Motivación y Origen

1. Introducción

En Ciencias, una de las formas de modelar fenómenos físicos es mediante su caracterización a través de una función matemática, digamos $\mathcal{G} = \mathcal{G}(x, y, z; t)$. Desde los albores de la actividad científica contemporánea es imperioso describir los fenómenos físicos en el lenguaje de las matemáticas. Una las formas (la ideal) para modelar los cambios de esta función, $\mathcal{G}(x, y, z; t)$, que depende de la posición y del tiempo, es a través de una ecuación en la cual están involucradas la función, $\mathcal{G}(x, y, z; t)$ y sus derivadas. A esa ecuación la llamaremos *Ecuación Diferencial*.

Existe toda una "fauna" de ecuaciones diferenciales y hoy disponemos de un importante arsenal de técnicas, métodos y herramientas para encontrar la función $\mathcal{G}(x, y, z; t)$, la cual será nuestra función incógnita.

Este curso trata, parcialmente, de mostrar parte de esta fauna y de indicarles métodos para resolver un tipo particular de ecuaciones diferenciales: *las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.*

Empecemos por recordar que desde siempre hemos tratado, la mayor de las veces sin saberlo o sin explicitarlo, con este tipo de ecuaciones en donde la incógnita no es un número sino un conjunto de números: una función. El caso más emblemático lo constituye el conjunto de "fórmulas" que aprendimos cuando estudiábamos bachillerato o, más recientemente, en los primeros cursos de Física General de la Universidad. En aquellos entonces describíamos el movimiento de partículas en una dimensión, a través de dos ecuaciones:

$$V_f = V_0 + at \qquad \text{y} \qquad d = V_0 t + a\frac{t^2}{2} \tag{1}$$

de memoria repetíamos que V_f representaba la velocidad final, V_0 la velocidad inicial, a la aceleración, t el tiempo transcurrido y d la distancia recorrida en ese tiempo. El problema consistía en encontrar, para un sinfín de situaciones físicas, primeramente el valor de la aceleración del móvil y a partir de las Leyes de Newton, luego conociendo la velocidad y la posición inicial, encontrábamos la posición, d, y la velocidad, V_f en todo instante de tiempo. Así, mediante diagramas de cuerpo libre y la utilización de las leyes de Newton, encontrábamos el valor de la aceleración y las "formulitas" (1) resolvíamos el problema.

$$\sum F_{ext} = m\ a \qquad \Rightarrow a = \frac{\sum F_{ext}}{m} \qquad \Rightarrow \begin{cases} V_f = V_0 + at \\ \\ d = V_0 t + a\dfrac{t^2}{2} \end{cases} \tag{2}$$

Lo más probable es que nuestros profesores nos repitieran hasta el cansancio que la sumatoria de fuerzas externas $\sum F_{ext}$ era constante, y lo más seguro que nosotros en aquellos momentos no comprendiéramos la trascendencia de esa suposición. El caso más representativo era el del movimiento de un cuerpo bajo la acción de un campo gravitatorio, más aún: caída libre.

$$-mg = m\ a \qquad \Rightarrow a = -g \qquad \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} V_f = V_0 - gt \\ \\ d = V_0 t - g\dfrac{t^2}{2} \end{array} \right. \tag{3}$$

Lo que está detrás de este "cuento" que nos inició en el estudio de la Física y a muchos de nosotros nos sedujo para seguir estudiando y aprendiendo a tratar de describir la naturaleza, es, efectivamente, la utilización de las Leyes de Newton para modelar el fenómeno del movimiento. De este modo

$$\sum F_{ext} = m\ a = m\frac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2} = m\frac{\mathrm{d}V(t)}{\mathrm{d}t} \qquad \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} V\,(t) = \dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = V_0 + at \\ \\ \quad x(t) = V_0 t + a\dfrac{t^2}{2} \end{array} \right. \tag{4}$$

Sí la sumatoria de fuerzas externas es una contante tendremos que

$$\frac{\mathrm{d}V(t)}{\mathrm{d}t} = a = \frac{\sum F_{ext}}{m} = \text{constante} \qquad \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} V(t) = \int \mathrm{d}t\ a = at + C_2 \\ \\ x(t) = \int \mathrm{d}t\ \ (at + C_2) = a\dfrac{t^2}{2} + C_2 t + C_1 \end{array} \right. \tag{5}$$

Claramente al identificar

$$C_2 = V(t=0) = V_0 \qquad \text{y} \qquad C_1 = x(t=0) = x_0 = 0 \tag{6}$$

reobtenemos nuestras "formulitas" ancestrales. Es importante señalar que

$$\frac{\mathrm{d}V(t)}{\mathrm{d}t} = a \qquad \text{y} \qquad \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = at + C_2 \tag{7}$$

constituyen ecuaciones diferenciales donde las funciones incógnitas son la velocidad, $V(t)$, y la posición, $x(t)$, respectivamente. Ambas funciones se encontraban dentro de un signo de derivada y fueron "despejadas" mediante un proceso de integración.

La descripción del movimiento de partículas es más rica y compleja. El movimiento de una gran cantidad de partículas puede ser simulado a través de una ecuación diferencial del tipo

$$\sum \mathbf{F}_{ext}\left(\mathbf{r}\,(t)\,, \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}(t)}{\mathrm{d}t}, t\right) = m\mathbf{a} = m\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}(t)}{\mathrm{d}t^2} = m\frac{\mathrm{d}\mathbf{V}(t)}{\mathrm{d}t} \tag{8}$$

El carácter vectorial implica tres ecuaciones diferenciales, una por cada dimensión del movimiento,

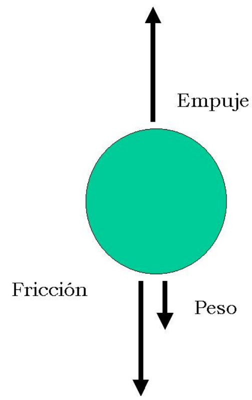

Figura 1: Diagrama de Cuerpo Libre de una esfera de corcho que emerge desde el fondo de un tanque de agua.

vale decir:

$$\sum \mathbf{F}_{ext}\left(\mathbf{r}\left(t\right), \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}(t)}{\mathrm{d}t}, t\right) = m\ \mathbf{a} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sum F^x_{ext}\left(x\left(t\right), \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}, t\right) = m\ a_x = m\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2} = m\frac{\mathrm{d}V_x(t)}{\mathrm{d}t} \\ \\ \sum F^y_{ext}\left(y\left(t\right), \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}, t\right) = m\ a_y = m\frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2} = m\frac{\mathrm{d}V_y(t)}{\mathrm{d}t} \\ \\ \sum F^z_{ext}\left(z\left(t\right), \frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}, t\right) = m\ a_z = m\frac{\mathrm{d}^2z(t)}{\mathrm{d}t^2} = m\frac{\mathrm{d}V_z(t)}{\mathrm{d}t} \end{array} \right.$$

Además del carácter vectorial de la ecuación, las componentes de la fuerza pueden dejar de ser constantes y depender de no sólo del tiempo, sino del vector posición, del vector velocidad o, de ambas simultáneamente. En este caso nuestras "formulitas" dejan de ser válidas en general y debemos integrar las ecuaciones diferenciales para obtener la trayectoria de la partícula $\mathbf{r}\left(t\right)$, conocidas: la masa, m, la expresión de la sumatoria de fuerzas externas$\sum \mathbf{F}_{ext}$, la posición y la velocidad inicial ($\mathbf{r}\left(t_0\right) = \mathbf{r}_0$ y $\mathbf{V}(t_0) = \mathbf{V}_0$). Este problema se conoce como el problema de condiciones iniciales y es, como hemos dicho antes, la razón de este curso. Antes, mostraremos como ese conocimiento del movimiento bajo acción de una resultante de fuerzas constante, es decir el movimiento de una partícula con aceleración constante puede resultar muy útil para resolver, de forma aproximada, el caso más general que hemos mencionado:

$$\mathbf{F}_{total} = \sum \mathbf{F}_{ext}\left(\mathbf{r}\left(t\right), \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}(t)}{\mathrm{d}t}, t\right) .$$

Veamos con detenimiento que significan estas afirmaciones.

Es claro el tiempo de evolución esta comprendido entre el tiempo inicial y el tiempo final, $t_0 \leq t \leq t_{final}$. Supongamos que dividimos ese intervalo de tiempo en N subintervalos

$$[t_0, t_{final}] = [t_0, t_1] \cup [t_1, t_2] \cup [t_2, t_3] \cup \cdots \cup [t_i, t_{i+1}] \cup \cdots \cup [t_{N-2}, t_{N-1}] \cup [t_{N-1}, t_N = t_{final}] \quad (9)$$

de tal modo que en cada uno de esos N subintervalos la aceleración es constante. En estas situación, nuestras "formulitas" son válidas. Esto es:

$$\left.\begin{array}{c} [t_0, t_1] \\ \Downarrow \\ V(t_0) = V_0 \\ \\ d(t_0) = d_0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} V(t_1) = V_1 = V_0 + \dfrac{\sum F_{ext}(d_0, V_0, t_0)}{m}[t_1 - t_0] \\ \\ d(t_1) = d_1 = V_0[t_1 - t_0] + \dfrac{\sum F_{ext}(d_0, V_0, t_0)}{m}\dfrac{[t_1 - t_0]^2}{2} \end{array}\right. \quad (10)$$

$$\left.\begin{array}{c} [t_1, t_2] \\ \Downarrow \\ V(t_1) = V_1 \\ \\ d(t_1) = d_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} V_2 = V_1 + \dfrac{\sum F_{ext}(d_1, V_1, t_1)}{m}[t_2 - t_1] \\ \\ d_2 = d_1 + V_1[t_2 - t_1] + \dfrac{\sum F_{ext}(d_1, V_1, t_1)}{m}\dfrac{[t_2 - t_1]^2}{2} \end{array}\right. \quad (11)$$

$$\vdots$$

$$\left.\begin{array}{c} [t_i, t_{i+1}] \\ \Downarrow \\ V(t_i) = V_i \\ \\ d(t_i) = d_i \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} V_{i+1} = V_i + \dfrac{\sum F_{ext}(d_i, V_i, t_i)}{m}[t_{i+1} - t_i] \\ \\ d_{i+1} = d_i + V_i[t_{i+1} - t_i] + \dfrac{\sum F_{ext}(d_i, V_i, t_i)}{m}\dfrac{[t_{i+1} - t_i]^2}{2} \end{array}\right. \quad (12)$$

$$\vdots$$

$$\left.\begin{array}{c} [t_{N-1}, t_N] \\ \Downarrow \\ V(t_{N-1}) = V_{N-1} \\ \\ d(t_{N-1}) = d_{N-1} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} V_N = V_{N-1} + \dfrac{\sum F_{ext}(d_{N-1}, V_{N-1}, t_{N-1})}{m}[t_N - t_{N-1}] \\ \\ d_N = d_{N-1} + V_{N-1}[t_N - t_{N-1}] + \dfrac{\sum F_{ext}(d_{N-1}, V_{N-1}, t_{N-1})}{m}\dfrac{[t_N - t_{N-1}]^2}{2} \end{array}\right. \quad (13)$$

Nótese que las posiciones y velocidades **finales** para cada intervalo, son las posiciones y velocidades **iniciales** para el intervalo siguiente y que el valor de la aceleración, que es variable, se toma como constante e igual al valor que tiene en el comienzo del intervalo.

Para analizar este caso consideremos la situación de una esfera de corcho, con radio a y masa m que se suelta desde el fondo de un tanque de agua de profundidad h. Queremos conocer con que velocidad llega la esfera a la superficie.

El diagrama de cuerpo libre se puede observar en la figura 1 y la ecuación de Newton para este caso se expresa como

$$\sum \mathbf{F}_{ext}\left(\mathbf{r}\left(t\right), \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}(t)}{\mathrm{d}t}, t\right) = ma \;\Rightarrow\; -mg - \eta V\left(t\right) + m_f g = m\frac{\mathrm{d}V(t)}{\mathrm{d}t}\,. \tag{14}$$

En la cual hemos identificado:

$$\text{peso: } -mg\,, \quad \text{Fricción: } -\eta V\left(t\right)\,, \quad \text{Empuje: } m_f g\,.$$

Como aprendimos también hace algún tiempo el empuje o fuerza de Arquímides es igual al peso del fluido desalojado por el cuerpo. Por ello aparece m_f que representa la masa del fluido. Para el caso en el cual el fluido no es viscoso ($\eta = 0$), es decir, no hay fricción con el fluido, la ecuación se reduce a

$$\sum \mathbf{F}_{ext}\left(\mathbf{r}\left(t\right), \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}(t)}{\mathrm{d}t}, t\right) = ma \Rightarrow -mg + m_f g = ma \tag{15}$$

en la cual claramente la aceleración es constante e igual a

$$a = g\left(\frac{m_f}{m} - 1\right) \equiv g\left(\frac{\rho_f}{\rho_c} - 1\right) = cte \tag{16}$$

donde hemos indentificado ρ_f la densidad del fluido y ρ_c la densidad del cuerpo.

Para encontrar la velocidad con la cual llega a la superficie, encontramos primero el tiempo que tarda en subir y luego evaluamos la velocidad en ese tiempo. Esto es

$$h = g\left(\frac{\rho_f}{\rho_c} - 1\right)\frac{t^2}{2} \Rightarrow t = \pm\sqrt{\frac{2h\rho_c}{g\left(\rho_f - \rho_c\right)}} \tag{17}$$

$$\tag{18}$$

$$V_{final} = \pm g\left(\frac{\rho_f}{\rho_c} - 1\right)\sqrt{\frac{2h\rho_c}{g\left(\rho_f - \rho_c\right)}} \tag{19}$$

En el caso general, descrito por la ecuación (14), procedemos del mismo modo: encontramos el tiempo en el cual llega la superficie y luego evaluamos la expresión para la velocidad para ese tiempo. Fíjense que la estrategia para resolver el problema físico es la misma, sólo que tendremos que disponer de un arsenal adicional de herramientas y técnicas para "despejar" la función velocidad. Aprenderemos a resolver ecuaciones diferenciales de la misma manera que antes resolvíamos ecuaciones algebraicas. En este caso la solución exacta para la expresión de la velocidad es

$$-mg - \eta V\left(t\right) + m_f g = m\frac{\mathrm{d}V(t)}{\mathrm{d}t} \Rightarrow V\left(t\right) = \frac{g\left(m - m_f\right)}{\eta}\left[e^{\left(-\frac{\eta}{m}t\right)} - 1\right]. \tag{20}$$

Con lo cual

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = V\left(t\right) = \frac{g\left(m - m_f\right)}{\eta}\left[e^{\left(-\frac{\eta}{m}t\right)} - 1\right], \tag{21}$$

y la función posición surge de integrar la ecuación diferencial anterior

$$y(t) = -\frac{g(m-m_f)}{\eta^2}\left[me^{\left(-\frac{\eta}{m}t\right)} + \eta t - m\right], \tag{22}$$

desafortunadamente, no se puede despejar el tiempo de manera exacta por cuanto la ecuación

$$h = -\frac{gm(m-m_f)}{\eta^2}\left[e^{\left(-\frac{\eta}{m}t_f\right)} - 1 + \frac{\eta}{m}t_f\right], \tag{23}$$

donde t_f es el tiempo final, es una ecuación *trascendente* y debe ser resuelta numéricamente.

Haciendo algunas sustituciones simplificadoras

$$m_f = \frac{4}{3}\pi\,\xi\,\rho\,a^3; \quad m = \frac{4}{3}\pi\,\phi\,\rho\,a^3 \quad \rho_f = \xi\rho \quad \rho_c = \phi\rho\,. \tag{24}$$

Donde ξ y ϕ representan las densidades relativas del fluido y del cuerpo respecto al agua (de densidad ρ), respectivamente. Seguidamente sustituimos los valores numéricos

$$g = 9{,}8; \quad a = 0{,}02; \quad \rho = 10^3; \quad \xi = 1; \quad \phi = 0{,}8; \quad V_0 = 0; \quad \eta = (6\,\pi\,a)\,1{,}002\times 10^{-3}\,, \tag{25}$$

la ecuación (23) nos queda para $h = 10\,(\mathrm{mts})$

$$10 = 12339{,}72755\,(1-\exp(-0{,}01409062500t)) - 173{,}8744736t \tag{26}$$

y se obtiene $t_f = 2{,}876443096$ sg.

Con el cual se evalúa la ecuación para la velocidad

$$V(t) = 173{,}8744730\,(1-\exp(-0{,}01409062500t)) \Rightarrow V_{final} = 6{,}9063798 \quad m/s \tag{27}$$

En la siguiente tabla se implementan las ecuaciones (10) a (13) habida cuenta de las simplificaciones (24) y los valores numéricos (25) para $h = 1/10 \sim [t_{i+1} - t_i]$

t_i (s)	V_i (m/s)	d_i (m)	$V(t)$ (m/s)	$d(t)$ (m)
0.100	0.2449999997	0.01224999998	0.2448275	0.01225
0.200	0.4896547791	0.04898273892	0.4893102	0.04895
0.300	0.7339648246	0.11016371910	0.7334487	0.11009
0.400	0.9779306220	0.19575849150	0.9772434	0.19563
0.500	1.221552656	0.30573265540	1.2206949	0.30553
0.600	1.464831412	0.44005185880	1.4638035	0.43976
0.700	1.707767373	0.59868179800	1.7065698	0.59828
0.800	1.950361022	0.7815882177	1.9489943	0.78106
0.900	2.192612841	0.9887369109	2.1910775	0.98807
1.000	2.434523312	1.220093719	2.4328198	1.21926
1.100	2.676092916	1.475624530	2.6742217	1.47462
1.200	2.917322134	1.755295283	2.9152836	1.75410
1.300	3.158211444	2.059071962	3.1560062	2.05767
1.400	3.398761326	2.386920600	3.3963898	2.38529

V_i y d_i representan la velocidad y la posición aproximada, tal y como se expresan en las ecuaciones (10) a (13). Mientras que $V(t)$ y $d(t)$ ilustran los valores de la velocidad y la posición exactas, calculadas a partir de las ecuaciones (21) y (22). Es clara que la aproximación es buena hasta la primera cifra decimal.

2. Ejemplos de algunas ecuaciones diferenciales

Thomas Robert Malthus[1] fue uno de los primeros en darse cuenta que la población crece como una razón geométrica mientras que los medios de subsistencias crecen de manera aritmética. Esta afirmación plasmada en su *Ensayo sobre el Principio de Poblaciones,* el cual inspiró a Darwin en la formulación de principio de selección natural. Malthus, muy religioso y creyente pensaba que esa diferencia en el crecimiento de la población y las necesidades que ellas generaban, erán de procedencia divina y que forzaría a la humanidad a ser más laboriosa e ingeniosa para lograr los medios de subsistencia. Darwin, no tan religioso, lo formuló como una situación natural presente en todas las especies.

$$\text{Ley de Malthus/Decaimiento Radioactivo:}\quad \frac{dy(t)}{dt} = k\ y(t) \ \rightarrow\ y(t) = y_0 e^{k\,t}\,,\ \text{ con } y(0) = y_0\,. \tag{28}$$

Para $k > 0$ la población crece y para $k < 0$ tenemos una situación de decaimiento: la población decrece con el tiempo. Este concepto se utiliza los procesos de decaimiento radiactivo.

La ecuación logística o Ley de Verhulst[2] se utiliza para describir el crecimiento de la población de una manera más precisa que la Ley de Malthus. Esta ecuación toma en cuenta el decrecimiento de la población con el término $-y^2$

$$\frac{dy(t)}{dt} = [k - ay(t)]\ y(t) = ky(t) - ay^2(t) \ \rightarrow\ y(t) = \frac{k\ y_0}{a\ y_0 + (k - a\ y_0)\ e^{-k\,t}}$$

La Ley de Enfriamiento de Newton expresa que la tasa de cambio de la temperatura respecto al tiempo es proporcional a la diferencia de temperatura entre el cuerpo y el medio ambiente.

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = k(T - T_m) \ \rightarrow\ T = (T_0 - T_m)\ e^{k\,t} + T_m\,, \text{ con } T(0) = T_0$$

La Ley de Torricelli, la cual establece que (para un tanque cilíndrico) la tasa de cambio respecto al tiempo de la profundidad del agua en un tanque es proporcional a su raíz cuadrada

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{k}{A}\sqrt{y(t)} \ \rightarrow\ y(t) = \left(\frac{1}{2}t + y(0)^2\right)$$

[1] En honor al economista político inglés Thomas Robert Malthus (1766-1834).

[2] **Pierre François Verhulst** 1804 - 1849 Matemático Belga con sus más importantes comtribuciones en estadística demográfica

3. De Ecuaciones y Ecuaciones Diferenciales

En cursos anteriores consideramos una ecuación algebráica como aquella que se cumplía para ciertos valores de $x = x_0$:

$$x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow x_0 = 2\,,$$

llamaremos ahora una ecuación diferencial aquella que se cumple para ciertas **funciones** i.e.

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} - f(x) = 0 \Rightarrow f(x) = e^x$$

Definición: Sea $f(x)$ una función definida sobre un intrervalo $a < x < b$. Por una Ecuación Diferencial Ordinaria entenderemos toda ecuación que involucre a x, $f(x)$ y una o más derivadas de $f(x)$.

Ejemplos:

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} + f(x) = 0\,, \quad \frac{\mathrm{d}^3f(x)}{\mathrm{d}x^3} = -e^{-x}\,, \quad \frac{\mathrm{d}^2f(x)}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\cos(x)}{1-x^2}\,, \quad x\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = 2[f(x)]^2\,.$$

Utilizaremos para tal efecto varias notaciones equivalentes:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2f(x)}{\mathrm{d}x^2} + g(x)\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} - af^2(x) &= k(x) \\
f''(x) + g(x)f'(x) - af^2(x) &= k(x) \\
f_{xx}(x) + g(x)f_x(x) - af^2(x) &= k(x)\,.
\end{aligned}$$

Se llaman ordinarias porque involucran funciones de una sola variable y derivadas respecto a ella. Otras ecuaciones diferenciales del tipo

$$\frac{\partial^2\phi(x,y)}{\partial x\partial y} + g(x)\frac{\partial\phi(x,y)}{\partial x} - a\phi^2(x.y) = p(y) \quad \leftrightarrow \quad \phi_{xy}(x) + g(x)\phi_{xy}(x) - a\phi^2(xy) = p(y)$$

Las llamaremos ecuaciones diferenciales en derivadas parciales o, simplemente ecuaciones diferenciales parciales, porque contienen funciones (y derivadas) de varias variables.

4. Orden y linealidad

Una ecuación diferencial

$$\mathcal{F}[x, y(x), y'(x), y''(x), y''(x), \cdots, y^{(n)}(x)] = 0\,, \tag{29}$$

será lineal si sólo parecen funciones lineales de $y(x)$ y sus derivadas. Por ejemplo:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}^2f(x)}{\mathrm{d}x^2} + f(x)\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} - af^2(x) &= k(x) \quad \text{no lineal} \\
\alpha(x)f''(x) + \beta(x)f'(x) + \gamma(x)f(x) &= k(x) \quad \text{lineal}
\end{aligned}$$

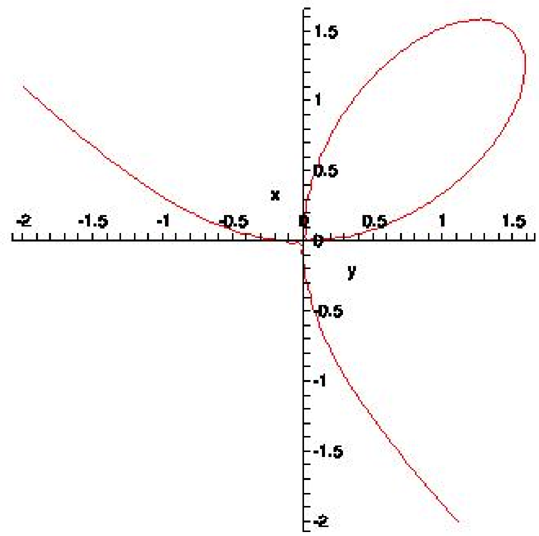

Figura 2: Gráfica de la función implícita $f(x, y) = x^3 + y^3(x) - 3xy(x) = 0$

El orden de la derivada mayor define el orden de la ecuación diferencial, para la EDO (29) se tiene entonces que ésta será de orden n.

Ejemplos:

$$\begin{array}{rcll} y'' & + & \left(3y'\right)^3 + 2x = 7\,, & \text{EDO de orden 2} \\ y' & + & y = x\,, & \text{EDO de orden 1}\,. \end{array}$$

La ecuación diferencial (29) será homogénea si NO contiene términos independientes en $f(x)$, en caso contrario será inhomogénea:

$$\begin{array}{rcll} \dfrac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2} + g(x)\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} - af(x) & = & k(x) & \text{lineal inhomogénea} \\ f''(x) + g(x)f'(x) - af(x) & = & 0 & \text{lineal homogénea} \end{array}$$

5. Soluciones Explícitas e Implícitas

Las soluciones heredan su nombre del tipo de función que las representa, así tendremos soluciónes explícitas cuando las funciones sean soluciones y sean explícitas. Esto es

$$\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2} = y(t) + 4\ e^t \ \Rightarrow\ y(t) = e^t C_2 + e^{-t} C_1 + 2\ te^t$$

y también

$$y' = (x+y)^2 \;\Rightarrow\; y(t) = \tan(t - C_1) - t\,, \quad \text{con } t - C_1 \neq \frac{\pi}{2}$$

Las soluciones serán implícitas si son representadas por funciones como

$$y\;y' + x = 0 \;\Rightarrow\; f(x,y) = x^2 + y(x)^2 - 25 = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rl} y = & \sqrt{25 - x^2} \\ y = & -\sqrt{25 - x^2} \end{array} \right. \quad \text{con } -5 < x < 5$$

Se tiene que seleccionar una rama de la función raíz.

Igualmente será solución implícita

$$\left(y^2(x) - x\right)\, y'(x) - y(x) + x^2 = 0 \;\Rightarrow\; f(x,y) = x^3 + y^3(x) - 3xy(x) = 0$$

y esta segunda no es tan fácil de descubrir como solución. Para comprobarla derivamos la solución

$$\frac{\mathrm{d}[f(x,y)]}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\left[x^3 + y^3(x) - 3xy(x)\right]}{\mathrm{d}x} = 0 \Rightarrow 3x^2 + 3y^2(x)\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} - 3y(x) - 3x\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} = 0\,,$$

simplificando y agrupando tendremos la solución. Otra vez, la función no es univaluada. Al graficarla (ver Figura 2) nos damos cuenta que tenemos tres varias soluciones de funciones univaluadas unas contínuas y otras no. La función es univaluada fuera del lóbulo. Esto es para $x \leq 0 \wedge x > 2^{\frac{2}{3}}$. Con lo cual tendremos que seleccionar, dentro del lóbulo, cuál de las partes univaluada corresponde la solución.

6. Soluciones Generales y Particulares

Veamos las siguientes ecuaciones y soluciones

$$\begin{array}{rcl} y' = e^x & \leftarrow & y(x) = e^x + C_1 \\ y'' = e^x & \leftarrow & y(x) = e^x + C_2 x + C_1 \\ y''' = e^x & \leftarrow & y(x) = e^x + C_3 x^2 + C_2 x + C_1 \end{array}$$

Cada una de las soluciones representan familias de soluciones, una para cada constante. Este tipo de soluciones las denominaremos soluciones generales. Es decir, llamaremos solución general de una ecuación diferencial aquella que queda indeterminada por un conjunto de constantes $\{C_1 + C_2 + C_3 + \cdots C_n\}$. En contraste, cuando *particularizamos* los valores de las constantes C_3, C_2, C_1 tendremos una solución *particular* par cada una de las ecuaciones. Adicionalmente, cuando nos referimos a las ecuaciones no lineales el concepto de solución particular varía. Soluciones particulares en este tipo de ecuaciones serán aquellas que se cumplen para rangos (o puntos) muy particulares. Vale decir

$$\left. \begin{array}{l} (y')^2 + y^2 = 0 \\ (y'')^2 + y^2 = 0 \end{array} \right\} \quad \leftarrow y = 0 \quad \text{única solución}$$

Tamibién en este caso llamaremos a este tipo de soluciones, particulares. De igual modo puede darse casos para los cuales no exista solución en un determinado intervalo.

$$\left. \begin{array}{l} |y'|^2 + 1 = 0 \\ |y''|^2 + 1 = 0 \end{array} \right\} \quad \text{no tienen solución}$$

Ecuaciones de la forma

$$xy' = 1 \Rightarrow y(x) = \ln|x| + C \Rightarrow \begin{cases} y(x) = \ln(x) + C_1 \text{ para } x > 0 \\ \\ y(x) = \ln(-x) + C_1 \text{ para } x < 0 \end{cases}$$

para: $-1 < x < 0 \wedge 0 < x < 1$, tienen soluciones particulares para intervalos de la variables x.

Del mismo modo

$$(y' - y)(y' - 2y) = 0 \quad \Rightarrow [y(x) - C_1 e^x]\left[y(x) - C_2 e^{2x}\right] = 0$$

tendrá dos soluciones particulares.

6.1. Familia de soluciones $n-$paramétricas

Si $y(x) = f(x, C_1, C_2, \cdots C_n)$ es solución de una ecuación diferencial

$$\mathcal{F}[x, y(x), y'(x), y''(x), \cdots, y^{(n)}(x)] = 0\,,$$

para n constantes $\{C_1, C_2, C_3, \cdots C_n\}$ arbitrarias. Entonces diremos que

$$y(x) = f(x, C_1, C_2, \cdots C_n) \quad \text{es una familia } n\text{-paramétrica de soluciones}$$

Existe una diferencia entre una solución general de una ecuación y una solución $n-$paramétrica. La solución general tiene que contener **todas** las soluciones de una ecuación diferencial determinada. Una solución $n-$paramétrica no necesariamente. Veamos

$$y = xy' + (y')^2 \quad \Rightarrow \begin{cases} y(x) = Cx + C^2 \\ \\ y(x) = \dfrac{-x^2}{4} \end{cases}$$

Uno llega a estar tentado de llamar solución general a la solución $1-$paramétrica $y(x) = Cx + C^2$. Sin embargo, deja por fuera otra solución que no tiene que ver con un valor particular de las constantes C.

Otro ejemplo, lo constituye

$$y' = -2y^{\frac{3}{2}} \quad \Rightarrow y(x) = \frac{C^2}{(Cx+1)^2}\,, \ \ \forall\, x\,,$$

pero también

$$y(x) = \frac{1}{\left(x + \tilde{C}\right)^2}\,,$$

es solución con $y(x) \neq 0$.

Una solución $n-$paramétrica se denominará solución general si contiene **todas** las soluciones de una determinada ecuación diferencial. En el caso de ecuaciones diferenciales lineales, las soluciones $n-$paramétricas contituyen las soliciones generales a las ecuaciones diferenciales.

6.2. Solución particular, valores iniciales *vs* valores de contorno

Dependiendo de la situación física que estemos modelando quizá podamos determinar las constantes arbitrarias de una familia $n-$paramétrica con información para un único punto $x = x_0$. Esto es

$$\mathcal{F}[x, y(x), y'(x), y''(x), \cdots, y^{(n)}(x)] = 0 \quad \Rightarrow y(x) = f(x, C_1, C_2, \cdots C_n)$$
$$\Downarrow$$
$$\overbrace{\underbrace{y(x_0) \Rightarrow C_1 = c_1 \quad y'(x_0) \Rightarrow C_2 = c_2 \cdots \quad y^{n-1}(x_0) \Rightarrow C_n = c_n}}$$
$$\Downarrow$$
$$y(x) = f(x, c_1, c_2, \cdots c_n)$$

En este caso diremos que tendremos un problema de valores iniciales, ya que determinamos las constantes arbitrarias a partir de la información de la función y sus derivadas en un solo punto. Si consideramos

$$y'' + \omega^2 y = 0 \quad \text{con} \left\{ \begin{array}{c} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{array} \right\} \quad \Rightarrow y(x) = \frac{1}{\omega}\operatorname{sen}\omega x$$

Si por el contrario, para determinar el valor de las constantes arbitrarias disponemos de información de la función y sus derivadas en dos o más puntos, diremos que tendremos un problema de contorno. Esto es

$$y'' + \omega^2 y = 0 \quad \text{con} \left\{ \begin{array}{c} y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{array} \right\} \quad \Rightarrow y(x) = \operatorname{sen} n\pi\omega x$$

Nótese que también pudimos haber tenido información del tipo

$$y(0) = y_0\,,\ y'(1) = y'_1\,,\ y'(0) = y'_0\,,\ y'(1) = y'_1\,,\ y'(0) = y_0\,,\ y(1) = y'_1$$

y para cada uno de estos caso tendremos una solución distinta.

Demostraremos que los problemas de valores iniciales para ecuaciones diferenciales lineales siempre tienen solución particular (siempre se pueden determinar las constantes a partir de la información de la función y las derivadas en UN punto). No así los problemas de valores de contorno.