Métodos elementales de integración

1. Integración directa

Es fundamental, primero que todo, identificar con que tipo de ecuación diferencial ordinaria estamos tratando antes de cualquier intento de conseguir una solución.

Veamos varios ejemplos:

$$
\begin{array}{rcll}
\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{l}\mathrm{sen}\theta & = & 0\,, & \text{EDO no lineal, homogénea de orden 2} \\
\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{l}\theta & = & 0\,, & \text{EDO lineal, homogénea de orden 2} \\
\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{l}\theta & = & E(t)\,, & \text{EDO lineal, no homogénea de orden 2} \\
y' + xy & = & \frac{x}{y^3}\,, & \text{EDO no lineal, homogénea de orden 1} \\
y' - x^3 + 2\frac{y}{x} - \frac{1}{x}y^2 & = & 0\,, & \text{EDO no lineal, no homogénea de orden 1} \\
\tan(x)y' - y & = & \tan^2(x)\,, & \text{EDO lineal, homogénea de orden 1} \\
xy' + y & = & x^3\,, & \text{EDO lineal, no homogénea de orden 1}
\end{array}
$$

Para comenzar expondremos unos métodos de integración, los cuales si bien son elementales y casi triviales serán utilizados en lo que sigue con bastante frecuencia.

La integración directa tiene varias variantes las cuales nos hemos tropezado en varias situaciones de modelaje y que nos han permitido integrar (intuitivamente) ecuaciónes diferenciales. La más directa de todas ha sido

$$\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} = f(x) \Rightarrow \int \mathrm{d}y(x) = \int \mathrm{d}x\ f(x) \Rightarrow y(x) = \int \mathrm{d}x\ f(x) + C$$

por lo cual, al integrar (analítica o numéricamente) tendremos la expresión para la función $y(x)$.

La integración directa fue la estrategia que utilizamos arriba para encontrar las formulitas que nos aprendimos en bachillerato. Esto es

$$\frac{\sum F_{ext}}{m} = \frac{\mathrm{d}V(t)}{\mathrm{d}t} = a = \text{constante} \quad \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} V(t) = \int \mathrm{d}t\ a = at + C_2 \\ \\ x(t) = \int \mathrm{d}t\ \ (at + C_2) = \frac{t^2}{2}\ a + C_2 t + C_1 \end{array} \right.$$

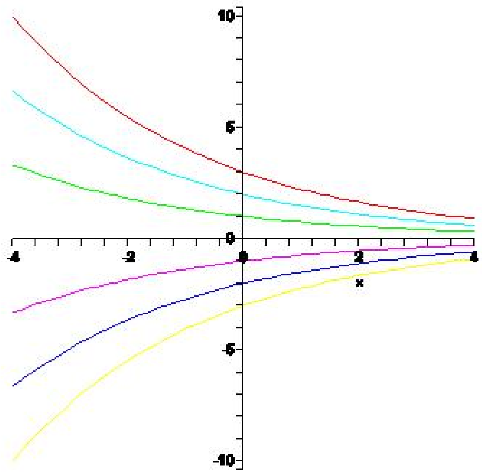

Figura 1: Familia de soluciones 1−paramétrica para $a = \frac{1}{3}$. En particular han sido tomados los valores $C = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$

en la cual al recordar las condiciones iniciales

$$V(0) = V_0 \equiv C_2 \quad \Rightarrow \quad V(t) = V_0 + at$$

$$x(0) = x_0 \equiv C_1 \quad \Rightarrow \quad x(t) = x_0 + V_0 t + a\frac{t^2}{2}$$

La primera variante en la estrategia de integración directa es

$$\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} = f(y) \Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}y}{f(y)} = \int \mathrm{d}x \Rightarrow \mathcal{F}[y(x)] = x + C$$

donde $\mathcal{F}[y(x)]$ será un funcional, desde el cual quizá se pueda despejar $y(x)$.

Esta estrategia se ilustra más o menos así

$$\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} = -ay\,(x)\ ,\ \text{con } y(0) = 2\,,$$

entonces:

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -a\int \mathrm{d}x \;\Rightarrow\; y_g(x) = Ce^{-ax} \;\Rightarrow\; y_p(x) = 2e^{-ax}\,.$$

la Figura 1 muestra varias soluciones particulares pertenecientes a esta familia, para $a = \frac{1}{3}$.

Otro ejemplo de integración directa surge de

$$yy' = (y+1)^2 \Rightarrow \frac{yy'}{(y+1)^2} = 1 \Rightarrow \int \frac{y\mathrm{d}y}{(y+1)^2} = \int \mathrm{d}x\,,\ \text{para } y \neq -1\,,$$

integrando

$$\frac{1}{y+1} + \ln|y+1| = x + C$$

que no es otra cosa que una familia de soluciones implícitas, $1-$paramétrica.

Para una condición inicial como $y(2) = 0$ entonces

$$y(2) = 0 \Rightarrow C = -1 \quad \Rightarrow \frac{1}{y+1} + \ln|y+1| = x - 1 \text{ para } y \neq -1$$

una vez más esta familia de soluciones $1-$paramétrica no constituye la solución general de la ecuación diferencial ya que no contiene todas las soluciones. En este caso, $y(x) = -1$ también es solución.

1.1. Mi primera ecuación separable

Los casos anteriores de integración directa son generalizados por una ecuación que llamaremos separable. Esto es, la función (funcional) de dos variables del lado derecho se supone que es el resultado del producto de dos funciones de una variable, con lo cual las variables dependientes e independientes se agrupan a lados distintos de la igualdad.

$$\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} = Y[y(x)]X(x) \quad \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{Y(y)} = X(x)\ \mathrm{d}x \Leftrightarrow \int \frac{\mathrm{d}y}{Y(y)} = \int X(x)\ \mathrm{d}x\,.$$

Por ejemplo, en el caso con

$$\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} = x + xy \quad \Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}y}{1+y} = \int x\ \mathrm{d}x \quad \Rightarrow \ln(1+y) = \frac{x^2}{2} + C \quad \Rightarrow y(x) = Ae^{\frac{x^2}{2}}$$

con C y A constantes arbitrarias a ser determinadas por las condiciones iniciales y además con $y = -1$. De todos modos $y = -1$ es una soluci'on particular.

1.2. Mi primera ecuación diferencial no separable

Veamos ahora un caso bastante sencillo de resolver donde la EDO no es una ecuación diferencial separable.

Consideremos la ecuación diferencial siguiente

$$\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} + ay(x) = e^{-x}\,,\ \text{con } y(0) = 2\,,$$

entonces, podemos preguntarnos sobre la posibilidad de que exista una función $\mu(x)$ de manera que si multiplicamos ambos lados de la ecuación diferencial por $\mu(x)$ entonces, el lado izquierdo de la ecuación diferencial se pueda escribir como:

$$\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} + ay(x) \Rightarrow \mu(x)\left(\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} + ay(x)\right) \overset{?}{\equiv} \frac{\mathrm{d}[\mu(x)y(x)]}{\mathrm{d}x}$$

de esta manera, la función $\mu(x)$ es una función a determinar (en este caso a adivinar).

Y, efectivamente tenemos que si

$$\mu(x) = e^{ax} ,$$

entonces

$$e^{ax}\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} + ay(x)e^{ax} = e^{-x}e^{ax} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}(e^{ax}y(x))}{\mathrm{d}x} = e^{ax}e^{-x} \Rightarrow \int \mathrm{d}(e^{ax}y(x)) = \int \mathrm{d}x\ e^{(a-1)x} ,$$

de forma y manera que:

$$e^{ax}y(x) = \frac{1}{a-1}e^{(a-1)x} + C .$$

Para $y(0) = 2$:

$$y(0) = 2 = \frac{1}{a-1} + C \ \Rightarrow\ C = \frac{2a-3}{a-1}$$

Una solución particular será entonces:

$$y_p(x) = \frac{1}{a-1}\left[e^{-x} + (2a-3)e^{-ax}\right]$$

Un par comentarios son pertinentes:

- Llamaremos al término $\mu(x)$ factor integrador de la ecuación diferencial. Este factor está relacionado con propiedades de simetría de la ecuación, pero en este nivel lo buscaremos tanteando.

- La solución general de esa ecuación diferencial toma la forma de $y_g(x) = e^{-x} + Ce^{-ax}$, donde el segundo de los términos $y_h(x) = Ce^{-ax}$ corresponde a la solución general para la ecuación homogénea asociada a esa ecuación diferencial: $\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} + ay(x) = 0$. El otro término $y_{inh}(x) = e^{-x}$ corresponde a la solución particular de la inhomogénea: $\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} + ay(x) = e^{-x}$.

Esto último será una propiedad general para ecuaciones diferenciales lineales de cualquier orden. Resolveremos la ecuación homogénea y luego encontraremos la solución de la inhomogénea. La solución general será una suma de ambas soluciones

En general

$$y' + ay = g(x) \quad \Rightarrow \mu(x) = e^{ax} \quad \Rightarrow y_g(x) = \underbrace{e^{-ax}\int_{x_0}^{x} \mathrm{d}t\ g(t)e^{at}}_{\text{solución de la inhomogénea}} + \underbrace{Ce^{-ax}}_{\text{solución de la homogénea}}$$

la demostración la dejamos como ejercicio para el lector.

La figura 2 muestra el mapa de ruta para la resolución de las ecuaciones diferenciales ordinarias, lineales.

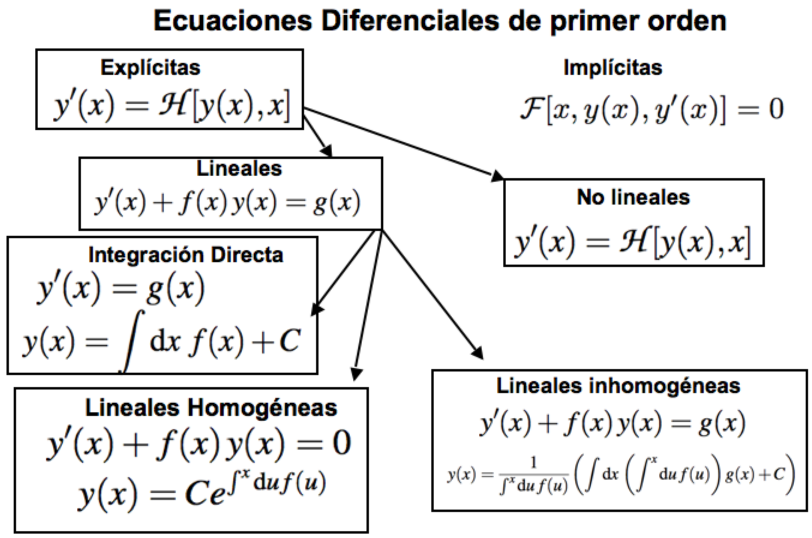

Figura 2: Mapa de las Ecuaciones diferenciales explícitas

2. Método de las Isoclinas

Este método se basa en la idea de campo y curvas integrales que vimos cuando estudiamos campos vectoriales. La idea es bien simple. En general, una ecuación diferencial de primer orden (explícita respecto a la derivada) se podrá representar como $y' = f(y, x)$. Ahora bien, el lado derecho de esa igualdad lo representa una función de dos variables, la cual tendrá un valor en cada punto (x, y). Ese valor (por la igualdad que representa la ecuación diferencial) será el valor de la derivada en ese punto y el valor de la derivada en un punto, no es otra cosa que la pendiente de la recta tangente a ese punto. Con eso, al construir una gráfica recordamos las curvas integrales de los campos vectoriales y reconstruimos las curvas solución a partir de sus tangentes.

Tenemos entonces que si $y = f(x)$ o $f(x, y) = 0$ define y como una función de x que satisface $y' = f(y, x)$ sobre un intervalo $a < x < b$, entonces el gráfico de esta función se denomina una curva integral y a la totalidad de esas curvas se le llama un campo de direcciones. A las curvas con la propiedad: $y' = f(x, y) =$ constante se le denominan isoclinas (igual pendiente).

Ejemplos: La EDO

$$y' = \frac{y}{x} \;\Rightarrow\; y = Cx \leftarrow \text{curva integral.} \quad (x \neq 0\,, y \neq 0)\,.$$

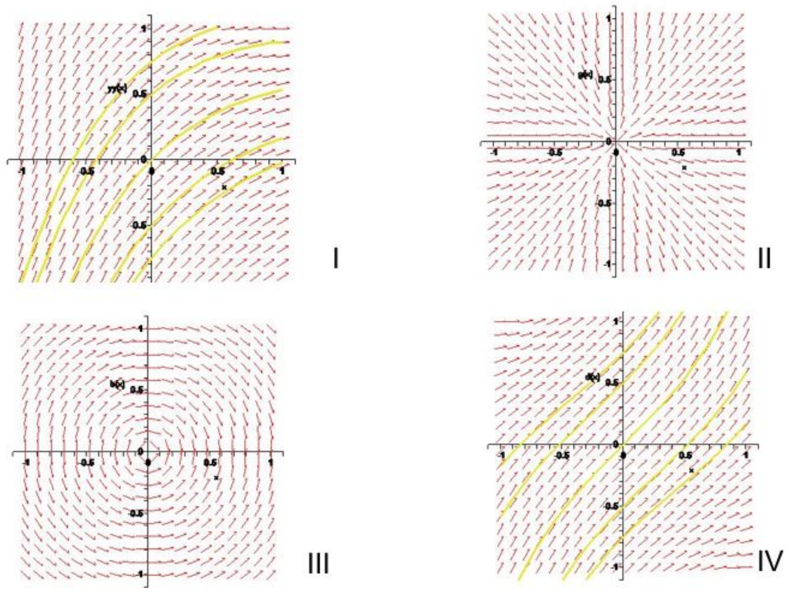

Figura 3: Isoclinas para cuatro ecuaciones diferenciales

Para la ecuación

$$y' = -\frac{x}{y} \;\Rightarrow\; x^2 + y^2 = C^2 \leftarrow \text{curva integral.} \quad (x \neq 0\,, y \neq 0)\,.$$

Cuando por un punto pasa más de una curva integral lo llamaremos un punto singular y para los puntos por donde pase una y solo una curva integral le llamaremos puntos ordinarios.

La Figura 3 contiene cuatro ejemplos de estas construcciones. Así tendremos la representación gráfica para las tangentes de las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} = e^{-x} - \frac{1}{3}y(x) \quad \text{Cuadrante I}\,, \quad \frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{y(x)}{x} \quad \text{Cuadrante II}$$

y también

$$\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{y(x)} \quad \text{Cuadrante III}\,, \quad \frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} = 1 + x\;y(x) \;\text{Cuadrante IV}$$

En el Cuadrante I de la Figura 3 se muestra la ecuación $\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} = e^{-x} - \frac{1}{3}y(x)$ y se muestran las soluciones particulares para las condiciones iniciales $y(0) = 0{,}75,\; y(0) = 0{,}50,\; y(0) = 0,\; y(0) = -0{,}50,\; y(0) = -0{,}75$. El Cuadrante II corresponde a las tangentes generadas a partir de la ecuación $\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{y(x)}{x}$. Nótese que son curvas integrales radiales que para el punto $x = 0$ no está definida la curva integral. En el Cuadrante III representa las tangentes de la ecuación $\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{y(x)}$.

Finalmente el Cuadrante IV contiene las tangentes a la ecuación $\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} = 1 + x\ y(x)$ en ella se han indicado las curvas integrales para las soluciones particulares correspondientes a las condiciones iniciales $y(0) = 0{,}75,\ y(0) = 0{,}50,\ y(0) = 0,\ y(0) = -0{,}50,\ y(0) = -0{,}75.$

Es importante señalar que este método permite obtener las posibles soluciones de una ecuación diferencial no importa lo complicada que sea.

Ejercicio Utilice el método anterior para estudiar las soluciones de las EDO:

$$y' = x + y\,, \quad -5 < x < 5\,.$$

$$y' = \sqrt{x^2 + y^2}\,, \quad -1 < x < 1\,.$$

$$y' = 1 + xy\,, \quad -5 < x < 5\,.$$

3. Ecuación Diferenciales de Primer Orden

Ahora de manera un poco más sistemática diremos que una ecuación diferencial de primer orden será un funcional tal que si es explícita respecto a la derivada ésta se podrá despejar

$$\mathcal{F}[x, y(x), y'(x)] = 0 \quad \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y' \equiv \dfrac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} = H(x,y) \\ \\ P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = 0 \end{array} \right.$$

Ejemplos:

$$y' = 2xy + e^x \quad \Rightarrow \quad (2xy - e^x)\,\mathrm{d}x - \mathrm{d}y = 0\,,$$

$$y' = \ln(x) + y \quad \Rightarrow \quad (\ln(x) + y)\,\mathrm{d}x - \mathrm{d}y = 0$$

3.1. Ecuaciones diferenciales separables

La primera estrategia será la que consideramos anteriormente en el sentido que la ecuación diferencial sea separable. Es decir que las variables dependientes e independientes puedan ser agrupadas y, a partir de allí intentar una integración de cada grupo por separado. Esto lo esbozamos, más o menos así

$$\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} = Y(y(x))X(x) \quad \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{Y(y)} = X(x)\ \mathrm{d}x \Leftrightarrow \int \frac{\mathrm{d}y}{Y(y)} = \int X(x)\ \mathrm{d}x$$

o equivalentemente

$$P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad P_1(x)P_2(y)\mathrm{d}y + Q_1(x)Q_2(y)\mathrm{d}x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{P_2(y)}{Q_2(y)}\mathrm{d}y + \frac{Q_1(x)}{P_1(x)}\mathrm{d}x = 0$$

Ejemplo Consideremos la siguiente ecuación diferencial no lineal

$$y' = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{5-y}} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x + \sqrt{5-y}\,\mathrm{d}y = 0 \quad \Rightarrow \int \mathrm{d}x\,\sqrt{1-x^2} + \int \mathrm{d}y\,\sqrt{5-y} = 0$$

con lo cual, al integrar resulta que

$$\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\mathrm{arcsen}x + \frac{2}{3}(5-y)^{3/2} = C \quad \text{para } -1 \leq x \leq 1 \quad \wedge \quad y > -5$$

Nótese que el arcsen$x$ es multivaluada por lo tanto debemos restringir el intervalo a su valor principal $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

Ejercicio Pruebe que

$$y' = x\frac{\sqrt{1-y}}{\sqrt{1-x^2}}\,,$$

tiene como solución:

$$\sqrt{1-x^2} - 2\sqrt{1-y} = C \quad \text{para } -1 < x < 1 \quad \wedge \quad y < 1\,.$$

Es $y = 1$ una solución particular?

3.2. Variaciones sobre separabilidad

Abrá otras situaciones en las cuales encontremos ecuaciones diferenciales que podremos convertir en separables:

$$\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} = f(\underbrace{ax + by + c}_{z}) \quad \Rightarrow \mathrm{d}z = a\,\mathrm{d}x + b\,\mathrm{d}y\,,$$

por lo tanto:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{b}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} - \frac{a}{b} \;\Rightarrow\; \frac{1}{b}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} - \frac{a}{b} = f(z) \;\Rightarrow\; \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = bf(z) + a$$

es decir, el cambio de variable nos conduce a una ecuación diferencial separable:

$$\frac{\mathrm{d}z}{bf(z) + a} = \mathrm{d}x\,.$$

Ejemplo:

$$y' = \mathrm{sen}^2(x-y) \quad \Rightarrow \mathrm{d}z = \mathrm{d}x - \mathrm{d}y\,,$$

esto es

$$y' = 1 - \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} \quad \Rightarrow z' = 1 - \mathrm{sen}^2(z) \quad \Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}z}{1 - \mathrm{sen}^2(z)} = \int \mathrm{d}x$$

es decir

$$\int \frac{\mathrm{d}z}{\cos^2(z)} = x + C \quad \Rightarrow \tan z = x + C \quad \Rightarrow \tan(x-y) = x + C \quad \Rightarrow y = x - \arctan(x+C)\,.$$

Se puede tratar de generalizar el caso anterior y considerar ecuaciones diferenciales del tipo

$$\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

Entonces, se distinguen dos casos dependiendo si las rectas $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ y $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ son paralelas o no.

1.- Si son paralelas

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \lambda \quad \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\lambda(a_1x + b_1y) + c_2}\right) \equiv \tilde{f}(a_1x + b_1y)$$

la cual analizamos anteriormente.

Ejemplo

$$y' = -\frac{2x + 3y - 1}{4x + 6y + 2} \quad \Rightarrow \lambda = 2\,, \quad z = 2x + 3y - 1 \ \Rightarrow \ \mathrm{d}z = 2\mathrm{d}x + 3\mathrm{d}y \ \Rightarrow \ y' = \frac{1}{3}(z' - 2)$$

con lo cual

$$\frac{1}{3}(z' - 2) = -\frac{z}{2z + 4} \quad \Rightarrow \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{z + 8}{2z + 4} \quad \Rightarrow \int \frac{2z + 4}{z + 8}\mathrm{d}z = \int \mathrm{d}x \quad \Rightarrow 2z - 12\ln(z + 8) = x + C\,,$$

por lo tanto, la solución será:

$$4x + 6y - 2 - 12\ln(2x + 3y + 7) = x + C \ \Rightarrow \ x + 2y - 4\ln(2x + 3y + 7) = \tilde{C}\,,$$

con $2x + 3y + 7 \neq 0$. Podemos comprobar que $2x + 3y + 7 = 0$ es una solución particular de la ecuación diferencial.

2.- Si no son paralelas, se intuye el siguiente cambio de variables

$$\left.\begin{array}{l} u = a_1x + b_1y + c_1 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}u = a_1\mathrm{d}x + b_1\mathrm{d}y \\[2ex] v = a_2x + b_2y + c_2 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}v = a_2\mathrm{d}x + b_2\mathrm{d}y \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \mathrm{d}x = \dfrac{b_2\mathrm{d}u - b_1\mathrm{d}v}{a_1b_2 - a_2b_1} \\[2ex] \mathrm{d}y = \dfrac{a_1\mathrm{d}v - a_2\mathrm{d}u}{a_1b_2 - a_2b_1} \end{array}$$

con lo cual, la ecuación diferencial

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) = f\left(\frac{u}{v}\right)\,,$$

queda de la forma

$$\left[a_2 + b_2 f\left(\frac{u}{v}\right)\right]\mathrm{d}u - \left[a_1 + b_1 f\left(\frac{u}{v}\right)\right]\mathrm{d}v = 0\,,$$

donde la función $f\left(\frac{u}{v}\right)$ se conoce como una función homogénea y al igual que la ecuación diferencial que hereda de ésta su nombre. Este tipo de ecuaciones diferenciales serán consideradas en la próxima sección.

Otro enfoque (equivalente) de este mismo problema puede ser consultado en el problemario de Kiseliov, Kransnov, Makarenko[1].

[1] A. Kiseliov, M. Krasnov y G. Makarenko (1969) **Problemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.** (*Mir*, Moscú)