Series de Polinomios Ortogonales

1. Introducción

Enunciaremos un teorema debido a Weierstrass el cual garantiza que una función contínua en un intervalo $[a, b]$ puede ser aproximada uniformemente por una serie de polinomios. Por lo tanto, cualquier función contínua podrá ser aproximada por combinaciones lineales de potencias.

El Teorema de aproximación polinómica de Weiernstrass queda enunciado como sigue. Cualquier función contínua $f(x)$ en un intervalo cerrado $x \in [a, b]$ podrá ser aproximada uniformente por polinomios en ese mismo intervalo si, para un n suficientemente grande y un ϵ suficientemente pequeño siempre se tiene que

$$\|\mathcal{P}_n(x) - f(x)\| < \epsilon \qquad \forall\ x \in [a, b]$$

Aceptaremos este teorema sin demostración[1], sin embargo este teorema nos permitirá desarrollar las secciones siguientes.

2. Polinomios de Legendre

El primero de los ejemplos de una base ortonormal de polinomios en la cual podremos expresar cualquier función contínua en el intervalo cerrado $x \in [-1, 1]$ serán los *Polinomios de Legendre*. Estos vienen construidos a partir de la Fórmula de Rodrígues

$$P_n(x) = \frac{1}{n!2^n} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2 - 1)^n, \qquad n = 0, 1, 2, ...$$

con $P_0(x) = 1$.

Es decir

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 & P_1(x) &= x \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) & P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \\ P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) & P_5(x) &= \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x) \\ &\vdots & &\vdots \end{aligned}$$

[1]Consultar: Byron, F.W. y Fuller W.F. (1970) **Mathematics of Classical and Quantum Physics** y Cushing, J. (1975) **Applied Analytical Mathematics for Physical Sciences.**

2.1. Generalidades de los Polinomios de Legendre

Es fácil comprobar que los polinomios de Legendre $|\mathbf{P}_\alpha\rangle \leftrightarrow P_\alpha(x)$ son mutuamente ortogonales para un producto interno definido como

$$\langle \mathbf{P}_n|\mathbf{P}_m\rangle = \int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{2n+1}\delta_{nm}\,.$$

Donde la función delta de Kronecker es $\delta_{\alpha\beta} = 0$ si $\alpha \neq \beta$; y $\delta_{\beta\beta} = 1$. La norma es definida por

$$\|\mathbf{P}_n\|^2 = \langle \mathbf{P}_n|\mathbf{P}_n\rangle = \int_{-1}^{1} P_n^2(x)\mathrm{d}x \doteq \frac{2}{2n+1}$$

nótese que los polinomios de Legendre, calculados a partir de la Fórmula de Rodrigues no están normalizados.

Ejemplos:

1.
$$\int_{-1}^{1} P_1(x)\,P_2(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1}[x]\left[\frac{1}{2}\left(3x^2-1\right)\right]\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1}\left(\frac{3}{2}x^3 - \frac{1}{2}x\right)\mathrm{d}x = 0\,.$$

2.
$$\int_{-1}^{1} P_2(x)\,P_2(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{2}\left(3x^2-1\right)\right]\left[\frac{1}{2}\left(3x^2-1\right)\right]\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1}\left(\frac{9}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}\right)\mathrm{d}x = \frac{2}{5}\,.$$

Al ser los Polinomios de Legendre un conjunto completo de funciones, ellos expanden el espacio de funciones contínuas en el intervalo cerrado $x \in [-1,1]$. Por ello cualquier función en el intervalo $[-1,1]$ puede ser expresada en esa base.

$$f(x) = |\mathbf{F}\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\;|\mathbf{P}_k\rangle = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\langle\mathbf{P}_k|\mathbf{F}\rangle}{\langle\mathbf{P}_k|\mathbf{P}_k\rangle}\;|\mathbf{P}_k\rangle = \sum_{k=0}^{\infty}\underbrace{\frac{2k+1}{2}\left[\int_{-1}^{1} f(t)P_k(t)\,\mathrm{d}t\right]}_{a_k} P_k(x)\,,$$

los primeros términos son:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(t)\mathrm{d}t + \frac{3}{2}\left[\int_{-1}^{1} t f(t)\mathrm{d}t\right]P_1(x) + \frac{5}{4}\left[\int_{-1}^{1}(3t^2-1)f(t)\mathrm{d}t\right]P_2(x) \\ &+ \frac{7}{4}\left[\int_{-1}^{1}(5t^3-3t)f(t)\mathrm{d}t\right]P_3(x) + \frac{9}{16}\left[\int_{-1}^{1}(35t^4-30t^2+3)f(t)\mathrm{d}t\right]P_4(x) + \cdots \end{aligned}$$

Ejemplos

1. Si $f(x)$ es un polinomio

$$f(x)=\sum_{n=0}^{m} b_n x^n=\sum_{k=0}^{\infty} a_k\ |\mathbf{P}_k\rangle=\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)\,,$$

entonces, no se requiere hacer ninguna integral por cuanto los coeficientes a_n se determinan a través de un sistema de ecuaciones algebraicas. Para el caso de $f(x)=x^2$ tendremos

$$\begin{aligned}
f(x)&=x^2=a_0P_0(x)+a_1P_1(x)+a_2P_2(x)\\
f(x)&=x^2=a_0+a_1x+\frac{1}{2}a_2(3x^2-1)\\
f(x)&=x^2=\left(a_0-\frac{1}{2}a_2\right)+a_1x+\frac{3}{2}a_2x^2\ \Rightarrow\ a_0=\frac{1}{3}\,,a_1=0\,,a_2=\frac{2}{3}\\
f(x)&=x^2=\frac{1}{3}P_0(x)+\frac{2}{3}P_2(x)\,.
\end{aligned}$$

2. En el caso de una función mas complicada

$$f(x)=\sqrt{\frac{1-x}{2}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\langle\mathbf{P}_k|\mathbf{F}\rangle}{\langle\mathbf{P}_k|\mathbf{P}_k\rangle}\ |\mathbf{P}_k\rangle\,,$$

por un lado

$$\langle\mathbf{P}_k|\mathbf{F}\rangle=\int_{-1}^{1} f(x)P_k(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-x}{2}}P_k(x)\mathrm{d}x$$

la expansión en series de Legendre quedaría como

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{1-x}{2}}\ &=\ \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-t}{2}}\mathrm{d}t+\frac{3}{2}\left[\int_{-1}^{1}t\sqrt{\frac{1-t}{2}}\mathrm{d}t\right]P_1(x)+\frac{5}{4}\left[\int_{-1}^{1}(3t^2-1)\sqrt{\frac{1-t}{2}}\mathrm{d}t\right]P_2(x)\\
&+\ \frac{7}{4}\left[\int_{-1}^{1}(5t^3-3t)\sqrt{\frac{1-t}{2}}\mathrm{d}t\right]P_3(x)+\frac{9}{16}\left[\int_{-1}^{1}(35t^4-30t^2+3)\sqrt{\frac{1-t}{2}}\mathrm{d}t\right]P_4(x)+\cdots\\
&=\ \frac{2}{3}P_0(x)-\frac{2}{5}P_1(x)-\frac{2}{21}P_2(x)-\frac{2}{45}P_3(x)-\frac{2}{77}P_4(x)-\frac{2}{117}P_5(x)-\cdots\\
&=\ \frac{2}{3}P_0(x)-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{P_n(x)}{(2n-1)\,(2n+3)}\,.
\end{aligned}$$

Antes de entrar en el detalle de las propiedades de estos polinomios, hay que enfatizar que los Polinomios de Legendre constituyen la única base ortogonal para un espacio de Hilbert con un producto interno definido como el producto simple de funciones en el intervalo cerrado. Al ortonormalizar mediante Gram Schmidt la base $\{1, x, x^2, x^3, \cdots, x^n, \cdots\}$ del espacio de polinomios, $\mathcal{P}^n$, de grado n en el intervalo $[-1, 1]$, con el producto interno definido por $\langle \mathbf{f} | \, \mathbf{g} \rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \; f(x) \; g(x)$ se obtienen los polinomios de Legendre.

Los polinomios de Legendre surgen, originalmente, como soluciones a la ecuación diferencial ordinaria del tipo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right] + \lambda\, y = 0\,, \; -1 \leq x \leq 1\,.$$

o de manera equivalente a ecuaciones como

$$(1-x^2)\; \frac{\mathrm{d}^2 P_n(x)}{\mathrm{d}x^2} - 2x\; \frac{\mathrm{d}P_n(x)}{\mathrm{d}x} + n(n+1)\; P_n(x) = 0\,,$$

donde $y = P_n(x)$ y $\lambda = n(n+1)$.

En la siguiente tabla se pueden apreciar algunas ecuaciones diferenciales con sus respectivas soluciones

n	Ecuación de Legendre	Solución
0	$(1-x^2)\; \frac{\mathrm{d}^2 P_0(x)}{\mathrm{d}x^2} - 2x\; \frac{\mathrm{d}P_0(x)}{\mathrm{d}x} = 0$	$P_0(x) = 1$
1	$(1-x^2)\; \frac{\mathrm{d}^2 P_1(x)}{\mathrm{d}x^2} - 2x\; \frac{\mathrm{d}P_1(x)}{\mathrm{d}x} + 2\; P_1(x) = 0$	$P_1(x) = x$
2	$(1-x^2)\; \frac{\mathrm{d}^2 P_2(x)}{\mathrm{d}x^2} - 2x\; \frac{\mathrm{d}P_2(x)}{\mathrm{d}x} + 6\; P_2(x) = 0$	$P_2(x) = 1 - 3x^2$
3	$(1-x^2)\; \frac{\mathrm{d}^2 P_3(x)}{\mathrm{d}x^2} - 2x\; \frac{\mathrm{d}P_3(x)}{\mathrm{d}x} + 12\; P_3(x) = 0$	$P_3(x) = x - \frac{5}{3}x^3$
4	$(1-x^2)\; \frac{\mathrm{d}^2 P_4(x)}{\mathrm{d}x^2} - 2x\; \frac{\mathrm{d}P_4(x)}{\mathrm{d}x} + 20\; P_4(x) = 0$	$P_4(x) = 1 - 10x^2 + \frac{35}{3}x^4$

2.2. Ortogonalidad de los Polinomios de Legendre

Como los polinomios de Legendre son soluciones de las ecuaciones, entonces podemos escribir

$$\begin{aligned} P_\beta(x)\left[(1-x^2)P_\alpha(x)'' - 2xP_\alpha(x)' + \alpha(\alpha+1)P_\alpha(x)\right] &= 0 \\ P_\alpha(x)\left[(1-x^2)P_\beta(x)'' - 2xP_\beta(x)' + \beta(\beta+1)P_\beta(x)\right] &= 0\,. \end{aligned}$$

Nótese que hemos cambiado de notación del operador diferencial

$$P_\alpha(x)'' \leftrightarrow \frac{\mathrm{d}^2 P_\alpha(x)}{\mathrm{d}x^2} \qquad P_\beta(x)' \leftrightarrow \frac{\mathrm{d}P_\beta(x)}{\mathrm{d}x}$$

Acomodando y restando ambas ecuaciones

$$\begin{aligned}(1-x^2)\left[P_\beta(x)P_\alpha(x)''-P_\alpha(x)P_\beta(x)''\right] &- 2x\left[P_\beta(x)P_\alpha(x)'-P_\alpha(x)P_\beta(x)'\right]\\ &+ \left[\alpha(\alpha+1)-\beta(\beta+1)\right]P_\beta(x)P_\alpha(x)=0\,,\end{aligned}$$

los primeros dos términos de la ecuación anterior puede interpretarse como la derivada

$$\left\{(1-x^2)\left[P_\beta(x)P_\alpha(x)'-\ P_\alpha(x)P_\beta(x)'\right]\right\}'\,,$$

por lo tanto, al integrar

$$(1-x^2)\left\{P_\beta(x)P_\alpha(x)'-P_\alpha(x)P_\beta(x)'\right\}\Big|_{-1}^{1}+\left[\alpha(\alpha+1)-\beta(\beta+1)\right]\int_{-1}^{1}P_\alpha(x)P_\beta(x)\mathrm{d}x=0$$

El primer término de la ecuación se anula en los extremos y es fácil comprobar que los polinomios de Legendre $|\mathbf{P}_\alpha\rangle=P_\alpha(x)$ son mutuamente ortogonales con un producto interno definido como

$$\langle\mathbf{P}_\alpha|\mathbf{P}_\beta\rangle=\int_{-1}^{1}P_\alpha(x)P_\beta(x)\mathrm{d}x\propto\delta_{\alpha\beta}$$

2.3. Relación de Recurrencia

Supongamos que conocemos todos los polinomios de Legendre hasta $P_n(x)$ y queremos generar el próximo. Obviamente ese polinomio será de grado $n+1$ y nos plantemos generarlo a partir de $xP_n(x)$. Como estos polinomios son base del espacio de funciones, entonces

$$xP_n(x)=|x\mathbf{P}_n\rangle=\sum_{k=0}^{n+1}\frac{\langle\mathbf{P}_k|x\mathbf{P}_n\rangle}{\langle\mathbf{P}_k|\mathbf{P}_k\rangle}\ |\mathbf{P}_k\rangle=\sum_{k=0}^{n+1}\frac{2k+1}{2}\left[\int_{-1}^{1}P_k(t)tP_n(t)\,\mathrm{d}t\right]P_k(x)\,,$$

Observando con algo más de detalle

$$\begin{aligned}xP_n(x) &= \frac{1}{2}\langle\mathbf{P}_0|x\mathbf{P}_n\rangle|\mathbf{P}_0\rangle+\frac{3}{2}\langle\mathbf{P}_1|x\mathbf{P}_n\rangle|\mathbf{P}_1\rangle+\frac{5}{2}\langle\mathbf{P}_2|x\mathbf{P}_n\rangle|\mathbf{P}_2\rangle+\frac{7}{2}\langle\mathbf{P}_3|x\mathbf{P}_n\rangle|\mathbf{P}_3\rangle\\ &+ \frac{9}{2}\langle\mathbf{P}_4|x\mathbf{P}_n\rangle|\mathbf{P}_4\rangle+\frac{11}{2}\langle\mathbf{P}_5|x\mathbf{P}_n\rangle|\mathbf{P}_5\rangle+\cdots+\frac{2n+3}{2}\left[\langle\mathbf{P}_{n+1}|x\mathbf{P}_n\rangle|\mathbf{P}_{n+1}\rangle\right]\\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}tP_n(t)\mathrm{d}t+\frac{3}{2}\left[\int_{-1}^{1}t^2P_n(t)\mathrm{d}t\right]P_1(x)+\frac{5}{4}\left[\int_{-1}^{1}(3t^3-t)P_n(t)\mathrm{d}t\right]P_2(x)\\ &+ \frac{7}{4}\left[\int_{-1}^{1}(5t^4-3t^2)P_n(t)\mathrm{d}t\right]P_3(x)+\frac{9}{16}\left[\int_{-1}^{1}(35t^5-30t^3+3t)P_n(t)\mathrm{d}t\right]P_4(x)+\cdots\,.\end{aligned}$$

Notemos que

$$\langle\mathbf{P}_n|x\mathbf{P}_n\rangle=\int_{-1}^{1}P_n(t)tP_n(t)\mathrm{d}t=\int_{-1}^{1}tP_n^2(t)\mathrm{d}t\,,$$

por lo tanto, el integrando es una función impar, entonces $\langle \mathbf{P}_n | x\mathbf{P}_n \rangle = 0$. Consideremos algunos casos:

Para $n = 0$

$$\begin{aligned} xP_0(x) &= \frac{1}{2}\langle \mathbf{P}_0 | x\mathbf{P}_0 \rangle |\mathbf{P}_0\rangle + \frac{3}{2}\langle \mathbf{P}_1 | x\mathbf{P}_0 \rangle |\mathbf{P}_1\rangle \\ &= \frac{3}{2}\left[\int_{-1}^{1} t^2 \mathrm{d}t\right] P_1(x) = P_1(x) \end{aligned}$$

Para $n = 1$

$$\begin{aligned} xP_1(x) &= \frac{1}{2}\langle \mathbf{P}_0 | x\mathbf{P}_1 \rangle |\mathbf{P}_0\rangle + \frac{3}{2}\langle \mathbf{P}_1 | x\mathbf{P}_1 \rangle |\mathbf{P}_1\rangle + \frac{5}{2}\langle \mathbf{P}_2 | x\mathbf{P}_1 \rangle |\mathbf{P}_2\rangle \\ &= \frac{1}{2}\left[\int_{-1}^{1} t^2 \mathrm{d}t\right] + \frac{5}{4}\left[\int_{-1}^{1} (3t^4 - t^2)\mathrm{d}t\right] P_2(x) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}P_2(x) \end{aligned}$$

Para $n = 2$

$$\begin{aligned} xP_2(x) &= \frac{1}{2}\langle \mathbf{P}_0 | x\mathbf{P}_2 \rangle |\mathbf{P}_0\rangle + \frac{3}{2}\langle \mathbf{P}_1 | x\mathbf{P}_2 \rangle |\mathbf{P}_1\rangle + \frac{5}{2}\langle \mathbf{P}_2 | x\mathbf{P}_2 \rangle |\mathbf{P}_2\rangle + \frac{7}{2}\langle \mathbf{P}_3 | x\mathbf{P}_2 \rangle |\mathbf{P}_3\rangle \\ &= \frac{3}{4}\left[\int_{-1}^{1} (3t^4 - t^2)\mathrm{d}t\right] P_1(x) + \frac{7}{16}\left[\int_{-1}^{1} (5t^3 - 3t)(3t^3 - t)\mathrm{d}t\right] P_3(x) \\ &= \frac{2}{5}P_1(x) + \frac{3}{5}P_3(x)\,. \end{aligned}$$

Para $n = 3$

$$\begin{aligned} xP_3(x) &= \frac{1}{2}\langle \mathbf{P}_0 | x\mathbf{P}_3 \rangle |\mathbf{P}_0\rangle + \frac{3}{2}\langle \mathbf{P}_1 | x\mathbf{P}_3 \rangle |\mathbf{P}_1\rangle + \frac{5}{2}\langle \mathbf{P}_2 | x\mathbf{P}_3 \rangle |\mathbf{P}_2\rangle + \frac{7}{2}\langle \mathbf{P}_3 | x\mathbf{P}_3 \rangle |\mathbf{P}_3\rangle + \frac{9}{2}\langle \mathbf{P}_4 | x\mathbf{P}_3 \rangle |\mathbf{P}_4\rangle \\ &= \frac{3}{7}P_2(x) + \frac{4}{7}P_4(x)\,. \end{aligned}$$

Se puede apreciar que

$$\langle \mathbf{P}_k | x\mathbf{P}_n \rangle = \langle x\mathbf{P}_k | \mathbf{P}_n \rangle = \int_{-1}^{1} P_n(x) x P_k(x)\mathrm{d}x = 0\,, \text{ para } k < n - 1\,.$$

Esto implica que sobreviven únicamente tres términos

$$xP_n(x) = \frac{\langle \mathbf{P}_{n-1} | x\mathbf{P}_n \rangle}{\langle \mathbf{P}_{n-1} | \mathbf{P}_{n-1} \rangle}\ |\mathbf{P}_{n-1}\rangle + \frac{\langle \mathbf{P}_n | x\mathbf{P}_n \rangle}{\langle \mathbf{P}_n | \mathbf{P}_n \rangle}\ |\mathbf{P}_n\rangle + \frac{\langle \mathbf{P}_{n+1} | x\mathbf{P}_n \rangle}{\langle \mathbf{P}_{n+1} | \mathbf{P}_{n+1} \rangle}\ |\mathbf{P}_{n+1}\rangle\,,$$

pero como ya vimos: $\langle \mathbf{P}_n | x\mathbf{P}_n \rangle = 0$, por lo tanto quedan dos

$$xP_n(x) = \frac{\langle \mathbf{P}_{n-1} | x\mathbf{P}_n \rangle}{\langle \mathbf{P}_{n-1} | \mathbf{P}_{n-1} \rangle}\ |\mathbf{P}_{n-1}\rangle + \frac{\langle \mathbf{P}_{n+1} | x\mathbf{P}_n \rangle}{\langle \mathbf{P}_{n+1} | \mathbf{P}_{n+1} \rangle}\ |\mathbf{P}_{n+1}\rangle$$

Es decir

$$xP_n(x) = AP_{n+1}(x) + BP_{n-1}(x)\,.$$

Desarrollando con la fórmula de Rodrígues

$$\begin{aligned}
\frac{x}{n!2^n}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n &= \frac{A}{(n+1)!2^{n+1}}\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}(x^2-1)^{n+1} + \frac{B}{(n-1)!2^{n-1}}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}(x^2-1)^{n-1}\,,\\
x\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n &= \frac{A}{2(n+1)}\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}(x^2-1)^{n+1} + 2nB\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}(x^2-1)^{n-1}\,.
\end{aligned}$$

Igualando coeficientes resulta

$$A = \frac{n+1}{2n+1}\,,\ B = \frac{n}{2n+1}$$

La relación de recurrencia es entonces

$$(n+1)\,P_{n+1}(x) = \ (2n+1)\,xP_n(x) - nP_{n-1}(x)\,.$$

2.4. Norma de los Polinomios de Legendre

Conociendo que la ortogonalidad de los polinomios de Legendre y la relación de recurrencia, procedemos encontrar el valor de su norma

$$\|\mathbf{P}_n\|^2 = \langle \mathbf{P}_n|\mathbf{P}_n\rangle = \int_{-1}^{1} P_n^2(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{2n+1}$$

De la relación de recurrencia cambiando $n \to n-1$ se tiene

$$\begin{aligned}
nP_n(x) &= (2n-1)\,xP_{n-1}(x) - (n-1)\,P_{n-2}(x)\,,\\
(2n+1)\,P_n(x)nP_n(x) &= (2n+1)\,P_n(x)\left[(2n-1)\,xP_{n-1}(x) - (n-1)\,P_{n-2}(x)\right]\,, \qquad (1)
\end{aligned}$$

ahora multiplicamos la relación de recurrencia por $(2n-1)\,P_{n-1}(x)$ para obtener

$$(2n-1)\,P_{n-1}(x)\,(n+1)\,P_{n+1}(x) = (2n-1)\,P_{n-1}(x)\left[(2n+1)\,xP_n(x) - nP_{n-1}(x)\right]\,, \qquad (2)$$

restando miembro a miembro (1) - (2) obtenemos :

$$(2n+1)\left[nP_n^2(x) + (n-1)\,P_n(x)P_{n-2}(x)\right] - (2n-1)\left[(n+1)\,P_{n-1}(x)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}^2(x)\right] = 0\,,$$

lo que es igual a:

$$\begin{aligned}
(2n+1)\left[nP_n^2(x) + (n-1)\,P_n(x)P_{n-2}(x)\right] &= (2n-1)\left[(n+1)\,P_{n-1}(x)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}^2(x)\right]\,,\\
P_n^2(x) + \frac{(n-1)}{n}P_n(x)P_{n-2}(x) &= \frac{2n-1}{2n+1}\left[\frac{(n+1)}{n}P_{n-1}(x)P_{n+1}(x) + P_{n-1}^2(x)\right]\,,
\end{aligned}$$

integrando y considerando la ortogonalidad

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} P_n^2(x)\mathrm{d}x &= \frac{2n-1}{2n+1}\left[\int_{-1}^{1} P_{n-1}^2(x)\mathrm{d}x\right] \\
\int_{-1}^{1} P_n^2(x)\mathrm{d}x &= \left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)\left[\left(\frac{2n-3}{2n-1}\right)\int_{-1}^{1} P_{n-2}^2(x)\mathrm{d}x\right] \\
\int_{-1}^{1} P_n^2(x)\mathrm{d}x &= \left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)\left[\left(\frac{2n-3}{2n-1}\right)\left(\frac{2n-5}{2n-3}\right)\int_{-1}^{1} P_{n-3}^2(x)\mathrm{d}x\right] \\
\vdots \quad &= \quad \vdots \\
\int_{-1}^{1} P_n^2(x)\mathrm{d}x &= \frac{3}{2n+1}\left[\int_{-1}^{1} P_1^2(x)\mathrm{d}x\right] = \frac{3}{2n+1}\left[\frac{2}{3}\right] \\
\int_{-1}^{1} P_n^2(x)\mathrm{d}x &= \frac{2}{2n+1}\,.
\end{aligned}
$$

2.5. Función Generatriz de los Polinomios de Legendre

Se puede encontrar una función generatriz $\mathcal{P}(t,x)$ de los polinomios de Legendre, es decir una función que tenga la forma:

$$
\mathcal{P}(t,x) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = P_0(x)\ + P_1(x)\ t + P_2(x)\ t^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\ t^n\ ,\ \ |t|<1\,, |x|\leq 1\,,
$$

para la cual los $P_n(x)$ son los coeficientes de su desarrollo en series de potencias. Esta serie converge para $\|2xt+t^2\|<1$. Para demostrar que el desarrollo en serie de la función $\mathcal{G}(t,x)$ tiene como coeficientes a los $P_n(x)$ partimos de que:

$$
\mathcal{P}(t,x) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{P}(t,x)}{\partial t} = \frac{t-x}{\left(1-2xt+t^2\right)^{3/2}}
$$

combinando estas dos expresiones, resulta

$$
(t-x)\,\mathcal{P}(t,x) + \left(1-2xt+t^2\right)\frac{\partial \mathcal{P}(t,x)}{\partial t} = 0
$$

y, consecuentemente

$$
(t-x)\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\ t^n + \left(1-2xt+t^2\right)\sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)\ t^{n-1} = 0\,.
$$

Multiplicando y acomodando queda

$$
\begin{aligned}
(t-x)\,P_0(x) &+ (t-x)\sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)\ t^n + \sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} 2xnP_n(x)t^n + \sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)t^{n+1} = 0\,, \\
(t-x)\,P_0(x) &+ \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)\ t^{n+1} - \sum_{n=1}^{\infty} xP_n(x)\ t^n + \sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} 2xnP_n(x)t^n \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)t^{n+1} = 0\,, \\
(t-x)\,P_0(x) &+ \sum_{n=2}^{\infty} P_{n-1}(x)\ t^n - \sum_{n=1}^{\infty} xP_n(x)\ t^n + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)P_{n+1}(x)t^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2xnP_n(x)t^n \\
&+ \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)P_{n-1}(x)t^n = 0\,, \\
(t-x)\,P_0(x) &+ \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)P_{n+1}(x)t^n - \sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)xP_n(x)\ t^n + \sum_{n=2}^{\infty} nP_{n-1}(x)t^n = 0\,, \\
tP_0(x) &- xP_0(x) + P_1(x) + 2P_2(x)t + \sum_{n=2}^{\infty}(n+1)P_{n+1}(x)t^n - 3xP_1(x)t - \sum_{n=2}^{\infty}(2n+1)xP_n(x)\ t^n \\
&+ \sum_{n=2}^{\infty} nP_{n-1}(x)t^n = 0
\end{aligned}
$$

por lo tanto

$$
\begin{aligned}
\Big[\underbrace{P_1(x) - x\ P_0(x)}_{=0}\Big] \quad &+ \quad \Big[\underbrace{2P_2(x) - 3xP_1(x) + P_0(x)}_{=0}\Big]\ t \\
&+ \sum_{n=2}^{\infty}\Big[\underbrace{(n+1)\,P_{n+1}(x) - (2n+1)\ \ xP_n(x) + nP_{n-1}(x)}_{=0}\Big]\ t^n = 0
\end{aligned}
$$

El primero de los términos se cumple siempre por cuanto $P_0(x) = 1$ y $P_1(x) = x$. El tercer término conforma la relación de recurrencia para los polinomios de Legendre. Con esto queda demostrado que el desarrollo en series de potencias de la función generatriz, tiene como coeficientes a los polinomios de Legendre.

La función generatriz muestra su utilidad en la expansión

$$
f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle \mathbf{P}_k | \mathbf{F} \rangle}{\langle \mathbf{P}_k | \mathbf{P}_k \rangle}\ |\mathbf{P}_k\rangle\,,
$$

recordemos que por la definición del producto interno se tiene

$$\langle \mathbf{P}_k | \mathbf{F} \rangle = \int_{-1}^{1} f(x) P_k(x) \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-x}{2}} P_k(x) \mathrm{d}x \,.$$

Al formar el producto

$$\sqrt{\frac{1-x}{2}} \left[\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} \right] = \sqrt{\frac{1-x}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n(x) \,,$$

e integrando, se obtiene

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-x}{2}} \left[\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} \right] \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-x}{2}} P_n(x) \mathrm{d}x$$

$$\frac{1}{2t} \left[1 + t - \frac{(1-t)^2}{2\sqrt{t}} \ln \left(\frac{1+\sqrt{t}}{1-\sqrt{t}} \right) \right] = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-x}{2}} P_n(x) \mathrm{d}x \,.$$

Expandiendo el lado izquierdo en series de potencias de t

$$\frac{4}{3} - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{(4n^2-1)(2n+3)} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-x}{2}} P_n(x) \mathrm{d}x$$

lo cual nos conduce, al igualar coeficientes a

$$\frac{4}{3} = \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-x}{2}} P_0(x) \mathrm{d}x \quad \text{y} \quad \frac{-4}{(4n^2-1)(2n+3)} = \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-x}{2}} P_n(x) \mathrm{d}x$$

y finalmente a la forma de la expansión en series

$$\sqrt{\frac{1-x}{2}} = \frac{2}{3} P_0(x) - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n(x)}{(2n-1)(2n+3)}$$

2.6. Otras propiedades de los polinomios de Legendre

- $P_n(1) = 1$ y $P_n(-1) = (-1)^n$. Entonces se tiene lo que se conoce como la relación de paridad: $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$ para todo n.
- $P_n(x)$ tiene n raíces en el intervalo $(-1, 1)$ Esta propiedad puede apreciarse para los primeros 5 polinomios en la figura 1.

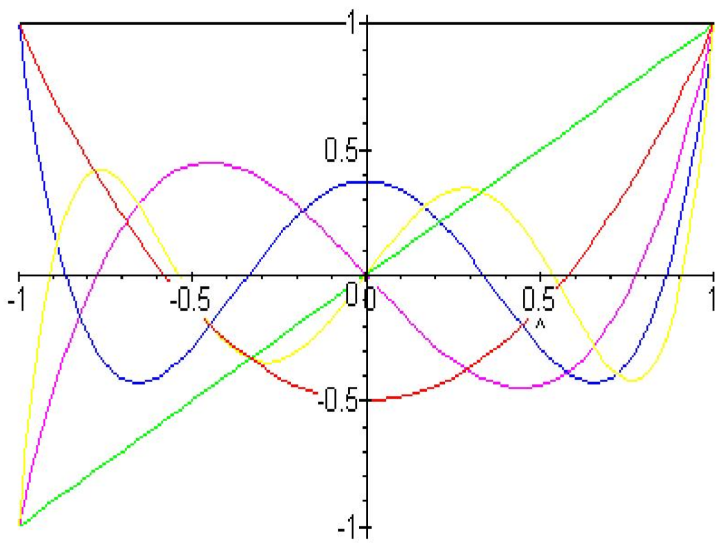

Figura 1: Polinomios de Lengendre

- Tienen una representación integral de la forma

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \left[x + \sqrt{x^2 - 1} \cos\varphi \right]^n \mathrm{d}\varphi$$

- Cambios de variables inmediatos conllevan a ecuaciones diferenciales equivalentes
  - Forma autoadjunta

$$\left[(1 - x^2)\ y' \right]' + \lambda(\lambda + 1)\ y = 0$$

  - En coordenadas esféricas con $u = P_n(\cos\theta)$

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} \left(\operatorname{sen}\theta\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} \right) + \lambda(\lambda + 1) u = 0$$

  - En coordenadas esféricas con $u = \sqrt{\operatorname{sen}\theta} P_n(\cos\theta)$

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\theta^2} + \left[\left(\lambda + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{4 \operatorname{sen}^2\theta} \right] u = 0$$

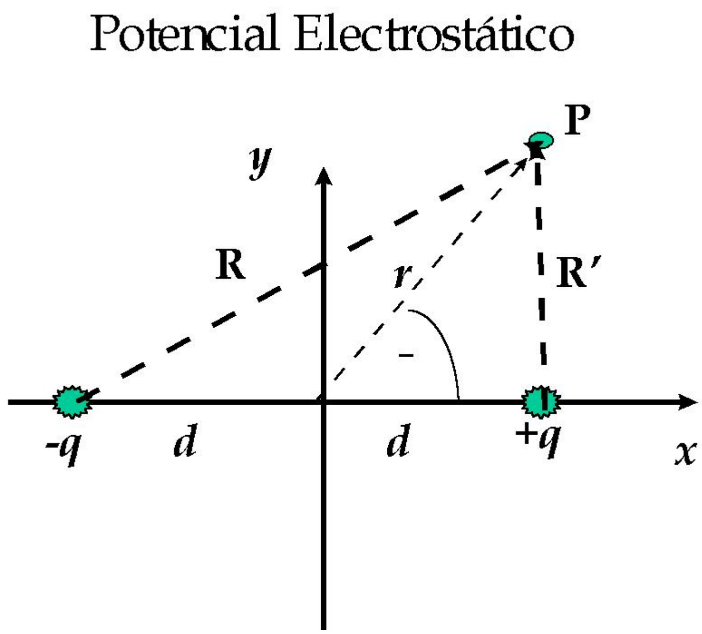

Figura 2: Potencial Electrostático de un Dipolo Eláctrico

2.7. Potencial Electrostático de un Dipolo Eléctrico

En Física el ejemplo claro es el cálculo del potencial electrostático producido por dos cargas $q_1 = +q$ y $q_2 = -q$ separadas por una distancia $2d$ en un punto P cualquiera de un plano (x, y). El potencial en ese punto genérico viene dado por

$$V = q\left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R}\right)$$

Tal y como puede apreciarse de la figura 2

$$(R')^2 = r^2 + d^2 - 2r\ d\cos\theta \quad \text{y} \quad R^2 = r^2 + d^2 - 2r\ d\cos(\pi - \theta)\ ,$$

por lo cual

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{r}\left[1 - 2\cos\theta\left(\frac{d}{r}\right) + \left(\frac{d}{r}\right)^2\right]^{-1/2}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r}\left[1 - 2\cos(\pi - \theta)\left(\frac{d}{r}\right) + \left(\frac{d}{r}\right)^2\right]^{-1/2}$$

y consecuentemente

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta)\left(\frac{d}{r}\right)^n$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty} P_n\left[\cos\left(\pi-\theta\right)\right]\left(\frac{d}{r}\right)^n = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(-\cos\theta)\left(\frac{d}{r}\right)^n$$

El potencial será

$$V = \frac{q}{r}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left[P_n(\cos\theta) - P_n(-\cos\theta)\ \right]\ \left(\frac{d}{r}\right)^n\right]$$

donde todos los términos pares de $P_n(\cos\theta)$ se anulan y finalmente tendremos la expresión del potencial para cualquier punto del plano

$$V = \frac{2q}{r}\left[\sum_{n=0}^{\infty} P_{2n+1}(\cos\theta)\ \left(\frac{d}{r}\right)^{2n+1}\right]$$

Nos quedamos con el primer término de la serie, si

$$\frac{d}{r} \ll 1 \quad \Rightarrow \quad V \approx \frac{q}{r^2}\ 2d\cos\theta\,.$$

2.8. Resumen de Propiedades Polinomios Legendre

Polinomios de Legendre	
Definición	$P_n(x) = \frac{1}{n!2^n}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n, \qquad n = 0,1,2,.....$
Ejemplos	$P_{-1}\equiv 0;\quad P_0 \equiv 1;\quad P_1 = x$ $P_2 = \frac{1}{2}(3x^2-1);\quad P_3 = \frac{1}{2}(5x^3-3x)$
Relación de Recurrencia	$(n+1)\,P_{n+1}(x) = \ (2n+1)\,xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$
Ecuaciones Diferenciales	$(1-x^2)\ y'' - 2x\ y' + \lambda(\lambda+1)\ y = 0$ $\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right) + n(n+1)u = 0;\quad u = P_n(\cos\theta)$
Función Generatriz	$\mathcal{P}(t,x) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\ t^n$
Representación Integral	$P_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left[x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi\right]^n \mathrm{d}\varphi$
Ortogonalidad	$\langle \mathbf{P}_\alpha \vert \mathbf{P}_\beta\rangle = \int_{-1}^{1} P_\alpha(x)P_\beta(x)\mathrm{d}x = \delta_{\alpha\beta}\frac{2}{2\alpha+1}$