Series de Potencias y Series de Taylor

1. Algebra y convergencia de series de potencias

El álgebra elemental de series se puede reconsiderar a la luz de las series de potencias. De esta forma recordamos que los índices en las series son mudos

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\ n\ \left(x-x_0\right)^{n-1} = \sum_{j=1}^{\infty} a_j\ j\ \left(x-x_0\right)^{j-1} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1}\ (k+1)\ \left(x-x_0\right)^{k}$$

en la última sumatoria hemos hecho $k=j-1$, por lo cual $j=k+1$.

Las series se igualan

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \left(x-x_0\right)^{n} &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n\ n\ \left(x-x_0\right)^{n-1} \\ \sum_{n=0}^{\infty} b_n \left(x-x_0\right)^{n} &= \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1}\ (k+1)\ \left(x-x_0\right)^{k} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}\ (n+1)\ \left(x-x_0\right)^{n} \end{aligned}$$

por lo cual

$$b_n = a_{n+1}\ (n+1)\ .$$

Si la igualdad hubiera sido

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(x-x_0\right)^{n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\ n\ \left(x-x_0\right)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}\ (n+1)\ \left(x-x_0\right)^{n} \quad \Longrightarrow \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{(n+1)}$$

Las series se suman

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(x-x_0\right)^{n} + \sum_{k=2}^{\infty} b_k \left(x-x_0\right)^{k} = a_0 + a_1 \left(x-x_0\right) + \sum_{n=2}^{\infty} \left(a_n+b_n\right) \left(x-x_0\right)^{n}$$

o también

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(x-x_0\right)^{n} + \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+2} \left(x-x_0\right)^{k+2} &= a_0 + a_1 \left(x-x_0\right) + \sum_{n=2}^{\infty} \left(a_n+b_n\right) \left(x-x_0\right)^{n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n+c_{n-2}\right) \left(x-x_0\right)^{n}\ , \end{aligned}$$

y en este último caso $c_{-2}=c_{-1}=0$ y $c_i=b_{i+2}$. Nótese como en los dos ejemplos anteriores hemos hecho coincidir los dós índices de la sumatoria desde el comienzo.

La series también se multiplican, esto es

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n\right] \left[\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$

con

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_j b_{n-j} + \cdots + a_{n-2} b_2 + a_{n-1} b_1 + a_n b_0$$

Si alguna de las series de potencias es absolutamente convergente, entonces su multiplicación con otra, será absolutamente convergente.

Pero también las series de potencias se ¡ **invierten** ! y para ello utilizamos todo lo visto anteriormente veamos. Supongamos que se tiene una serie del tipo

$$y - y_0 = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \cdots + a_n (x - x_0)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

Es decir tenemos $y - y_0$ expresado en términos de una serie de potencias de $(x - x_0)^n$ entonces, igual podremos plantearnos invertir el proceso, vale decir, expresar $(x - x_0)$ en términos de potencias $(y - y_0)^n$ Esto es

$$(x - x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (y - y_0)^n \quad \Rightarrow (x - x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \left[\sum_{j=0}^{\infty} a_j (x - x_0)^j\right]^k$$

y al igualar términos con la misma potencia, despejamos los coeficientes b_n en términos de los a_n, de forma que

$$\begin{aligned}
b_1 &= \frac{1}{a_1} \\
b_2 &= -\frac{a_2}{(a_1)^3} \\
b_3 &= \frac{2(a_2)^2 - a_1 a_3}{(a_1)^5} \\
b_4 &= \frac{5a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 - 5a_2^3}{(a_1)^7} \\
\vdots &= \qquad \vdots
\end{aligned}$$

Igualmente, si una serie $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ converge para un entorno $-R \leq x \leq R$ entonces por el criterio de Mayorante de Weierstrass, convergerá absoluta y uniformemente para $-S \leq x \leq S$ con $0 \leq S \leq R$. Más aún, el criterio de Abel nos garantiza las siguientes propiedades:

- Dado que todos los términos $a_n(x) = c_n\,(x - x_0)^n$ son funciones contínuas de x y $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(x - x_0)^n$ converge uniformemente para un entorno $-S \leq x \leq S$, entonces la función $f(x)$ es contínua en el intervalo de convergencia.

- Si los términos $a_n(x) = c_n\,(x - x_0)^n$ son funciones contínuas de x, entonces la serie puede ser derivada término a término

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(x - x_0)^n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\ n\ \ (x - x_0)^{n-1}$$

(nótese como cambia el comienzo de la serie) y convergerá a

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n\ n\ \ (x - x_0)^{n-1} \to \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} \quad a_n(x)\ \wedge \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}a_n(x) \quad \text{contínuas}\ \wedge\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)\,,$$

converge uniformemente en $[a, b]$.

- De igual manera las series pueden ser integradas término a término

$$\int_a^b \mathrm{d}x\ f(x) = \int_a^b \mathrm{d}x\ \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b \mathrm{d}x\ c_n\,(x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1}\,(x - x_0)^{n+1}\ .$$

2. Serie de Taylor

Para los físicos el uso apropiado (y frecuente) de la serie Taylor facilita muchos cálculos. La idea detrás de este tipo de series es la de la aproximación de una determinada función por una serie de potencias en donde existe una forma sistemática de construir los coeficientes y, dependiendo de el número de términos que utilicemos en la serie, tendremos una idea de cuan aproximada es la serie y cuanto es el error que cometemos al desarrollar la serie hasta un determinado término. Así supodremos que $f = f(x)$ es una función contínua y contínuamente diferenciable. Con lo cual, si denotamos $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = f'(x)$, entonces supondremos que $f'(x), f''(x), f'''(x), \cdots, f^{(n)}(x)$ están definidas en el intervalo $[a, b]$.

De cursos anteriores se sabe que:

$$\int_a^{a+h} \mathrm{d}x\ f'(x) = f(a+h) - f(a)\ \Rightarrow\ f(a+h) = f(a) + \int_a^{a+h} \mathrm{d}x\ f'(x)\ \Rightarrow\ f(a+h) \approx f(a) + hf'(a)\,,$$

donde hemos supuesto que en intervalo $[a, a + h]$ la función $f'(x)$ es constante y tiene como valor $f'(a)$. Ahora bien, esto vale todo x y para cualquier función, por lo tanto se cumple que:

$$
\begin{aligned}
f(x) &\approx \quad f(a) + (x-a)f'(a)\,, \\
f'(x) &\approx \quad f'(a) + (x-a)f''(a)\,, \\
f''(x) &\approx \quad f''(a) + (x-a)f'''(a)\,, \\
&\vdots \quad \vdots \\
f^{(n-1)}(x) &\approx \quad f^{(n-1)}(a) + (x-a)f^{(n)}(a)\,.
\end{aligned}
$$

Con lo cual podemos construir

$$
f(a+h) = f(a) + \int_a^{a+h} \mathrm{d}x\ f'(x) \approx f(a) + \int_a^{a+h} \mathrm{d}x\,[f'(a) + (x-a)f''(a)] \approx f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a),\,,
$$

que no es otra cosa que una aproximación de segundo orden a $f(a+h)$. En general podemos construir

$$
\begin{aligned}
f(a+h) &= f(a) + \int_a^{a+h} \mathrm{d}x\ f'(x) = f(a) + \int_a^{a+h} \mathrm{d}x\ \left[f'(a) + \int_a^{a+h} \mathrm{d}x\ f''(x)\right] \\
&= f(a) + hf'(a) + \int_a^{a+h} \mathrm{d}v\ \left[\int_a^{a+h} \mathrm{d}x\ f''(x)\right] \\
&= f(a) + hf'(a) + \int_a^{a+h} \mathrm{d}u\ \left(\int_a^{a+h} \mathrm{d}v\ \left[f''(a) + \int_a^{a+h} \mathrm{d}x\ f'''(x)\right]\right) \\
&= f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a) + \int_a^{a+h} \mathrm{d}u\ \left(\int_a^{a+h} \mathrm{d}v\ \left[\int_a^{a+h} \mathrm{d}x\ f'''(x)\right]\right)
\end{aligned}
$$

y si repetimos ese procedimiento n veces, suponiendo que las derivadas de $f(x)$ existan, tendremos la aproximación $n-1$ a la función. Esto es

$$
f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \frac{h^3}{3!}f'''(a) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(a) + \mathcal{R}_n
$$

y también es fácil convencerse por inspección que el residuo o el error que cometemos en la aproximación $n-1$ viene dado por la integración enésima de la derivada enésima, vale decir

$$
\mathcal{R}_n = \int_a^{a+h} \mathrm{d}u\ \int_a^{a+h} \mathrm{d}v\ \underbrace{\cdots\ \cdots}_{n \text{ veces}} \int_a^{a+h} \mathrm{d}x\ f'''(x)
$$

y por el Teorema del Valor medio

$$
\int_a^{a+h} \mathrm{d}\tau g(\tau) = hg(\xi) \quad \Rightarrow \mathcal{R}_n = \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(\xi) \quad \text{con } a \le \xi \le a+h
$$

Ahora bien, una elección astuta del parámetro $h = x - a$ nos lleva a la conocida expresión de la serie de Taylor para una función de una variable

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!}f'''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(a) + \mathcal{R}_n$$

y el error vendrá dado por

$$\mathcal{R}_n = \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(\xi) \quad \text{con } a \leq \xi \leq a+h$$

así la expansión de Taylor especifica el valor de una función en un punto x en términos de el valor de la función y sus derivadas en un punto de referencia a. La expansión se hace en términos de potencias de la diferencia, $(x-a)$, entre el punto que se evalúa y el punto de referencia.

Algunas otras formas de expresar la serie de Taylor, serían

$$f(x+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} f^n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}}{n!} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n \mathbb{D}^n}{n!} f(x) = e^{h\mathbb{D}} f(x) \quad \text{donde, } \mathbb{D} \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$$

Si el punto de referencia es $a = 0$ tendremos la serie de Maclaurin

$$f(x) = f(0) + xf'(a) + \frac{x^2}{2!}f''(a) + \frac{x^3}{3!}f'''(a) + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(a) + \mathcal{R}_n$$

2.1. Algunas Series de Taylor

Un listado incompleto de las series de Taylor más utilizadas es

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \quad \text{para } -\infty < x < \infty \\
\operatorname{sen} x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots \quad \text{para} -\infty < x < \infty \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \cdots \quad \text{para} -\infty < x < \infty \\
\arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)} + \cdots \quad \text{para} -1 < x < 1 \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \cdots \quad \text{para } -1 < x < 1 \\
(1+x)^m &= 1 + mx + m(m-1)\frac{x^2}{2} + m(m-1)(m-2)\frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{m!}{n!(m-n)!}x^n + \cdots \quad \forall\, x
\end{aligned}$$

2.2. La expansión binomial

Por su uso frecuente, consideremos el caso de la expansión binomial

$$
\begin{aligned}
(1+x)^m &= 1+mx+m(m-1)\frac{x^2}{2}+m(m-1)(m-2)\frac{x^3}{3!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{m!}{n!(m-n)!}x^n\,,\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\begin{array}{c} m\\ n\end{array}\right)x^n\,,
\end{aligned}
$$

donde el término $\left(\begin{array}{c} m\\ n\end{array}\right)$ se denomina el coeficiente binomial y la serie termina cuando $m=n$.

Ahora bien, escrito de la forma compacta se sugiere que el exponente m tendría que ser entero y positivo. Pero no es así. La serie explícita no se restringe a valores enteros y positivos de m. Por ello, la forma compacta pero exacta de la expansión binomial es

$$
\begin{aligned}
\left(1+\frac{x}{a}\right)^m &= 1+m\left(\frac{x}{a}\right)+\frac{m(m-1)}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\left(\frac{x}{a}\right)^3+\cdots\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+n)\Gamma(1+m-n)}\left(\frac{x}{a}\right)^n\,.
\end{aligned}
$$

Donde hemos utilizado la función $\Gamma(x)$ como la generalización del factorial para valores que no se restringen a enteros positivos. Cuando m es un entero positivo tendremos $\Gamma(1+m)=m!$. Nótese también que si el exponente es negativo, $\left(1+\frac{x}{a}\right)^m$ tiene una singularidad o un polo en $x=-a$.

2.3. Taylor en varias variables

Sólo por razones de completitud, y para reforzar los conceptos de que es un desarrollo en series para una función alrededor de un determinado punto, escribiremos el desarrollo en series de Taylor para una funcionón de dos variables $f=f(x,y)$. Esta es

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= f(a,b)+(x-a)\left.f_x\right|_{ab}+(y-b)\left.f_y\right|_{ab}\\
&+ \frac{1}{2!}\left[(x-a)^2\left.f_{xx}\right|_{ab}+2(x-a)(y-a)\left.f_{xy}\right|_{ab}+(y-a)^2\left.f_{yy}\right|_{ab}\right]\\
&+ \frac{1}{3!}\left[(x-a)^3\left.f_{xxx}\right|_{ab}+3(x-a)^2(y-a)\left.f_{xxy}\right|_{ab}+3(x-a)(y-a)^2\left.f_{xyy}\right|_{ab}+(y-a)^3\left.f_{yyy}\right|_{ab}\right]\\
&+ \cdots
\end{aligned}
$$

De una manera más compacta

$$
f\left(x^j+x_0^j\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(x^k\partial_k\right)^n f\left(x^m\right)\Big|_{x^m=x_0^m}\quad\Rightarrow f\left(\vec{r}+\vec{a}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\vec{r}\cdot\vec{\nabla}\right)^n f\left(x^m\right)\Big|_{\vec{r}=\vec{a}}
$$

Dónde hemos utilizado la siguiente convención

$$f_x = \frac{\partial}{\partial x} = \partial_x; \quad f_y = \frac{\partial}{\partial y} = \partial_y; \quad f_{xx} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \partial_{xx}; \quad f_{xy} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} = \partial_{xy}; \quad f_{yy} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \partial_{yy}; \quad \cdots$$