# Ecuaciones no resueltas respecto a la derivada

## 1. Introducción

Podemos preguntarnos sobre los casos donde no es posible despejar $y'$ de la ecuación diferencial ordinaria de primer orden: $\mathcal{F}[x, y(x), y'(x)] = 0$.

Varias situaciones pueden aparecer:

$$\mathcal{F}[x, y(x), y'(x)] = 0 \quad \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{F}[y'(x)] & = & 0 \\ \\ \mathcal{F}[x, y'(x)] & = & 0 \\ \\ \mathcal{F}[y(x), y'(x)] & = & 0 \\ \\ \mathcal{F}[x, y(x), y'(x)] & = & 0 \end{array} \right.$$

### 1.1. Caso: $\mathcal{F}[y'(x)] = 0$

Como $\mathcal{F}[y'(x)] = 0$ no contiene ni a $x$ ni a $y(x)$, entonces sí existe al menos una raíz $\kappa_i$ de la ecuación $\mathcal{F}[y'(x)] = 0$ entonces

$$y' = \kappa_i \quad \Rightarrow \quad y(x) = \kappa_i x + C \quad \Rightarrow \quad \kappa_i = \frac{y(x) - C}{x}.$$

Por lo tanto

$$\mathcal{F}\left[\frac{y(x) - C}{x}\right] = 0$$

es la integral de la ecuación diferencial.

**Ejemplo** La solución de la ecuación

$$(y')^7 - (y')^5 + y' + 3 = 0\,,$$

es

$$\left(\frac{y(x) - C}{x}\right)^7 - \left(\frac{y(x) - C}{x}\right)^5 + \frac{y(x) - C}{x} + 3 = 0$$

### 1.2. Caso: $\mathcal{F}[x, y'(x)] = 0$

Si se puede despejar $x$, entones podemos hacer los siguientes cambios de variable

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & f(t) \\ \\ y' & = & g(t) \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} \mathrm{d}x & = & f'(t)\,\mathrm{d}t \\ \\ \mathrm{d}y & = & g(t)\,\mathrm{d}x \end{array} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}y = g(t) f'(t)\,\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} y(x) & = & \int g(t) f'(t)\,\mathrm{d}t + C \\ \\ x & = & f(t) \end{array} \right.$$

**Ejemplo** La ecuación

$$(y')^3 - y' = 1 + x\,.$$

Podemos hacer los siguientes cambios de variable

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& t^3 - t - 1 \\ \\ y' &=& t \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{rcl} \mathrm{d}x &=& (3t^2-1)\,\mathrm{d}t \\ \\ \mathrm{d}y &=& t\,\mathrm{d}x \end{array} \Rightarrow \mathrm{d}y = t(3t^2-1)\,\mathrm{d}t$$

integrando:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \int \mathrm{d}y &=& \int t(3t^2-1)\,\mathrm{d}t \\ \\ x &=& t^3 - t - 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y(x) &=& \frac{t^2}{4}(3t^2-2) + C \\ \\ x &=& t^3 - t - 1 \end{array}\right.$$

## 1.3. Caso: $\mathcal{F}[y(x), y'(x)] = 0$

1. Se puede despejar $y(x)$, es decir: $y = f(y')$. Entonces hacemos los siguientes cambios de variables:

$$\left\{\begin{array}{rcl} y' &=& z \\ \\ y &=& f(z) \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{rcl} \mathrm{d}y &=& z\,\mathrm{d}x \\ \\ \mathrm{d}y &=& f'(z)\,z'\,\mathrm{d}x \end{array} \Rightarrow z(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}z}{z}$$

Por lo tanto, la solución paramétrica será

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& \int \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}z}{z} + C \\ \\ y &=& f(z) \end{array}\right.$$

**Ejemplo** La ecuación

$$y = a(y')^2 + b(y')^3\,, \quad a \text{ y } b = \text{constantes}$$

Tenemos entonces:

$$\left\{\begin{array}{rcl} y' &=& z \\ \\ y &=& az^2 + bz^3 \end{array}\right. \Rightarrow \mathrm{d}x = (2az + 3bz^2)\,\frac{\mathrm{d}z}{z}$$

la solución paramétrica es :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& \int (2a + 3bz)\,\mathrm{d}z + C \\ \\ y &=& az^2 + bz^3 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2az + \frac{3}{2}bz^2 + C \\ \\ y &=& az^2 + bz^3 \end{array}\right. .$$

En el caso de que queramos obtener $y(x)$ podemos intentar despejar $z$ de la primera ecuación, en este caso esto es posible

$$z(x) = -\frac{1}{3b}\left[2\,a \pm \sqrt{4\,a^2 + 6\,b(x-C)}\right],$$

y sustituir en la segunda:

$$y(x) = \frac{1}{27b^2}\left(2\,a \pm \sqrt{4\,a^2 + 6\,b(x-C)}\right)^2\left(a \mp \sqrt{4\,a^2 + 6\,b(x-C)}\right).$$

2. No se puede despejar $y'$ ni $y$ de $\mathcal{F}[y(x), y'(x)] = 0$, pero puede existir un parámetro tal que

$$\left\{\begin{array}{rcl} y & = & f(t) \\ & & \\ y' & = & g(t) \end{array}\right. \Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} \mathrm{d}y & = & f'(t)\,\mathrm{d}t \\ & & \\ \mathrm{d}y & = & g(t)\,\mathrm{d}x \end{array} \quad \Rightarrow \quad f'(t)\,\mathrm{d}t = g(t)\,\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad \frac{f'(t)}{g(t)}\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$$

La solución paramétrica es entonces la siguiente:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \int \frac{f'(t)}{g(t)}\mathrm{d}t & = & x + C \\ & & \\ y & = & f(t) \end{array}\right. .$$

**Ejemplo** La ecuación

$$y^{2/3} + (y')^{2/3} = 1\,,$$

Tenemos entonces:

$$\left\{\begin{array}{rcl} y & = & \cos^3(t) \\ & & \\ y' & = & \mathrm{sen}^3(t) \end{array}\right. \Rightarrow \quad -\frac{3\cos^2(t)\mathrm{sen}(t)}{\mathrm{sen}^3(t)}\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$$

Por lo tanto

$$\left\{\begin{array}{rcl} -3\int \cot^2(t)\mathrm{d}t & = & x + C \\ & & \\ y & = & \cos^3(t) \end{array}\right. \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 3\left[\cot(t) + t\right] + C \\ & & \\ y & = & \cos^3(t) \end{array}\right.$$

## 1.4. Caso: $\mathcal{F}[x, y(x), y'(x)] = 0$

1. Si se puede despejar la función $y$, entonces $y = \mathcal{G}(x, y')$. En este caso consideramos la siguiente sustitución: $y' = z(x)$

$$y = \mathcal{G}(x, y') = \mathcal{G}(x, z) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}y = \partial_x\mathcal{G}\,\mathrm{d}x + \partial_z\mathcal{G}\,\mathrm{d}z = z\,\mathrm{d}x\,,$$

por lo tanto:

$$z = \partial_x\mathcal{G} + \partial_z\mathcal{G}\,\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}z} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} \phi(x, z, C) & = & 0 \\ & & \\ y & = & \mathcal{G}(x, z) \end{array}\right.$$

2. Si se puede despejar a la variable $x$, entonces $x = \mathcal{H}(y, y')$. Como en el caso anterior tenemos la siguiente sustitución: $y' = z(x)$

$$x = \mathcal{H}(y, y') = \mathcal{H}(y, z) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = \partial_y \mathcal{H}\, \mathrm{d}y + \partial_z \mathcal{H}\, \mathrm{d}z\,.$$

Si multiplicamos por $z$, se tiene

$$z\mathrm{d}x = z\left[\partial_y \mathcal{H}\, \mathrm{d}y + \partial_z \mathcal{H}\, \mathrm{d}z\right]$$

por lo tanto:

$$\mathrm{d}y = z\left[\partial_y \mathcal{H}\, \mathrm{d}y + \partial_z \mathcal{H}\, \mathrm{d}z\right] \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \phi(y, z, C) & = & 0 \\ \\ x & = & \mathcal{H}(x, z) \end{array} \right.$$

Aquí podemos considerar dos tipos de ecuaciones bien conocidas:

$$y = xf(y') + g(y') \quad \rightarrow \quad \text{Ecuac. de Lagrange}$$

y un caso particular de la ecuación de Lagrange:

$$y = xy' + g(y') \quad \rightarrow \quad \text{Ecuac. de Clairaut}$$

En cuanto a la ecuación de Clairaut podemos notar que al reemplazar $y'$ por el parámetro $m$, lo que se obtiene es la ecuación de la línea recta

$$y = mx + f(m)\,.$$

Por ejemplo, la solución de la ecuación de Clairaut: $y = xy' + (y')^2$ es la familia de rectas con pendiente $m$,es decir $y(x) = mx + m^2$.

**Ejemplo** 1.- Sea la ecuación

$$y = x(y')^2 - (y')^{-1} \quad \Rightarrow \quad y = \mathcal{G}(x, y')$$

Tenemos entonces:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y' & = & z \\ \\ y & = & xz^2 - z^{-1} \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} \mathrm{d}y & = & z\, \mathrm{d}x \\ \\ \mathrm{d}y & = & z^2\, \mathrm{d}x + \left(2xz + \frac{1}{z^2}\right)\, \mathrm{d}z \end{array} \quad \Rightarrow \quad z\, \mathrm{d}x = z^2\, \mathrm{d}x + \left(2xz + \frac{1}{z^2}\right)\, \mathrm{d}z$$

es decir:

$$\begin{array}{rcl} z & = & z^2 + \left(2xz + \dfrac{1}{z^2}\right) \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} \\ 1 & = & z + \left(2x + \dfrac{1}{z^3}\right) \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} \\ \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z} & = & z\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z} + 2x + \dfrac{1}{z^3} \\ (z-1)\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z} + 2x & = & -\dfrac{1}{z^3} \\ \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z} + \dfrac{2x}{z-1} & = & -\dfrac{1}{z^3(z-1)}\,. \end{array}$$

Esta última ecuación es una ecuación diferencial lineal, por lo tanto, sabemos resolver

$$
\begin{aligned}
x(z) &= \frac{1}{e^{\int f(z)\mathrm{d}z}}\int e^{\int f(z)\mathrm{d}z} g(z)\mathrm{d}z + \frac{C}{e^{\int f(z)\mathrm{d}z}} \\
x(z) &= \frac{1}{e^{\int \frac{2}{z-1}\mathrm{d}z}}\int e^{\int \frac{2x}{z-1}\mathrm{d}z}\left[-\frac{1}{z^3(z-1)}\right]\mathrm{d}z + \frac{C}{e^{\int \frac{2x}{z-1}\mathrm{d}z}} \\
x(z) &= -\frac{1}{(z-1)^2}\int \frac{z-1}{z^3}\,\mathrm{d}z + \frac{C}{(z-1)^2} \\
x(z) &= \frac{2\,Cz^2 + 2\,z - 1}{2\,(z-1)^2\,z^2}
\end{aligned}
$$

La solución, en forma paramétrica, a la ecuación diferencial es entonces

$$
\left\{
\begin{aligned}
x(z) &= \frac{2\,z(Cz+1)-1}{2\,(z-1)^2\,z^2} \\
\\
y(x) &= xz^2 - z^{-1}
\end{aligned}
\right. .
$$

2.- Consideremos la ecuación

$$
y = xy' + \frac{a}{2}\frac{1}{y'}\,,
$$

donde $a$ es una constante.

Como en el caso anterior $y = \mathcal{G}(x, y')$. Entonces:

$$
\left\{
\begin{aligned}
y' &= z \\
\\
y &= xz + \tfrac{a}{2z}
\end{aligned}
\right.
\quad \Rightarrow \quad
\begin{aligned}
\mathrm{d}y &= z\,\mathrm{d}x \\
\\
\mathrm{d}y &= z\,\mathrm{d}x + \left(x - \tfrac{a}{2z^2}\right)\,\mathrm{d}z
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad z\,\mathrm{d}x = z\,\mathrm{d}x + \left(x - \frac{a}{2z^2}\right)\,\mathrm{d}z
$$

con un poco de álgebra se tiene

$$
\begin{aligned}
z &= z + \left(x - \frac{a}{2z^2}\right)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} \\
0 &= \left(x - \frac{a}{2z^2}\right)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{a}{2z^2} \quad \Rightarrow \quad z = \pm\sqrt{\frac{a}{2x}}
\end{aligned}
$$

por lo tanto, un conjunto de la soluciones particulares son

$$
y(x) = \pm x\sqrt{\frac{a}{2x}} \pm \frac{a}{2}\sqrt{\frac{2x}{a}}\,.
$$

Y la familia 1-paramétrica de soluciones será: $y(x) = xC + \dfrac{a}{2C}$.

## 2. El método de las envolventes

Hemos descrito varios métodos para obtener una familia 1-paramétrica de de soluciones a la ecuación $\mathcal{F}[x, y(x), y'(x)] = 0$. Si ésta familia de soluciones $f(x, y, C) = 0$ no es una solución general, entonces el problema de encontrar una solución particular puede llegar a ser complejo. Sin embargo, en algunos casos, existe un método para encontrar soluciones particulares de una ecuación diferencial de primer orden. este método tiene que ver con el concepto de *envolvente* de una familia de curvas. Primero veamos que significa una envolvente de manera conceptual

Una curva $\Gamma$ se denomina una envolvente de una familia de curvas $f(x, y, C) = 0$ si se cumplen las siguientes dos propiedades

1. En cada punto de la envolvente existe un único miembro de la familia tangente al punto.
2. Todo miembro de la familia de curvas es tangente a la envolvente en un punto distinto de la envolvente.

El siguiente teorema nos suministra una condición suficiente para que exista una envolvente de la familia de curvas $f(x, y, C) = 0$.

**Teorema** Si la función $f(x, y, C) = 0$ es una función dos veces diferenciable para un conjunto de valores $x, y, C$, y si para este conjunto de valores se cumple que:

$$f(x, y, C) = 0\,, \qquad \partial_c f(x, y, C) = 0$$

$$\begin{vmatrix} \partial_x f & \partial_y f \\ \partial_{cx} f & \partial_{cy} f \end{vmatrix} \neq 0\,, \qquad \partial_{cc} f \neq 0\,,$$

entonces, la familia de curvas $f(x, y, C) = 0$ tiene una envolvente cuya ecuación paramétrica estará dada por:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f(x, y, C) & = & 0 \\ \partial_c f(x, y, C) & = & 0 \end{array} \right.$$

---

**Ejemplos** 1.- Veamos si la familia de curvas:

$$y = \cos(x + C)\,,$$

posee una envolvente.

Tenemos entonces:

$$f(x, y, C) = y - \cos(x + C)\,, \qquad \partial_c[y - \cos(x + C)] = \operatorname{sen}(x + C) = 0 \,\Rightarrow\, x + C = \pi/2$$

$$\begin{vmatrix} \operatorname{sen}(x + C) & 1 \\ \cos(x + C) & 0 \end{vmatrix} = -\cos(x + C)\,, \qquad \partial_{cc} f = \cos(x + C)\,,$$

La función $\cos(x+C)$ es diferente de cero si $x+C \neq \pi/2$, por lo tanto, todos los valores que excluyan a $x+C=\pi/2$ que satisfacen la ecuación paramétrica

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y - \cos(x+C) & = & 0 \\ \\ \operatorname{sen}(x+C) & = & 0 \end{array} \right.$$

conforman una envolvente a la familia $y = \cos(x+C)$.

Podemos notar lo siguiente, si tomamos la primera de estas curvas $y = \cos(x+C)$, la elevamos al cuadrado y sumamos con la segunda también elevada al cuadrado, resulta:

$$y^2 = \cos^2(x+C) + \operatorname{sen}^2(x+C) = 1 \quad \Rightarrow \quad y = \pm 1\,.$$

Las rectas $y=1$ y $y=-1$ son las envolventes de $y=\cos(x+C)$.

2.- Encontrar las envolventes de

$$y^2 = 2xC - C^2\,.$$

Como en el ejemplo anterior,

$$f(x,y,C) = y^2 - 2xC + C^2\,, \qquad \partial_c[y^2 - 2xC + C^2] = -2x + 2C = 0 \;\Rightarrow\; x = C$$

$$\left| \begin{array}{cc} -2C & 2y \\ \\ -2 & 0 \end{array} \right| = 4y \neq 0\,, \qquad \partial_{cc} f = 2 \neq 0\,,$$

Aquí, $y \neq 0$. La envolvente tiene entonces su forma paramétrica dada por

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y^2 - 2xC + C^2 & = & 0 \\ \\ x & = & C \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad y^2 - x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & x \\ \\ y & = & -x \end{array} \right.$$

## 2.1. Envolventes y soluciones

Sea $f(x,y,C) = 0$ una familia 1-paramétrica de soluciones a la ecuación diferencial $y' = f(x,y)$. Para esta familia puede existir o no una envolvente, si la envolvente existe, entonces se tiene que en cada punto de la envolvente hay un miembro de la familia de soluciones tangente a la envolvente. Esto significa que la curva envolvente en cada uno de sus puntos tiene la misma pendiente $y'$ que las curvas integrales, y por lo tanto, cada envolvente satisface la ecuación diferencial $y' = f(x,y)$.

Podemos decir entonces, que una envolvente de una familia de soluciones de $y' = f(x,y)$ es también una solución de la ecuación diferencial. La inversa de esta afirmación no tiene porque ser verdadera, es decir, una solución particular, que no sea obtenida a partir de la familia 1-paramétrica de soluciones, no es necesariamente una envolvente.

**Ejemplos** 1.- Utilizando el método de las envolventes encontrar una solución particular de

$$y' = (1 - y^2)^{\frac{1}{2}} ,$$

que no sea obtenible de la familia de soluciones $y = \cos(x + C)$.

Como vimos en el ejemplo anterior, $y = 1$ y $y = -1$ son envolventes de $y = \cos(x + C)$. Por lo tanto, tenemos dos soluciones particulares a a ecuación diferencial: $y = 1$ y $y = -1$.

2.- Encontrar una solución particular de

$$9(y')^2(2 - y^2) = 4(3 - y) ,$$

no obtenible de su solución $(x - C)^2 = 3y^2 - y^3$.

Veamos si esta familia de soluciones tiene envolventes

$$f(x, y, C) = (x - C)^2 - 3y^2 + y^3 , \qquad \partial_c[(x - C)^2 - 3y^2 + y^3] = -2(x - C) = 0 \Rightarrow x = C$$

Por otro lado,

$$\begin{vmatrix} 2(x-C) & -6y + 3y^2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -6y(2 - y) \neq 0 \qquad \partial_{cc} f = 2 \neq 0 ,$$

Se tiene que $y \neq 0$ y $y \neq 2$. La envolvente tiene entonces su forma paramétrica dada por

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (x - C)^2 - 3y^2 + y^3 & = & 0 \\ x & = & C \end{array} \right. \Rightarrow \quad -y^2(3 - y) = 0 \quad \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & 0 \\ y & = & 3 \end{array} \right.$$

La solución $y = 0$, no se puede considerar ya que el determinante anterior tiene que ser diferente de cero. Por lo tanto, una solución particular es la recta $y = 3$.

3.- Resuelva la ecuación de Clairaut

$$y = xy' + (y')^2$$

y estudie sus posibles envolventes.

Esta es una ecuación del tipo $y = \mathcal{G}(x, y')$. Por lo tanto

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y' & = & z \\ y & = & xz + z^2 \end{array} \right. \Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} \mathrm{d}y & = & z\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y & = & z\,\mathrm{d}x + (x + 2z)\,\mathrm{d}z \end{array} \quad \Rightarrow \quad z\,\mathrm{d}x = z\,\mathrm{d}x + (x + 2z)\,\mathrm{d}z$$

es decir:

$$0 = \left(\frac{x}{z} + 2\right) \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} \quad \Rightarrow \quad x = -2z$$

Esto nos permite encontrar una solución particular de la ecuación diferencial, ya que

$$z = -\frac{x}{2} \quad \Rightarrow \quad y = xz + z^2 \quad \Rightarrow \quad y(x) = -\frac{x^2}{4}\,.$$

Si consideramos $y(x) = xC + C^2$, que es la familia de soluciones de la ecuación diferencial, entonces al hacer un estudio sobre las envolventes encontramos lo siguiente

$$f(x,y,C) = y - xC - C^2\,, \qquad \partial_c[y - xC - C^2] = -x - 2C = 0 \Rightarrow x = -2C$$

Por otro lado,

$$\left| \begin{array}{cc} -C & 1 \\ -1 & 0 \end{array} \right| = 1 \neq 0 \qquad \partial_{cc} f = -2 \neq 0\,,$$

La envolvente tiene entonces su forma paramétrica dada por

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y - xC - C^2 & = & 0 \\ x & = & -2C \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad y + \frac{x^2}{4} = 0 \quad \Rightarrow \quad y(x) = -\frac{x^2}{4}\,.$$