

Planteamiento General para Polinomios Ortogonales

1. Polinomios Ortogonales

Hemos considerado un par de ejemplos de Polinomios Ortogonales. En ambos podemos identificar algunas características comunes. En base a estas características comunes definiremos otras familias de polinomios ortogonales.

Nomenclatura	Nombre	a	b	$w(x)$	N_n	N_0
$P_n(x)$	Legendre	-1	1	1	$\frac{2}{2n+1}$	
$T_n(x)$	Tchebychev 1E	-1	1	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$U_n(x)$	Tchebychev 2E	-1	1	$\sqrt{1-x^2}$	$\frac{\pi}{2}$	
$H_n(x)$	Hermite	$-\infty$	∞	e^{-x^2}	$2^n n! \sqrt{\pi}$	
$L_n(x)$	Laguerre	0	∞	e^{-x}	1	
$L_n^\alpha(x)$	Laguerre G	0	∞	$x^\alpha e^{-x}$ con $\alpha > -1$	$\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}$	
$P_n^{\alpha\beta}(x)$	Jacobi	-1	1	$(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$	†	

Cuadro 1: Propiedades genéricas de los Polinomios Ortogonales, N_n indica la norma del polinomio de grado n .

† En el caso de los polinomios de Jacobi, la norma es

$$N_n = \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{2n+\alpha+\beta+1} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{n!\Gamma(n+\alpha+\beta+1)} \quad \text{con } \alpha > -1 \text{ y } \beta > -1.$$

1.1. Producto interno genérico, norma y ortogonalidad

Los polinomios ortogonales se definen como un conjunto de polinomios $\{p_n(x)\}$ de orden n definidos en un determinado intervalo $a \leq x \leq b$, los cuales son ortogonales respecto a una definición de producto interno

$$\langle \mathbf{p}_m | \mathbf{p}_n \rangle = \int_a^b w(x) p_m(x) p_n(x) dx = h_n \delta_{nm} \quad \text{con } w(x) > 0 \text{ una función peso en } a \leq x \leq b$$

que garantiza que la norma sea finita en ese intervalo. Dado que el Teorema de Weierstrass garantiza que el conjunto de polinomios $\{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$ es una base completa para un espacio vectorial \mathbb{E}^∞ , se procede a ortogonalizar esa base con la definición de producto interno y el intervalo que corresponda. Para cada caso tendremos una base ortogonal de polinomios.

Haremos ahora un catálogo de las propiedades más resaltantes de estos polinomios. En el cuadro 1 resumimos las propiedades más resaltantes, con lo son: la función peso en el producto interno, el intervalo en el cual están definidas estas funciones y su norma.

Polinomio	μ_n	$w(x)$	$q(x)$
P_n	$(-1)^n 2^n n!$	1	$1 - x^2$
T_n	$\frac{(-1)^n}{\sqrt{\pi}} 2^{n+1} \Gamma(n + \frac{1}{2})$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$1 - x^2$
U_n	$\frac{(-1)^n}{(n+1)\sqrt{\pi}} 2^{n+1} \Gamma(n + \frac{3}{2})$	$\sqrt{1-x^2}$	$1 - x^2$
H_n	$(-1)^n$	e^{-x^2}	1
L_n	$n!$	e^{-x}	x
L_n^α	$n!$	$x^\alpha e^{-x}$	x

Cuadro 2: Funciones para determinar la Fórmula de Rodrigues generalizada

1.2. Fórmula de Rodrigues generalizada

En general todos los polinomios ortogonales $\{p_n(x)\}$ vienen definidos por la fórmula de Rodrigues generalizada

$$p_n(x) = \frac{1}{w(x)\mu_n} \frac{d^n}{dx^n} (w(x)q(x)^n)$$

donde $w(x), q(x)$ y μ_n vienen especificados en el cuadro 2 para cada conjunto de polinomios ortogonales

1.3. Ejemplos de Polinomios Ortogonales

Utilizando la fórmula de Rodrigues generalizada, podemos construir algunos polinomios generalizados. El cuadro 3 muestra algunos de ejemplos de estos polinomios ortogonales

Polinomio	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$
P_n	1	x	$\frac{1}{2}(3x^2 - 1)$	$\frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$	$\frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$
T_n	1	x	$2x^2 - 1$	$4x^3 - 3x$	$8x^4 - 8x^2 + 1$
U_n	1	$2x$	$4x^2 - 1$	$8x^3 - 4x$	$16x^4 - 12x^2 + 1$
H_n	1	$2x$	$4x^2 - 2$	$8x^3 - 12x$	$16x^4 - 48x^2 + 12$
L_n	1	$1 - x$	$\frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$	$-\frac{1}{6}(x^3 - 9x^2 + 18x - 6)$	$\frac{1}{24}(x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24)$

Cuadro 3: Ejemplos de Polinomios Ortogonales

1.4. Relaciones de Recurrencia

También se pueden formular, de manera genérica las relaciones de recurrencia. Obviamente, las relaciones de recurrencia también constituyen una forma alternativa de ir construyendo los polinomios ortogonales. Así, un polinomio ortogonal genérico, $p_n(x)$, cumplirá

$$p_{n+1}(x) = (a_n + xb_n)p_n(x) - c_n p_{n-1}(x)$$

El cuadro 4 contiene las expresiones de los coeficientes para construir las relaciones de recurrencia generalizadas para cada uno de los polinomios

Polinomio	a_n	b_n	c_n
P_n	0	$\frac{2n+1}{n+1}$	$\frac{n}{n+1}$
T_n	0	2	1
U_n	0	2	1
H_n	0	2	$2n$
L_n	$\frac{2n+1}{n+1}$	$-\frac{1}{n+1}$	$\frac{n}{n+1}$
L_n^α	$\frac{2n+1+\alpha}{n+1}$	$-\frac{1}{n+1}$	$\frac{n+\alpha}{n+1}$

Cuadro 4: Funciones para determinar la Relación de Recurrencia Generalizada

1.5. Función generatriz generalizada

Para todos los polinomios ortogonales podemos definir una función generatriz $\mathcal{G}(x, t)$, de tal manera que cada uno de los polinomios ortogonales $\{p_n(x)\}$ será proporcional al coeficiente de t^n del desarrollo en series de Taylor, en potencias de t alrededor del punto $x = 0$. Esta función generatriz que constituye una forma alternativa de definir los polinomios ortogonales viene expresada por la serie

$$\mathcal{G}(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n p_n(x) t^n \quad \text{con } a_n \text{ constante}$$

Las funciones generatrices no son exclusivas de los polinomios ortogonales. Como veremos más adelante, existen funciones generatrices para las funciones de Bessel.

1.6. Ecuación diferencial para los Polinomios Ortogonales

Cada uno de los polinomios ortogonales habrá de ser solución de una ecuación diferencial ordinaria de la forma

$$g_2(x) \frac{d^2 p_n(x)}{dx^2} + g_1(x) \frac{dp_n(x)}{dx} + \alpha_n p_n(x) = 0$$

En el cuadro 6 mostramos las expresiones para los coeficientes de las ecuaciones correspondientes a las ecuaciones diferenciales para las cuales cada uno de los polinomios ortogonales es solución

1.7. Un par de aplicaciones de ejemplos

1.7.1. Interpolación polinomial de puntos experimentales

Muchas veces nos encontramos con la situación en la cual tenemos un conjunto de (digamos n) medidas o puntos experimentales $\{(x_1, y_1 = f(x_1)), (x_2, y_2 = f(x_2)), \dots, (x_n, y_n = f(x_n))\}$ y para modelar ese experimento quisiéramos una función que ajuste estos puntos. El tener una función nos

Polinomio	C_n	$\mathcal{G}(x, t)$
P_n	1	$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}$
T_n	2	$\frac{1-t^2}{1-2xt+t^2} + 1$
U_n	1	$\frac{1}{1-2xt+t^2}$
H_n	$1/n!$	e^{2xt-x^2}
H_{2n}	$1^n/(2n)!$	$\cos(2xt)e^{t^2}$
H_{2n+1}	$1^n/(2n+1)!$	$\text{sen}(2xt)e^{t^2}$
L_n	1	$\frac{1}{1-t} e^{-\frac{xt}{1-t}}$
L_n^α	1	$\frac{1}{(1-t)^\alpha} e^{-\frac{xt}{1-t}}$

Cuadro 5: Funciones para determinar la función generatriz generalizada

Polinomio	$g_2(x)$	$g_1(x)$	α_n
P_n	$1-x^2$	$-2x$	$n(n+1)$
T_n	$1-x^2$	$-x$	n^2
U_n	$1-x^2$	$-2x$	$n(n+1)$
H_n	1	$-2x$	$2n$
L_n	x	$1-x$	n
L_n^α	x	$1-x+\alpha$	n
$P_n^{\alpha\beta}$	$1-x^2$	$\beta-\alpha-x(2+\alpha+\beta)$	$n(n+\alpha+\beta+1)$

Cuadro 6: Funciones para determinar la ecuación diferencial para la cual son solución los polinomios ortogonales

provee la gran ventaja de poder intuir o aproximar los puntos que no hemos medido. La función candidata más inmediata es un polinomio y debemos definir el grado del polinomio y la estrategia que aproxime esos puntos. Si queremos aproximar esos puntos por una recta el Método de Mínimos Cuadrados es el más utilizado¹. Puede ser que no sea lineal el polinomio y queramos ajustar esos puntos a un polinomio tal que éste pase por los puntos experimentales. Queda entonces por decidir la estrategia. Esto es si ajustamos la función como “trozos” de polinomios que ajusten a subconjuntos $\{(x_1, y_1 = f(x_1)), (x_2, y_2 = f(x_2)), \dots, (x_m, y_m = f(x_m))\}$ con $m < n$. de los puntos experimentales. En este caso tendremos una función de ajuste, para cada conjunto de puntos. También podemos ajustar la función a todo el conjunto de puntos experimentales y, en ese caso el máximo grado del

¹Para detalles pueden consultar Luis A. Núñez **Formulario de Métodos Matemáticos 1. Grupos, SubEspacios, Independencia Lineal y Bases para un Espacio Vectorial Lineal** <http://webdelprofesor.ula.ve/ciencias/nunez/cursos/MetodosMatematicos1/B2005/Met1ClsEspVect105A.pdf>

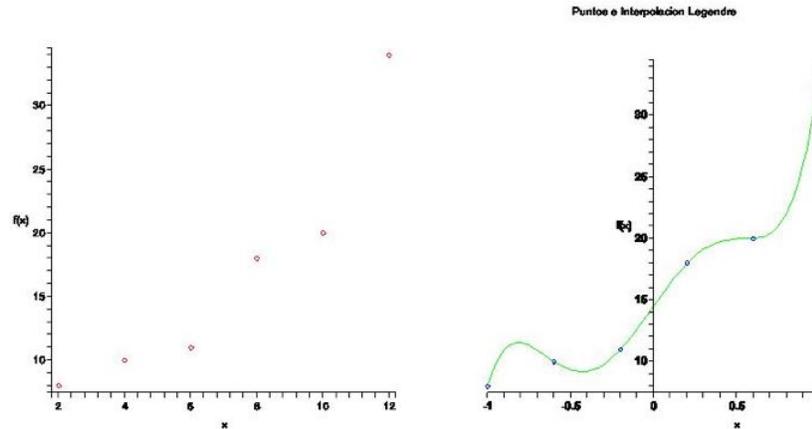


Figura 1: En el lado izquierdo se muestran los puntos experimentales son $\{(2, 8), (4, 10), (6, 11), (8, 18), (10, 20), (12, 34)\}$ y a la derecha la función polinómica que los interpola

polinomio que los ajuste será de grado $n - 1$. Para encontrar este polinomio lo expresamos como una combinación lineal de Polinomios de Legendre. Esto es

$$\mathcal{P}(x) = f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} C_k P_k(x) \Rightarrow \begin{cases} y_1 = f(x_1) = C_0 P_0(x_1) + C_1 P_1(x_1) + \dots + C_{n-1} P_{n-1}(x_1) \\ y_2 = f(x_2) = C_0 P_0(x_2) + C_1 P_1(x_2) + \dots + C_{n-1} P_{n-1}(x_2) \\ \vdots \\ y_n = f(x_n) = C_0 P_0(x_n) + C_1 P_1(x_n) + \dots + C_{n-1} P_{n-1}(x_n) \end{cases}$$

que no es otra cosa que un sistema de n ecuaciones con n incógnitas: los coeficientes $\{C_0, C_1, \dots, C_{n-1}\}$. Al resolver el sistema de ecuaciones y obtener los coeficientes, podremos obtener la función polinómica que interpola esos puntos. Una expansión equivalente se pudo haber logrado con cualquier otro conjunto de polinomios ortogonales, que ellos son base del espacio de funciones. Es importante hacer notar que debido a que los polinomios de Legendre está definido en el intervalo $[-1, 1]$ los puntos experimentales deberán re-escalarsse al ese intervalo para poder encontrar el polinomio de interpolación como combinación lineal de los Polinomios de Legendre.

Consideremos los puntos experimentales representado en la figura ???. Al construir el sistema

de ecuaciones obtendremos

$$(-1, 8) \Rightarrow -8 + C_0 - C_1 + C_2 - C_3 + C_4 - C_5 = 0$$

$$\left(-\frac{3}{5}, 10\right) \Rightarrow -10 + C_0 - \frac{3}{5}C_1 + \frac{1}{25}C_2 + \frac{9}{25}C_3 - \frac{51}{125}C_4 + \frac{477}{3125}C_5 = 0$$

$$\left(-\frac{1}{5}, 11\right) \Rightarrow -11 + C_0 - \frac{1}{5}C_1 - \frac{11}{25}C_2 + \frac{7}{25}C_3 + \frac{29}{125}C_4 - \frac{961}{3125}C_5 = 0$$

$$\left(\frac{1}{5}, 18\right) \Rightarrow -18 + C_0 + \frac{1}{5}C_1 - \frac{11}{25}C_2 - \frac{7}{25}C_3 + \frac{29}{125}C_4 + \frac{961}{3125}C_5 = 0$$

$$\left(\frac{3}{5}, 20\right) \Rightarrow -20 + C_0 + \frac{3}{5}C_1 + \frac{1}{25}C_2 - \frac{9}{25}C_3 - \frac{51}{125}C_4 - \frac{477}{3125}C_5 = 0$$

$$(1, 34) \Rightarrow -34 + C_0 + C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5 = 0$$

y al resolver el sistema obtendremos que

$$C_0 = \frac{2249}{144}, \quad C_1 = \frac{3043}{336}, \quad C_2 = \frac{1775}{504}, \quad C_3 = -\frac{175}{216}, \quad C_4 = \frac{625}{336}, \quad C_5 = \frac{14375}{3024}$$

con lo cual

$$\mathcal{P}(x) = f(x) = \frac{2249}{144} + \frac{3043}{336}x + \frac{1775}{504}P(2, x) - \frac{175}{216}P(3, x) + \frac{625}{336}P(4, x) + \frac{14375}{3024}P(5, x)$$

la interpolación queda representada en al figura ??.

Es importante señalar que mientras más puntos experimentales se incluyan para la interpolación, el polinomio resultante será de mayor grado y, por lo tanto incluirá oscilaciones que distorcionarán una aproximación más razonable. Por ello, la estrategia de hacer la interpolación a trozos, digamos de tres puntos en tres puntos, generará un mejor ajuste, pero será una función (un polinomio) continuo a trozos.

1.7.2. Cuadratura de Gauss-Legendre

Una de los usos más comunes de los polinomios ortogonales es para aproximar funciones, en particular integrales que requieren ser resueltas numéricamente. La idea es aproximar una integral, para una función $f(x)$, definida en el intervalo $[a, b]$ y suficientemente bien comportada, por una suma finita de términos $c_k f(x_k)$ y estimar el error que cometemos en esta aproximación. Esto es

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^N c_k f(x_k) + E_N$$

Nótese que la intención es utilizar la función a integrar evaluada en un conjunto de puntos estratégicos para los cuales están definidos unos coeficientes, también inteligentemente seleccionados. Es decir se requieren $2N$ números (c_k y los x_k con $k = 1, 2, \dots, N$). Más aún, esas $2N$ cantidades pueden ser seleccionadas de forma tal que la aproximación es exacta $E_N = 0$ cuando $f(x)$ es un polinomio de grado $\leq 2N - 1$

Supongamos, para empezar que la función $f(x)$ está definida para $x \in [-1, 1]^2$ y por lo tanto los polinomios ortogonales que seleccionaremos para aproximar la integral (y la función) serán los del Legendre (igual pudimos haber utilizado los polinomios de Tchebychev), con lo cual

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k(x) \quad \text{donde:} \quad a_k = \left(n + \frac{1}{2}\right) \int_{-1}^1 dx f(x) P_k(x) \quad \text{y} \quad a_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dx f(x)$$

Con lo cual

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{k=1}^N c_k f(x_k) = \sum_{k=1}^N c_k \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x_k) \right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\sum_{k=1}^N c_k P_n(x_k) \right)$$

quedan todavía por determinar los pesos c_k y los puntos x_k . Para ello procedemos de la siguiente forma. Notamos que $P_N(x)$ tiene N raíces, $x = x_j$, en el intervalo $-1 \leq x \leq 1$. Entonces, si seleccionamos esos puntos $x = x_j$ para evaluar la función $f(x_k)$ se anulan el coeficiente para el término a_N y, además podremos encontrar los pesos c_k resolviendo el sistema de N ecuaciones de la forma

$$\sum_{j=1}^N c_j P_0(x_j) = \sum_{j=1}^N c_j = 2 \quad \wedge \quad \sum_{j=1}^N c_j P_k(x_j) = 0 \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, N-1$$

donde los $P_k(x_j)$ son los distintos polinomios evaluados en las raíces del polinomio de grado N , i.e. $P_N(x_j) = 0$

Se puede demostrar que la solución de este sistema provee los pesos escritos de la forma

$$c_j = \frac{2}{(1 - x_j^2) \left(\left. \frac{dP_N(x)}{dx} \right|_{x=x_j} \right)^2}$$

Más aún, podremos, de esta forma, escribir

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{k=1}^N c_k f(x_k) = 2a_0 + E_N \quad \text{con } E_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \left(\sum_{k=1}^N c_k P_n(x_k) \right)$$

pero como

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dx f(x) \quad \Rightarrow \quad \int_{-1}^1 dx f(x) = \sum_{k=1}^N c_k f(x_k) - E_N$$

Es decir, demostramos que es posible aproximar la integral de la función con un promedio pesado de la función evaluada en unos puntos estratégicos. Los puntos estratégicos son los ceros del polinomio de Legendre de grado igual al número de puntos con los cuales se quiere aproximar la función y los pesos vienen de resolver las ecuaciones para los coeficientes de la expansión.

N	$x_j = \text{fsolve}(P(N, x), x, \text{complex})$	$c_j = \frac{2}{(1 - x_j^2) \left(\frac{dP_N(x)}{dx} \Big _{x=x_j} \right)^2}$	$2N - 1$
2	$\pm 0,5773502692$	1,0	3
3	0,0 $\pm 0,7745966692$	0,88888889 0,55555555	5
4	$\pm 0,3399810436$ $\pm 0,8611363116$	0,65214515 0,34785485	7
5	0,0 $\pm 0,5384693101$ $\pm 0,9061798459$	0,56888889 0,47862867 0,23692689	9
6	$\pm 0,2386191861$ $\pm 0,6612093865$ $\pm 0,9324695142$	0,46791393 0,36076157 0,17132449	11
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

Cuadro 7: Puntos y pesos para una cuadratura de Gauss-Legendre

En el cuadro 7 se ilustran los valores de los puntos de interpolación y sus pesos correspondientes.

Es inmediato comprobar que si $f(x)$ es un polinomio de grado $\leq N - 1$ la aproximación es exacta y el error es nulo. Pero lo que realmente hace útil a este tipo de aproximaciones es que también será exacta para polinomios de grado $\leq 2N - 1$. Esto se puede ver si expresamos un polinomio de grado $2N - 1$ como la suma de dos polinomios

$$f(x) = P_N(x)Y_1(x) + Y_2(x)$$

donde Y_1 y Y_2 son polinomios de grado $N - 1$. Entonces, al integrar miembro a miembro

$$\int_{-1}^1 dx f(x) = \underbrace{\int_{-1}^1 dx P_N(x)Y_1(x)}_{=0} + \int_{-1}^1 dx Y_2(x)$$

el primer término se anula por ser $P_N(x)$ ortogonal a cualquier polinomio de grado inferior, y el segundo término no es más que el caso que analizamos anteriormente de un polinomio de grado $\leq N - 1$

²Esta no es una limitación muy severa porque siempre podemos hacer un cambio de variable del tipo $x = \left(\frac{b-a}{2}\right)t + \left(\frac{b+a}{2}\right)$ y convertir cualquier intervalo cerrado $[a, b]$ en un intervalo cerrado $[-1, 1]$

1.8. Estrategia General para cuadraturas de Gauss

Para el caso general. Vale decir la aproximación de una integral

$$\int_a^b dx w(x)f(x) \approx \sum_{k=1}^N c_k f(x_k),$$

donde las $\{x_1, \dots, x_k, \dots, x_N\}$ son los ceros del polinomio ortogonal, de grado N , $p_N(x)$, elegido para hacer esta aproximación. Los N pesos $\{c_1, \dots, c_k, \dots, c_N\}$ surgen de resolver el sistema de ecuaciones

$$\sum_{j=1}^N c_j = \frac{h_0}{p_0^2} \quad \text{con } h_0 = \int_a^b w(x)p_0^2(x)dx \quad \wedge \quad \sum_{j=1}^N c_j P_k(x_j) = 0 \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, N - 1, .$$

Así para aproximar integrales con funciones pesos, $w(x)$, utilizaremos cuadraturas adaptadas a los polinomios ortogonales. Esto es

$$\int_0^\infty dx e^{-x} f(x) \Rightarrow \text{Laguerre} \quad \int_{-\infty}^\infty dx e^{-x^2} f(x) \Rightarrow \text{Hermite} \quad \int_{-1}^1 dx \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \text{Tchebychev}.$$

2. Series y transformadas de Fourier

2.1. Generalidades

Otro de los casos de expansión en una base completa de funciones lo constituyen la base de Fourier. En este caso la serie de Fourier la constituyen funciones continuas, reales de variable real y definidas en $[0, 2\pi]$, $C_{[0,2\pi]}^\infty$, en término de funciones trigonométricas. Esto es el conjunto de funciones $\{|\mathbf{u}_1\rangle, |\mathbf{u}_2\rangle, |\mathbf{u}_3\rangle, \dots, |\mathbf{u}_n\rangle, \dots\}$ representadas por

$$|\mathbf{u}_0\rangle = 1, \quad |\mathbf{u}_{2n}\rangle = \cos nx \quad \text{y} \quad |\mathbf{u}_{2n-1}\rangle = \sin nx, \quad \text{con } n = 1, 2, 3, \dots$$

Es claro que $\{|\mathbf{u}_1\rangle, |\mathbf{u}_2\rangle, |\mathbf{u}_3\rangle, \dots, |\mathbf{u}_n\rangle, \dots\}$ es un conjunto de funciones ortogonales por cuanto

$$\langle \mathbf{u}_n | \mathbf{u}_m \rangle = \delta_{nm} \|\mathbf{u}_n\|^2 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 \quad \text{si } n \neq m \\ \|\mathbf{u}_n\|^2 \quad \text{si } n = m \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \int_0^{2\pi} dx \sin nx \sin mx = 0 \\ \int_0^{2\pi} dx \cos nx \sin mx = 0 \\ \int_0^{2\pi} dx \cos nx \cos mx = 0 \\ \int_0^{2\pi} dx = 2\pi \\ \int_0^{2\pi} dx \cos^2 nx = \pi \\ \int_0^{2\pi} dx \sin^2 nx = \pi \end{array} \right.$$

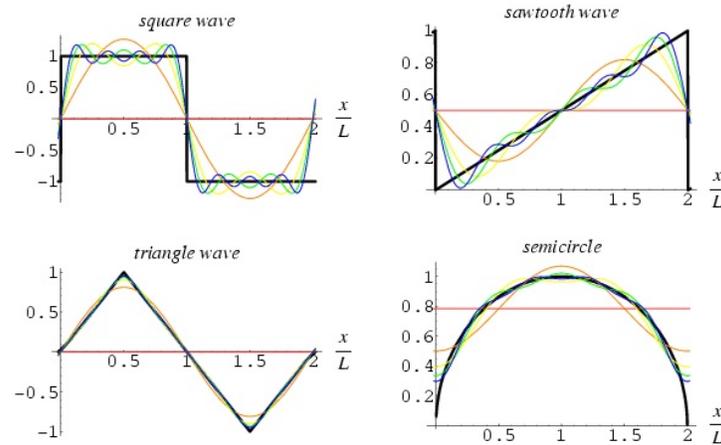


Figura 2: Expansiones de Varias funciones en sumas parciales de Series de Fourier. Tomado de Eric W. Weisstein. **Fourier Series**. *MathWorld—A Wolfram Web Resource*. <http://mathworld.wolfram.com/FourierSeries.html>

Por lo tanto, podremos construir una base ortonormal de funciones $\{|\mathbf{e}_1\rangle, |\mathbf{e}_2\rangle, |\mathbf{e}_3\rangle, \dots, |\mathbf{e}_n\rangle, \dots\}$ de la forma

$$|\mathbf{e}_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad |\mathbf{e}_{2n}\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx \quad \text{y} \quad |\mathbf{e}_{2n-1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{sen } nx.$$

Tal y como se muestra en la figura 2 distintas funciones pueden ser expandidas con sumas parciales de Fourier. A diferencia de las series de potencias, que imponen que las funciones a ser expandidas deben ser continuas y continuamente diferenciables en el intervalo, la series de Fourier pueden representar funciones continuas a trozos, siempre y cuando cumplan con algunas condiciones.

Por lo tanto cualquier función definida en el intervalo $[0, 2\pi]$ puede expresarse en términos de esta base como

$$|\mathbf{f}\rangle = \sum_{i=0}^{\infty} c_i |\mathbf{e}_i\rangle \Rightarrow c_i = \langle \mathbf{e}_i | \mathbf{f} \rangle = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} dx f(x) = c_0 \equiv a_0 & \text{si } i = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} dx f(x) \cos(nx) = c_{2n} \equiv a_m & \text{si } i = 2n \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} dx f(x) \text{sen}(nx) = c_{2n-1} \equiv b_m & \text{si } i = 2n - 1 \end{cases}$$

donde los c_i son los coeficientes de Fourier, con lo cual

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \text{sen}(nx)]$$

y equivalentemente si el período es T y para un t_0 genérico

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \right] \quad \text{con} \quad \begin{cases} a_0 = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} dt f(t) \\ a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} dx f(t) \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \\ b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} dt f(t) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \end{cases}$$

La figura 2 muestra la aproximación de las distintas sumas parciales para distintas funciones, a medida que aumentamos el número de términos la aproximación mejora.

Podemos expresar la expansión de una serie de Fourier de manera más compacta atendiendo a las expresiones anteriores. Esta expresión se conoce en algunos ámbitos como la expresión integral para la serie de Fourier

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} dt f(t) \\ &= + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[\int_0^{2\pi} dt f(t) \cos(nt) \right] \cos(nx) + \left[\int_0^{2\pi} dt f(t) \operatorname{sen}(nt) \right] \operatorname{sen}(nx) \right\} \\ F(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} dt f(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} dt f(t) \cos(n[t-x]). \end{aligned}$$

También es muy común expresar una serie de Fourier en término de una base compleja. Vale decir $\{\dots|\tilde{\phi}_k\rangle\dots\} \leftrightarrow \{\dots e^{-ikx}\dots\}$ con $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Con lo cual

$$|\mathbf{f}\rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{C}_k |\tilde{\phi}_k\rangle \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{C}_k e^{-ikx} \quad \text{con} \quad \tilde{C}_k = \frac{\langle \tilde{\phi}_k | \mathbf{f} \rangle}{\langle \tilde{\phi}_k | \tilde{\phi}_k \rangle} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx e^{-ikx} f(x).$$

Utilizando esta otra expresión podremos reescribir (una vez más) la expresión de una suma parcial de la Serie de Fourier. Dado que

$$a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dt f(t) \cos(n[t-x])$$

tendremos que

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n [a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx)] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dt f(t) \cos(n(t-x)) \right] \\ &= \Re \left[\int_{-\pi}^{\pi} dt f(t) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \left(e^{-i(t-x)k} \right) \right\} \right] \end{aligned}$$

y al sumar la progresión geométrica que representa una serie de exponenciales llegamos a

$$F_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dt f(t) \left[\frac{\operatorname{sen}\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)(t-x)\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}(t-x)\right)} \right] \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dt f(t) \mathcal{K}(x, n, t)$$

la cual siempre es convergente y el término

$$\mathcal{K}(x, n, t) = \left[\frac{\text{sen} \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) (t - x) \right)}{\text{sen} \left(\frac{1}{2} (t - x) \right)} \right]$$

se conoce como el núcleo de la transformación de F , el (*Kernel*) de Dirichlet

La pregunta básica que sigue es, en todos estos casos: ¿cómo se relaciona la expansión de Fourier $\{\mathbf{f}\} \Leftrightarrow F(x)$ con la función $f(t)$ que genera los coeficientes de la expansión? Nótese que es una forma de mirar una relación entre $F(x) \leftrightarrow f(t)$. Pasamos de $f(t)$ a $F(x)$ mediante una “transformación”

$$F_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dt f(t) \mathcal{K}(x, n, t)$$

Este tipo de relaciones se denomina transformación integral y en particular ésta es una de las expresiones de las llamadas *Transformaciones de Fourier*.