Series de potencias

1. Introducción

La idea de series se puede ampliar al permitir que sus términos sean función de alguna variable (una o varias), esto es $a_n = a_n(x)$. Esta extensión del concepto se serie, trae como consecuencia que ahora las sumas parciales dependen de x

$$s_n = s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x) = a_0(x) + a_1(x) + a_2(x) + \cdots ,$$

con lo cual, si

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) ,$$

entonces, el comportamiento de las serie también dependerá de la variable.

La convergencia de la serie podrá ser posible para algunos valores de x y no para otros. El punto central con las series de funciones $f(x)$ complicadas es la de tratar de construir funciones como una serie de términos, $a_k(x)$, más simples. Así, esas sumas parciales $f_n(x)$ constituirán la función deseada

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x) \quad \Rightarrow f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k(x) .$$

Estaremos interesados en aquellas funciones a las cuales converjan las sumas parciales de una serie. Para fijar conceptos, comenzaremos por las series de funciones más comunes: Las Series de Potencias.

2. Series de Potencias

Asociaremos una serie de potencias $a_n = c_n x^n$ a un polinomio de grado infinito.

$$P(x) = c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+c_4x^4+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \text{o también} \quad P(x-x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(x - x_0\right)^n$$

Esta asociación tiene la ventaja de permitirnos intuir algunos comportamientos de la serie para algunos valores de x. Los coeficientes c_n son números independientes de x. Pero, más aún, estas series pueden ser series de potencias de número complejos. Vale decir, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$con $z = x + iy$.

3. Convergencia de una serie de potencias

Se pueden utilizar todos los criterios que hemos desarrollado anteriormente. Así una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ converge en un punto x_0 si el $\lim_{n\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ existe, para $x = x_0$, para todo x o para algunos x.

Una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ convergerá absolutamente sí el

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \left\| c_j (x - x_0)^j \right\| = \rho$$

existe.

También se cumplirá el criterio de convergencia absoluta. Esto es, si $\sum_{n=0}^{\infty} \| c_n (x - x_0)^n \|$ converge $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ converge, pero el inverso no es siempre verdad.

Los criterios más populares para evaluar la convergencia, se seguirán cumpliendo. Así el criterio de D'Alembert y el de la raíz de Cauchy se podrán reescribir como:

$$\left.\begin{array}{r} \lim_{n\to\infty} \left\| \dfrac{c_{n+1} (x - x_0)^{n+1}}{c_n (x - x_0)^n} \right\| = \rho(x) \\ \\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n (x - x_0)^n} = \rho(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} \rho(x) < 1 & \Rightarrow & \text{converge} \\ \\ \rho(x) > 1 & \Rightarrow & \text{diverge} \end{array}\right.$$

Sólo que ahora es bueno enfatizar que $\rho = \rho(x)$, es decir que el límite dependerá de la variable. Llamaremos, de ahora en adelante a este límite el *radio o entorno de convergencia*, el cual delimitará los valores de x para que la serie de potencias converja.

Ejemplos

1. Considermos la siguiente serie

$$s_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \,,$$

por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left\| \frac{\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{x^n}{n!}} \right\| = \lim_{n\to\infty} \left\| \frac{x}{n+1} \right\| = 0 \,,$$

es decir,

$$\rho = \rho(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0 \,,$$

con lo cual la serie converge para todo valor de x.

2. Otro caso ocurre cuando consideramos la siguiente serie de potencias:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\ n\ (x-2)^n = x - 2 - 2\ (x-2)^2 + 3\ (x-2)^3 - 4\ (x-2)^4 + \cdots ,$$

por lo tanto:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left\| \frac{(-1)^{n+2}\ (n+1)\ (x-2)^{n+1}}{(-1)^{n+1}\ n\ (x-2)^n} \right\| = \|x-2\| \lim_{n\to\infty} \left\| \frac{n+1}{n} \right\|$$

lo que implica que

$$\rho = \|x-2\| \lim_{n\to\infty} \left\| \frac{n+1}{n} \right\| = \|x-2\| \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{converge si: } \|x-2\| < 1 \Rightarrow\ 1 < x < 3 \\ \\ \text{diverge si: } \|x-2\| > 1\,. \end{array} \right.$$

Es decir, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\ n\ (x-2)^n$ convergerá únicamente para $1 < x < 3$. Para otros valores de x, diverge.

Para puntualizar

- Si una serie converge en $x = x_1$, convergerá absolutamente para $\|x - x_0\| < \|x_1 - x_0\|$ y divergerá para $\|x - x_0\| > \|x_1 - x_0\|$.
- Se llama radio de convergencia, $\rho = \rho(x)$ a aquella cantidad tal que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, (x - x_0)^n$ converge para $\|x - x_0\| < \rho$ y diverge para $\|x - x_0\| > \rho$. Una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, (x - x_0)^n$ que converge únicamente para $x = x_0$ tendrá un radio de convergencia $\rho = 0$, mientras que una que converja para todo x tendrá un radio de convergencia $\rho = \infty$.

3.1. Covergencia uniforme

En definitiva se puede refrasear el criterio de convergencia de Cauchy que vimos anteriormente. Para cualquier valor de $\epsilon > 0$, tan pequeño como uno quiera, siempre existirá un número N **independiente de** x, con $a \leq x \leq b$ tal que

$$\text{Si } S(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \quad \Rightarrow \|S(x) - s_n(x)\| < \epsilon \qquad \forall\ x \in [a,b]\ \wedge\ n \geq N. \quad (1)$$

Con ello es inmediato indentificar el error que se comete cuando se corta la serie en un N suficientemente grande

$$S(x) = \underbrace{\sum_{n=1}^{N} a_n(x)}_{s_n(x)} + \underbrace{\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n(x)}_{\approx\epsilon}$$

Hay que resaltar el hecho de que las suma de funciones contínuas $a_n(x)$ no necesariamente habrá de ser contínua, el concepto de convergencia uniforme busca garantizar que esa suma de funciones contínuas también sea contínua.

Recordemos la idea de continuidad de una función. Una función será contínua si sus límites por la derecha y por izquierda coinciden

$$\lim_{t \to x^{\pm}} f(t) = f(x)$$

Por otro lado, a partir del hecho de que

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$$

es valido preguntarse si el límite de la sucesión de sumas parciales es contínua, esto es:

$$\lim_{t \to x^{\pm}} \lim_{n \to \infty} f_n(x) \stackrel{?}{=} \lim_{n \to \infty} \lim_{t \to x^{\pm}} f_n(x)$$

Es decir, al suponer que la suma de términos contínuos tiende a una función contínua estamos suponiendo que podemos intercambiar los límites. pero eso no es simpre cierto. Considere el caso (extremo)

$$f_n = n^2 x \left(1 - x^2\right)^n \text{ con } 0 \leq x \leq 1 \;\; n = 1, 2, 3, \ldots$$

entonces

$$\left\{ \begin{array}{ll} \lim_{n \to \infty} f_n = 0 \Rightarrow & \int_0^1 \mathrm{d}x \; \left[\lim_{n \to \infty} f_n(x)\right] = 0 \\ & \\ \int_0^1 \mathrm{d}x \; f_n(x) = \frac{n^2}{2(n+1)} \Rightarrow & \lim_{n \to \infty} \int_0^1 \mathrm{d}x \; f_n \to \infty \,. \end{array} \right.$$

Claramente no se pueden intercambiar los límites.

Ejemplo Sea la serie

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x) = x^2 + \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^2} + \frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^3} + \cdots + \frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^k} + \cdots \,,$$

de manera que

$$a_k(x) = \frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^k} \,.$$

Como

$$\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)} = \frac{1}{1+x^2} < 1 \quad \forall \quad x \neq 0 \,,$$

la serie es absolutamente convergente $\forall \, x$ $(x \neq 0)$.

Sin embargo, todas las sumas parciales son cero de manera que $f(0) = 0$. El término n-ésimo para la suma parcial es

$$f_n(x) = x^2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(1+x^2)^k} = 1 + x^2 - \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} \,,$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1 + x^2 \,, \qquad x \neq 0 \,.$$

pero hemos establecido que $f(0) = 0$ de manera que $f(x)$ no es contínua.

Ejemplo Dada la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{[(n-1)x+1]\,[nx+1]} \,,$$

cuya suma n-ésima parcial es

$$s_n(x) = \frac{nx}{nx+1} \,.$$

La función $s_n(x)$ es una función continua de $x \ \forall\ 0 \leq x \leq 1$, y para todo n. Por otro lado,

$$\begin{aligned} S(x) &= \lim_{n\to\infty} s_n(x) = 0 \,, \ \text{si} \ x = 0 \\ S(x) &= \lim_{n\to\infty} s_n(x) = 1 \,, \ \text{si} \ x \neq 0 \,. \end{aligned}$$

Existe una discontinuidad en $x = 0$ para $S(x)$ y por lo tanto la condición (1) no se cumplirá.

Para el caso de series de funciones, existen un par de criterios que identifican la convergencia uniforme. El criterio Mayorante de Weierstrass[1] y el criterio de Abel[2]. Estos criterios desarrollan la noción de convergencia uniforme la cual es necesaria para asegurar el intercambio en los límites.

3.2. Criterio Mayorante de Weierstrass

La idea de convergencia uniforme se introduce para garantizar que la sumas infinitas de un conjunto de funciones sea contínua.

Una condición suficiente, pero no necesaria, para que la serie

$$a_1(x) + a_2(x) + a_3(x) + \cdots + a_n(x) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$$

[1]**Karl Theodor Wilhelm Weierstrass** Westphalia 1815 - Berlin 1897 Matemático Alemán con importantes contribuciones al análisis complejo mediante la utilización de series.

[2]**Niels Henrik Abel** 1802-1829 Matemático Noruego. Su primera mayor aportación fue la prueba de la imposibilidad de resolución algebraica de la ecuación quíntica mediante radicales.

sea uniformemente convergente es dada por la condición de Weierstrass:

Si encontramos una serie convergente de números positivos

$$\mathcal{M} = \sum_{j=1}^{\infty} M_j \quad \text{con } M_i \geq \|a_i(x)\| \quad \forall\, x \in [a,b] \quad \text{entonces la serie } \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$$

es **uniformemente** convergente.

La demostración se obtiene a partir de la definición misma de convergencia. Si $\sum_{j=1}^{\infty} M_j$ converge, entonces para $n+1 \geq N$ se tiene

$$\sum_{j=n+1}^{\infty} M_j < \epsilon \quad \text{y como } \|a_i(x)\| \leq M_i \quad \Rightarrow \sum_{j=n+1}^{\infty} \|a_i(x)\| < \epsilon \quad \Rightarrow \|S(x) - s_n(x)\| \equiv \sum_{j=n+1}^{\infty} \|a_i(x)\| < \epsilon$$

con la cual la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ será uniformemente convergente para todo $x \in [a,b]$.

Ahora bien, como consideramos los $M_i \geq 0$. La serie en cuestión también será absolutamente convergente. Otra vez, los criterios de convergencia absoluta y, en este caso, de convergencia uniforme, no son consecuencia uno del otro, ni están relacionados.

Las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^2} \quad \text{para } -\infty < x < \infty \qquad \wedge \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \quad \text{para } 0 \leq x \leq 1$$

convergen uniformemente pero NO absolutamente. Sin embargo, en el intervalo $0 \leq x \leq 1$ la serie $\sum_{j=0}^{\infty} (1 - x)x^j$ converge absolutamente pero no uniformemente, por cuanto tiene una discontinuidad. Se puede demostrar que

$$\sum_{j=0}^{\infty} (1 - x)x^j = \begin{cases} 1\,, & 0 \leq x < 1 \\ 0\,, & x = 1 \end{cases}$$

con lo cual se puede concluir que una serie arbitraria $f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_i(x)$ no podrá converger uniformemente en intervalos en los cuales la función $f(x)$ sea discontínua.

Ejemplo La serie

$$f(x) = \cos(x) + \frac{1}{2^2}\cos^2(x) + \frac{1}{3^2}\cos^3(x) + \cdots$$

es uniformemente convergente, porque al tomar $M_k = 1/k^2$ la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\,,$$

converge a $\pi^2/6$.

3.3. Criterio de Abel

El criterio de Abel se puede resumir de la siguiente manera: Sí

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(x) \quad \wedge \quad a_i(x) = c_i f_i(x)\,,$$

donde $\sum_{i=0}^{\infty} c_i(x)$ converge, es decir:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} c_j(x) = S\,.$$

entonces la serie *converge uniformemente* en $[a, b]$. Para que se cumpla el criterio de Abel, $f_n(x)$ tiene que estar acotada ($0 \leq f_n \leq M \; \forall\, n$) y tiene que ser monótonamente decreciente en el intervalo en el cual esté definida, $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$ con $x \in [a, b]$.

En resumen, si la serie

$$f(x) = a_1(x) + a_2(x) + a_3(x) + \cdots + a_n(x) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$$

es uniformemente convergente para $a \leq x \leq b$, entonces es posible integrar y diferenciar término por témino.

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}a_k}{\mathrm{d}x} \\ \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\alpha}^{\beta} a_k(x)\,\mathrm{d}x\,, \end{aligned}$$

donde $a \leq \alpha < \beta \leq b$.

La convergencia uniforme no implica convergencia absoluta y convergencia absoluta no implica convergencia uniforme, como se vió anteriormente, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}\,,$$

es absolutamente convergente pero no uniformemente convergente cerca de $x = 0$.

Las series absolutamente convergentes tienen la propiedad de comportarse como las series finitas, los términos pueden ser multiplicados e intercambiado el orden de la suma. Las series uniformemente convergentes se comportan como las series finitas donde la serie es contínua si cada término de la serie también lo es.

Ejercicios

1. Considere la siguiente sucesión

$$f_n(x) = \frac{\operatorname{sen}(nx)}{\sqrt{n}}\,,\ \ n = 1, 2, 3, \ldots$$

   demuestre que:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right] \neq \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_n(x)\,,$$