Series de Polinomios Ortogonales, continuación

1. Polinomios de Hermite

Los polinomios de Hermite a diferencia de los de Legendre (y Tchevychev), vienen definidos en toda la recta real, vale decir, $x \in (-\infty, \infty)$, por lo cual la función peso $w(x)$ en el producto interno deberá decrecer más rápido que $|x|^n$, para garantizar que la norma de los vectores en este espacio vectorial sea finita. La función más simple que cumple estos requisitos es $w(x) = e^{-x^2}$ (también algunos autores utilizan $w(x) = e^{-x^2/2}$) Esto es, el producto interno entre los polinomios de Hermite vendrá definido como

$$\langle \mathbf{f} | \mathbf{g} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \; w(x) f(x) g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \; e^{-x^2} f(x) g(x) \,.$$

Otra vez, para este producto interno, si ortogonalizamos con Gram-Schmidt se obtienen los polinomios de Hermite. Al igual que el resto de los polinomios ortogonales, existe una fórmula de Rodrigues para los polinomios de Hermite

$$H_n(x) = (-1)^n \; e^{x^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} e^{-x^2} \,,$$

los cinco primeros polinomios de Hermite son los siguientes:

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1, & H_1(x) &= 2x \\ H_2(x) &= 4x^2 - 2, & H_3(x) &= 8x^3 - 12x, \\ H_4(x) &= 16x^4 - 48x^2 + 12 & H_5(x) &= 32x^5 - 160x^3 + 120x \end{aligned}$$

1.1. Generalidades de los Polinomios de Hemite

Los polinomios de Hermite serán ortogonales, pero no normales

$$\langle \mathbf{H}_\alpha | \mathbf{H}_\beta \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_\beta(x) H_\alpha(x) \mathrm{d}x = 2^\alpha \alpha! \sqrt{\pi} \; \delta_{\alpha\beta} \,,$$

por lo tanto:

$$\langle \mathbf{H}_\alpha | \mathbf{H}_\alpha \rangle = \|\mathbf{H}_\alpha\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_\alpha^2(x) \mathrm{d}x = 2^\alpha \alpha! \sqrt{\pi} \,.$$

Donde la función delta de Kronecker es $\delta_{\alpha\beta} = 0$ si $\alpha \neq \beta$; y $\delta_{\beta\beta} = 1$.

Antes de desarrollar funciones en términos de los polinomios de Hermite, expondremos un par de teoremas sin demostración.

Teorema 1: Sean $|\,\mathbf{f}\,\rangle$ y $|\,\mathbf{g}\,\rangle$ dos funciones arbitrarias, cuando menos continuas a trozos en $(-\infty,\infty)$ y que cumplen con

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f^2(x)\mathrm{d}x < \infty \qquad \wedge \qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} g^2(x)\mathrm{d}x < \infty$$

Entonces el conjunto de estas funciones forman un espacio vectorial Euclideano $\mathcal{I}_2^w$ con un producto interno definido por

$$\langle\,\mathbf{g}\mid\mathbf{f}\,\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) g(x)\mathrm{d}x$$

Las funciones $f(x)$ y $g(x)$ se denominan cuadrado-integrables respecto al peso w. Es por ello que denotamos el espacio de funciones como $\mathcal{I}_2^w$.

Teorema 2: Si $f(x)$ es una función continua arbitraria en $\mathcal{I}_2^w$ entonces puede ser aproximada por un polinomio en ese mismo espacio. Es decir

$$\lim_{n\to\infty} \|f(x) - p_n(x)\| = \lim_{n\to\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \left[f(x) - p_n(x)\right]^2 \mathrm{d}x \right)^{1/2} = 0$$

Así, la expresión de una función arbitraria en la base de los polinomio de Hermite se reduce a

$$f(x) = |\,\mathbf{f}\,\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,|\mathbf{H}_k\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle \mathbf{H}_k|\mathbf{f}\rangle}{\langle \mathbf{H}_k|\mathbf{H}_k\rangle}\,|\mathbf{H}_k\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k k! \sqrt{\pi}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} f(t) H_k(t)\,\mathrm{d}x\right] H_k(x)\,,$$

donde

$$a_k = \frac{\langle \mathbf{H}_k|\,\mathbf{f}\,\rangle}{\langle \mathbf{H}_k|\mathbf{H}_k\rangle} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) H_k(x)\mathrm{d}x}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_k^2(x)\mathrm{d}x} = \frac{1}{2^k k! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} f(t) H_k(t)\,\mathrm{d}x\,.$$

Ejemplo: Si $f(x) = x^2$

$$f(x) = x^2 = \sum_{k=0}^{2} b_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\ H_k(x)$$

$$
\begin{aligned}
f(x) = x^2 &= a_0 H_0(x) + a_1 H_1(x) + a_2 H_2(x) \\
&= a_0 + a_1(2x) + a_2(4x^2 - 1) \\
&= (a_0 - a_2) + 2a_1 x + 4a_2 x^2 \quad \Rightarrow a_0 = \frac{1}{4}\,, a_1 = 0\,, a_2 = \frac{1}{4}\,. \\
&= \frac{1}{4} H_0(x) + \frac{1}{4} H_2(x)
\end{aligned}
$$

Si generalizamos para funciones del tipo $f(x) = x^{2p}$ con $p = 1, 2, 3, \cdots$, entonces

$$
f(x) = x^{2p} = \sum_{k=0}^{2p} b_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k}\ H_{2k}(x)\,,
$$

por lo tanto

$$
a_{2k} = \frac{1}{2^{2k}(2k)!\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x^{2p} H_{2k}(x) \mathrm{d}x = \frac{1}{2^{2k}(2k)!\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2p} \frac{\mathrm{d}^{2k}}{\mathrm{d}x^{2k}} e^{-x^2} \mathrm{d}x\,.
$$

Una integración por partes estratégica muestra que:

$$
a_{2k} = \frac{1}{2^{2k}(2k)!\sqrt{\pi}} \left\{ x^{2p} \frac{\mathrm{d}^{2k-1}}{\mathrm{d}x^{2k-1}} e^{-x^2} \bigg|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} 2p x^{2p-1} \frac{\mathrm{d}^{2k-1}}{\mathrm{d}x^{2k-1}} e^{-x^2} \mathrm{d}x \right\}\,.
$$

El primer término de la resta se anula debido a la definición de los polinomios de Hermite

$$
x^{2p} \frac{\mathrm{d}^{2k-1}}{\mathrm{d}x^{2k-1}} e^{-x^2} \bigg|_{-\infty}^{\infty} = x^{2p} (-1)^{2k-1} e^{-x^2} H_{2k-1}(x) \bigg|_{-\infty}^{\infty}\,.
$$

Repitiendo el proceso $2k$ veces, tendremos

$$
a_{2k} = \frac{1}{2^{2k}(2k)!\sqrt{\pi}} \frac{(2p)!}{(2p-2k)!} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2p-2k}\ e^{-x^2} \mathrm{d}x
$$

si en la integral hacemos $x = \sqrt{t}$ obtenemos

$$
\begin{aligned}
a_{2k} &= \frac{1}{2^{2k}(2k)!\sqrt{\pi}} \frac{(2p)!}{(2p-2k)!} \int_{-\infty}^{\infty} t^{p-k}\ e^{-t} \frac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{t}} \\
&= \frac{1}{2^{2k+1}(2k)!\sqrt{\pi}} \frac{(2p)!}{(2p-2k)!} \int_{-\infty}^{\infty} t^{p-k-\frac{1}{2}}\ e^{-t} \mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

y utilizando la definición $\Gamma(z) \equiv \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} \mathrm{d}t \equiv (z-1)!$, queda como

$$
a_{2k} = \frac{1}{2^{2k+1}(2k)!\sqrt{\pi}} \frac{(2p)!}{(2p-2k)!} \Gamma\left(p - k + \frac{1}{2}\right)\,.
$$

Ahora, recurrimos a la propiedad de "duplicación" de la Función Gamma, i.e.

$$2^{2z-1}\Gamma\left(z\right)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\Gamma\left(2z\right)$$

tenemos que

$$2^{2p-2k}\Gamma\left(p-k+\frac{1}{2}\right)(p-k)!=\sqrt{\pi}\left(2p-2k\right)!$$

quedan entonces los coeficientes determinados como

$$a_{2k}=\frac{(2p)!}{2^{2p+1}(2k)!\,(p-k)!}$$

y, por lo tanto el desarrollo en la base de los polinomios de Hermite

$$f(x)=x^{2p}=\frac{(2p)!}{2^{2p+1}}\sum_{k=0}^{p}\ \frac{H_{2k}(x)}{(2k)!\,(p-k)!}\qquad -\infty<x<\infty\,.$$

Muestre que del mismo modo se puede encontrar

$$f(x)=x^{2p+1}=\frac{(2p-1)!}{2^{2p-1}}\sum_{k=0}^{p}\ \frac{H_{2k+1}(x)}{(2k+1)!\,(p-k)!}\qquad -\infty<x<\infty\,.$$

Si $f(x)=e^{-a^2x^2}$ con $\mathrm{Re}\,a^2>-1$. Otra vez

$$f(x)=e^{-a^2x^2}=\sum_{k=0}^{\infty}a_{2k}\ H_{2k}(x)$$

entonces

$$a_{2k}=\frac{1}{2^{2k}(2k)!\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(a^2+1)x^2}H_{2k}(x)\mathrm{d}x$$

Sustituyendo $H_{2k}(x)$ por su expresión integral tendremos

$$
\begin{aligned}
a_{2k} &= \frac{1}{2^{2k}(2k)!\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(a^2+1)x^2} \left[\frac{2^{2k+1}(-1)^k e^{x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} t^{2k} \cos 2xt \, \mathrm{d}t \right] \mathrm{d}x \\
&= \frac{2(-1)^k}{\pi(2k)!} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2x^2} \left[\int_0^{\infty} e^{-t^2} t^{2k} \cos 2xt \, \mathrm{d}t \right] \mathrm{d}x \\
&\equiv \frac{2(-1)^k}{\pi(2k)!} \int_0^{\infty} e^{-t^2} t^{2k} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2x^2} \cos 2xt \, \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}t \\
&= \frac{2(-1)^k}{\pi(2k)!} \int_0^{\infty} e^{-t^2} t^{2k} \left[\sqrt{\frac{\pi}{a^2}} \; e^{-t^2/a^2} \right] \mathrm{d}t = \\
&= \frac{2(-1)^k}{\sqrt{\pi}(2k)!a} \int_0^{\infty} e^{-t^2(1+a^{-2})} \; t^{2k} \, \mathrm{d}t \\
&= \frac{(-1)^k}{\sqrt{\pi}(2k)!} \, \frac{a^{2k}}{(1+a^2)^{k+1/2}} \int_0^{\infty} e^{-s} \, s^{k-\frac{1}{2}} \, \mathrm{d}s \qquad \leftarrow t^2(1+a^{-2}) = s \\
&= \frac{(-1)^k}{\sqrt{\pi}(2k)!} \, \frac{a^{2k}}{(1+a^2)^{k+1/2}} \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right)
\end{aligned}
$$

y ahora usando, otra vez la propiedad de "duplicación" de la función gamma,

$$
2^{2k} \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) k! = \sqrt{\pi}\,(2k)!
$$

obtenemos

$$
a_{2k} = \frac{(-1)^k a^{2k}}{2^{2k} \; k!\,(1+a^2)^{k+1/2}}
$$

por lo tanto

$$
f(x) = e^{-a^2x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k a^{2k}}{2^{2k} \; k!\,(1+a^2)^{k+1/2}} \; H_{2k}(x)
$$

Al igual que los polinomios de Legendre, los de Hermite, surgen tambián en sus orígenes como soluciones a la ecuación diferencial ordinaria del tipo

$$
\frac{\mathrm{d}^2 H_n(x)}{\mathrm{d}x^2} - 2x \, \frac{\mathrm{d}H_n(x)}{\mathrm{d}x} + nH_n(x) = 0
$$

Vale decir

n	Ecuación de Hermite	Solución
0	$\frac{\mathrm{d}^2 H_0(x)}{\mathrm{d}x^2} - 2x\,\frac{\mathrm{d}H_0(x)}{\mathrm{d}x} = 0$	$H_0(x) = 1$
1	$\frac{\mathrm{d}^2 H_1(x)}{\mathrm{d}x^2} - 2x\,\frac{\mathrm{d}H_1(x)}{\mathrm{d}x} + 2H_1(x) = 0$	$H_1(x) = 2x$
2	$\frac{\mathrm{d}^2 H_2(x)}{\mathrm{d}x^2} - 2x\,\frac{\mathrm{d}H_2(x)}{\mathrm{d}x} + 4H_2(x) = 0$	$H_2(x) = 4x^2 - 2$
3	$\frac{\mathrm{d}^2 H_3(x)}{\mathrm{d}x^2} - 2x\,\frac{\mathrm{d}H_3(x)}{\mathrm{d}x} + 6H_3(x) = 0$	$H_3(x) = 8x^3 - 12x$
4	$\frac{\mathrm{d}^2 H_4(x)}{\mathrm{d}x^2} - 2x\,\frac{\mathrm{d}H_4(x)}{\mathrm{d}x} + 8H_4(x) = 0$	$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$

1.2. Función Generatriz de los Polinomios de Hermite

Se puede encontrar una función generatriz $\mathcal{H}(t,x)$ de los polinomios de Hermite:

$$\mathcal{H}(t,x) = e^{2xt-t^2} = H_0(x) \; + H_1(x)\; t + \frac{H_2(x)}{2}\; t^2 + \frac{H_3(x)}{3!}\; t^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!}\; t^n$$

para la cual los $H_n(x)$ son los coeficientes de su desarrollo en series de potencias. Es fácil darse cuenta que esta expresión proviene del desarrollo en Serie de Taylor

$$\mathcal{H}(t,x) = e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\frac{\partial^n \mathcal{H}(t,x)}{\partial t^n}\right]_{t=0} t^n \qquad \|t\| < \infty$$

para lo cual

$$\left[\frac{\partial^n \mathcal{H}(t,x)}{\partial t^n}\right]_{t=0} = e^{x^2} \left[\frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{-(x-t)^2}\right]_{t=0} = (-1)^n \, e^{x^2} \left[\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}u^n} e^{-(u)^2}\right]_{u=x} = H_n(x)$$

1.3. Relación de Recurrencia

A partir de la función generatriz se puede construir la siguiente identidad

$$\frac{\partial \mathcal{H}(t,x)}{\partial t} = (2x - 2t)\,\mathcal{H}$$

y utilizando el desarrollo en series de potencias en t tendremos,

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} n t^{n-1} &= 2x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!}\ t^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!}\ t^{n+1}\,, \\
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} n t^{n-1} &- 2x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!}\ t^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!}\ t^{n+1} = 0\,, \\
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_{n+1}(x)}{(n+1)!} (n+1) t^{n} &- 2x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!}\ t^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{n-1}(x)}{(n-1)!}\ t^{n} = 0\,, \\
H_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{n+1}(x)}{(n+1)!} (n+1) t^{n} &- 2xH_0(x) - 2x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!}\ t^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{n-1}(x)}{(n-1)!} t^{n} = 0\,, \\
\underbrace{H_1(x) - 2xH_0(x)}_{=0} &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{H_{n+1}(x)}{(n+1)!}(n+1) - 2x\frac{H_n(x)}{n!} + \frac{H_{n-1}(x)}{(n-1)!} \right] t^n = 0\,,
\end{aligned}
$$

es decir:

$$
\sum_{n=1}^{\infty} \left[\underbrace{\frac{H_{n+1}(x)}{(n+1)!}(n+1) - 2x\frac{H_n(x)}{n!} + \frac{H_{n-1}(x)}{(n-1)!}}_{=0} \right] t^n = 0\,.
$$

Por lo tanto:

$$
\frac{H_{n+1}(x)}{n!} - 2x\frac{H_n(x)}{n!} + \frac{H_{n-1}(x)}{(n-1)!} = 0
$$

Así la relación de recurrencia será

$$
H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0
$$

De igual modo, podemos partir de otra identidad

$$
\frac{\partial \mathcal{H}(t,x)}{\partial x} = 2t\ \mathcal{H} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H'_n(x)}{n!}\ t^n = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!}\ t^{n+1}\,,
$$

es decir:

$$
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H'_n(x)}{n!}\ t^n = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{n-1}(x)}{(n-1)!}\ t^n \Rightarrow \frac{H'_n(x)}{n!} = 2\frac{H_{n-1}(x)}{(n-1)!}
$$

y encontrar una relación para generar las derivadas de los polinomios de Hermite en término de ellos mismos:

$$
H'_n(x) = 2n\ H_{n-1}(x), \qquad n = 1, 2, 3, \cdots\,.
$$

Finalmente, utilizando la ecuación anterior en la relación de recurrencia y derivando esa expresión una vez más, queda como:

$$
\begin{aligned}
H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + H_n'(x) &= 0 \\
H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2n\ H_n(x) &= 0
\end{aligned}
$$

con lo cual queda demostrado que los polinomios de Hermite son una solución particular de esa ecuación diferencial.

$$
y'' - 2xy' + 2ny = 0,
$$

Donde hemos hecho $y = H_n(x)$ Adicionalmente, podremos demostrar que $y = e^{-x^2/2}H_n(x)$ es solución de la ecuación diferencial autoadjunta

$$
y'' + \left(2n + 1 - x^2\right) y = 0
$$

1.4. Ortogonalidad y Norma de los Polinomios de Hermite

En general estos polinomios cumplen con

$$
\langle \mathbf{H}_\alpha | \mathbf{H}_\beta \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_\beta(x) H_\alpha(x) \mathrm{d}x = 2^\alpha \alpha! \sqrt{\pi} \delta_{\alpha\beta} \,.
$$

Donde la función delta de Kronecker es $\delta_{\alpha\beta} = 0$ si $\alpha \neq \beta$; y $\delta_{\beta\beta} = 1$. Para demostrar el caso $\alpha \neq \beta$ partimos de

$$
\begin{aligned}
u_\beta \left[u_\alpha'' + \left(2\alpha + 1 - x^2\right) u_\alpha\right] &= 0 \\
u_\alpha \left[u_\beta'' + \left(2\beta + 1 - x^2\right) u_\beta\right] &= 0
\end{aligned}
$$

restando miembro a miembro e integrando se tiene que:

$$
\begin{aligned}
\left[u_\alpha' u_\beta - u_\beta' u_\alpha\right]' + 2\left(\alpha - \beta\right) u_\alpha u_\beta &= 0 \\
\left(\alpha - \beta\right) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_\alpha(x) H_\beta(x) \mathrm{d}x &= 0 \\
\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_\alpha(x) H_\beta(x) \mathrm{d}x &= 0 \qquad \alpha \neq \beta;
\end{aligned}
$$

ya que

$$
e^{-x^2/2} \left\{2\alpha\ H_{\alpha-1}(x) H_\beta(x) - 2\beta\ H_{\beta-1}(x) H_\alpha(x)\right\}\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0
$$

Para encontrar el valor de la norma, procedemos a partir de la relación de recurrencia

$$
\begin{aligned}
H_n(x)\left[H_n(x) - 2xH_{n-1}(x) + 2(n-1)H_{n-2}(x)\right] &= 0 \\
H_{n-1}(x)\left[H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x)\right] &= 0
\end{aligned}
$$

restando miembro a miembro, multiplicando por e^{-x^2} e integrando entre $(-\infty, \infty)$ se obtiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_\alpha^2(x) \mathrm{d}x = 2\alpha \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_{\alpha-1}^2(x) \mathrm{d}x$$

repitiendo la operación y recordando que al final queda

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x^2 \mathrm{d}x = 2\sqrt{\pi}$$

Obtenemos

$$\langle \mathbf{H}_\alpha | \mathbf{H}_\alpha \rangle = \|\mathbf{H}_\alpha\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_\alpha^2(x) \mathrm{d}x = 2^\alpha \alpha! \sqrt{\pi}$$

1.5. Representación Integral de los Polinomios de Hermite

Los polinomios de Hermite pueden ser representados como

$$H_n(x) = \frac{2^n (-i)^n e^{x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2 + 2itx} t^n \mathrm{d}t$$

que puede ser separada como

$$H_{2n}(x) = \frac{2^{2n+1} (-1)^n e^{x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} t^{2n} \cos 2xt \ \mathrm{d}t \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

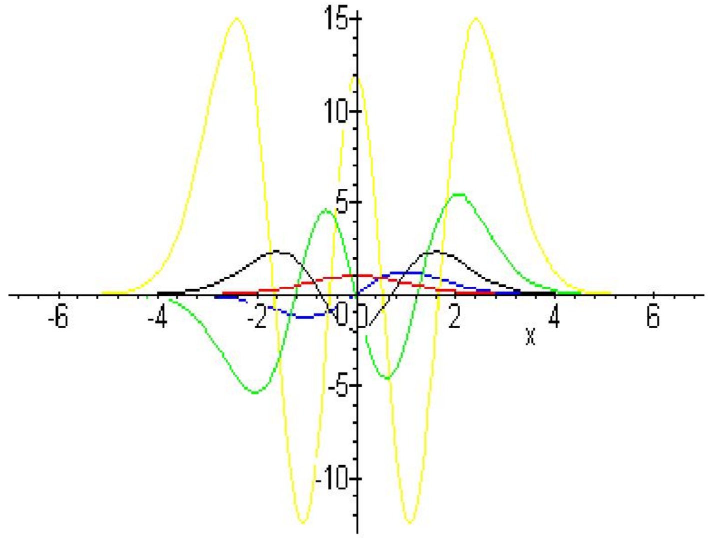
y para los términos impares

$$H_{2n+1}(x) = \frac{2^{2n+2} (-1)^n e^{x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} t^{2n+1} \operatorname{sen} 2xt \ \mathrm{d}t \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

La forma de llegar a cualquiera de estas últimas fórmulas se parte de las conocidas integrales desarrolladas en el plano complejo

$$e^{-x^2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \cos 2xt \ \mathrm{d}t$$

se deriva $2n$ veces a ambos miembros se utiliza la definición de los polinomios de Hermite.



1.6. El Oscilador armónico, independiente del tiempo, en Mecánica Cuántica.

La Ecuación de Schrödinger independiente del tiempo y en una dimensión es

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\psi(x) + \frac{2\mu}{\hbar^2}\left[E - \mathcal{U}(x)\right]\psi(x) = 0\,,$$

con μ la "masa" de la partícula; E los niveles de energía y $\mathcal{U}(x)$ el potencial al cual está sometida la partícula. En el caso que estudiemos un potencial del tipo $\mathcal{U}(x) = \frac{1}{2}\mu\omega^2 x^2$ en el cual la frecuencia angular del oscilador viene representada por ω. La ecuación de Schrödinger se convierte en

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\psi(x) + \frac{2\mu}{\hbar^2}\left[E - \frac{1}{2}\mu\omega^2 x^2\right]\psi(x) = 0\,,$$

haciendo un cambio de variable $\xi = x\sqrt{\mu\omega/\hbar}$ para adimensionalizar la ecuación de Schrödinger, se obtiene

$$\psi''(\xi) + \left[\frac{2E}{\hbar\omega} - \xi^2\right]\psi(\xi) = 0\,,$$

la cual corresponde a la forma autoadjunta de la Ecuación de Hermite:

$$\psi''(\xi) + \left[2n + 1 - \xi^2\right]\psi(\xi) = 0\,,$$

y por lo tanto identificamos

$$\frac{2E}{\hbar\omega} = 2n+1 \quad \Rightarrow \quad E = \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega\,,$$

con lo cual comprobamos la forma como viene cuantizada la energía en este sistema y la energía del estado fundamental. Por su parte, la función de onda se podrá expresar en la base de soluciones de esa ecuación

$$\psi(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\ \psi_n(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\ e^{-\xi^2/2} H_n(\xi)\,.$$

Si mantenemos la normalización

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^2(\xi)\mathrm{d}\xi = 1 \qquad \text{con } c_n = \left(\frac{\mu\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\,.$$

1.7. Resumen de Propiedades Polinomios Hermite

Polinomios de Hermite	
Definición	$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} e^{-x^2}, \qquad n = 0,1,2,....$ $H_n(x) = \sum_{k=0}^{n/2} \frac{(-1)^k n!}{k!\,(n-2k)!}\,(2x)^{n-2k}$
Ejemplos	$H_0(x) = 1; \qquad H_1(x) = 2x; \qquad H_2(x) = 4x^2 - 2;$ $H_3(x) = 8x^3 - 12x \qquad H_4(x) = 16x^5 - 48x^2 + 12$
Relaciones de Recurrencia	$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0$ $H_n'(x) = 2n\ H_{n-1}(x), \qquad n = 1,2,3,\cdots$
Ecuaciones Diferenciales	$y'' - 2xy' + 2ny = 0$ $u'' + (2n+1-x^2)\,u = 0; \quad u(x) = e^{-x^2/2} H_n(x)$
Función Generatriz	$\mathcal{H}(t,x) = \mathbf{e}^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!}\ t^n$
Representación Integral	$H_{2n}(x) = \frac{2^{2n+1}(-1)^n e^{x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} t^{2n} \cos 2xt\ \mathrm{d}t$ $H_{2n+1}(x) = \frac{2^{2n+2}(-1)^n e^{x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} t^{2n+1} \operatorname{sen} 2xt\ \mathrm{d}t$
Ortogonalidad	$\langle \mathbf{H}_\alpha \vert \mathbf{H}_\beta \rangle = 2^\alpha \alpha! \sqrt{\pi}\ \delta_{\alpha\beta} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_\beta(x) H_\alpha(x) \mathrm{d}x$