo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \left(\frac{x^n}{n} \right) + \cdots .$$

Esta serie converge y su suma es $\log(1 + x)$ para $-1 < x \leq 1$. Para x positivo es una serie alternante y en el caso particular de $x = 1$ se tiene:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{n} \right) + \cdots = \log(2)$$

Otra relación interesante es:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + (-1)^{n-1}\left(\frac{1}{2n-1}\right) + \cdots = \frac{\pi}{4}$$

Teorema: Si $\{a_n\}$ es una sucesión monótona decreciente con límite igual a cero, la serie alternante

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n\,,$$

converge.

Si S es su suma y s_n su suma parcial n-ésima, se tiene que:

$$0 < (-1)^n\,(S - s_n) < a_{n+1} \quad \text{para} \quad n \geq 1\,.$$

Ejemplo Estudiemos la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots\,,$$

Sabemos que $1/n$ es una sucesión monótona decreciente y que:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0\,,$$

por lo tanto, de acuerdo al teorema anterior la serie converge; como ya hemos visto.

Ejemplo Sea

$$a_{2n-1} = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad a_{2n} = \int_{n}^{n+1}\frac{dx}{x} \quad \text{para} \quad n = 1, 2, 3, \ldots\,.$$

Por otro lado, se tiene también que:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0\,,$$

y que a_n es monótona decreciente, por lo tanto la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n\,,$$

converge.

La suma parcial $(2n-1)$ se puede escribir de la siguiente manera:

$$s_{2n-1} = 1 - \int_1^2 \frac{dx}{x} + \frac{1}{2} - \int_2^3 \frac{dx}{x} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \int_{n-1}^n \frac{dx}{x} + \frac{1}{n} =$$

$$s_{2n-1} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \int_1^n \frac{dx}{x} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n)\,.$$

y obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n)\right) = \gamma\,,$$

donde γ se conoce como la constante de Euler, $\gamma \approx 0,5772156649$.