Aplicaciones

1. Algunas Aplicaciones de Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden

Modelar o describir matemáticamente un fenómeno es el fin último de la ciencias. Las matemáticas son el lenguaje de la física. ¿ Cómo describir el chisporroteo de una llama ? ¿ la textura de un pintura al oleo ? ¿ el tráfico en carreteras durante horas picos ? ¿ el titilar de las estrellas ? Describir matemáticamente estas situaciones no es fácil. Son fenómenos complejos y su descripción puede tener muchos grados de profundidad.

2. Ley de Malthus/Decaimiento Radioactivo.

Malthus[1]

$$\frac{d}{dx}y(x) = k\ y(x) \quad \left.\left\{ \begin{array}{l} k > 0 \\ k < 0 \end{array} \right. \quad y(0) = y_0 \right\} \Rightarrow y(t) = y_0\ e^{k\,t} \tag{1}$$

Para $k < 0$ tenemos una situación de decaimiento: la población decrece con el tiempo. Este concepto se utiliza los procesos de decaimiento radiactivo. El tiempo de vida media se define como el tiempo necesario para que la mitad de los núcleos decaigan, lo cual es independiente de la cantidad de la muestra y permite medir la edad de todo aquello que contenga isótopos radioactivos. En particular el C^{14} del cual se sabe que: tiene una vida media de 5730 años y que todos los organismos están (o estuvieron) formados por carbono. Por lo tanto, si sabemos el porcentaje de C^{14} en una muestra, digamos el 63 % podremos inferir su edad

$$y(0) = 1$$

$$y(5730) = \ e^{k\,5730} = \tfrac{1}{2}$$

Por lo tanto, despejando k

$$k = \frac{-\ln 2}{5730}$$

tendremos finalmente

$$y(t) = 2^{-t/5730}$$

[1] En honor al economista político inglés Thomas Robert Malthus (1766-1834). Quien fue uno de los primeros en darse cuenta que la población crece como una razón geométrica mientras que los medios de subsistencias crecen de manera aritmética. Esta afirmación plasmada en su *Ensayo sobre el Principio de Poblaciones,* el cual inspiró a Darwin en la formulación de principio de selección natural. Malthus, muy religioso y creyente pensaba que esa diferencia en el crecimiento de la población y las necesidades que ellas generaban, erán de procedencia divina y que forzaría a la humanidad a ser más laboriosa e ingeniosa para lograr los medios de subsistencia. Darwin, no tan religioso, lo formuló como una situación natural presente en todas las especies.

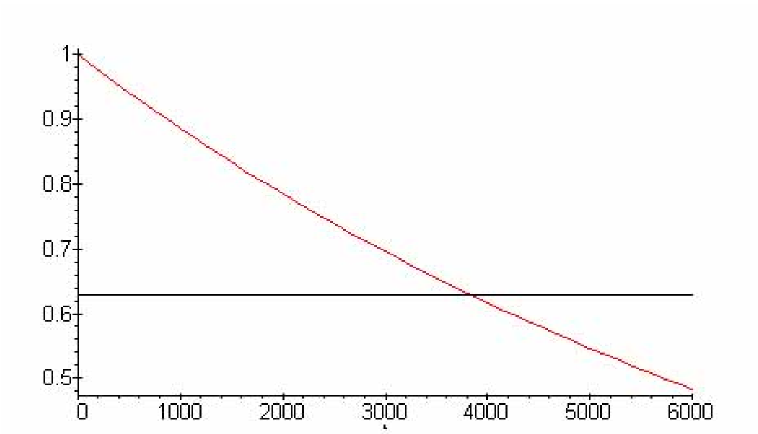

Figura 1: Decaimiento Radioactivo

de aquí obtendremos la edad en años de la muestra

$$y(t) = 0{,}63 \Rightarrow t = -\frac{\ln 0{,}63}{\ln 2} 5730 \approx 3819{,}48$$

Para $k > 0$ la ecuación 1 describe el incremento poblacional. El valor de k se calcula experimentalmente (promediando sus valores para cada uno de los parámetros).

Para la población venezolana $k = 0{,}018$

Población Venezolana (Millones Hab.)

Año	Población	$y(t) = 0{,}350\ \mathrm{e}^{0{,}018t}$
1800 (0)	0.350	0.350
1847 (47)	0.750	0.816
1873 (73)	1.000	1.302
1881 (81)	1.750	1.504
1891 (91)	2.100	1.801
1926 (126)	2.850	3.381
1936 (136)	3.200	4.048
1941 (141)	3.850	4.429
1950 (150)	4.350	5.208
1961 (161)	6.800	6.348
1971 (171)	10.800	7.600
1981 (181)	14.100	9.099

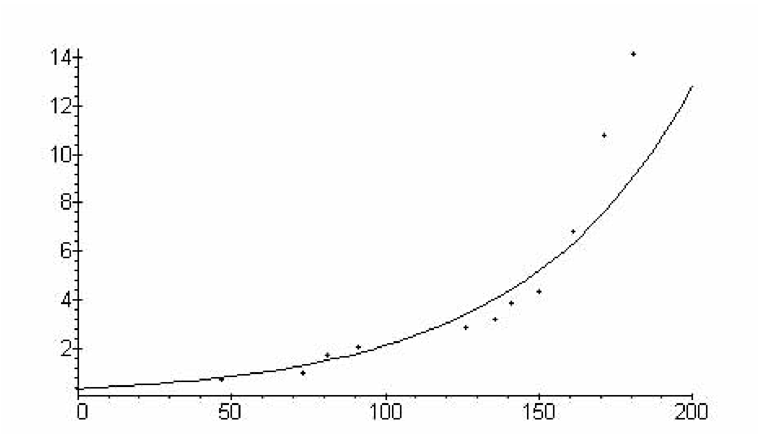

Figura 2: Población de Venezuela desde 1800

3. La Ecuación logística o Ley de Verhulst

Esta ecuacióon se utiliza para describir el crecimiento de la población de una manera más precisa que la Ley de Malthus. Esta ecuación toma en cuenta le decrecimiento de la población con el término $-y^2$

$$y' = (k - ay)\ y = ky - ay^2$$

donde k y a son constantes arbitrarias. Esta ecuación es separable y la solución tiene la forma de

$$\ln \left| \frac{y}{k - ay} \right| = k\ t + C$$

y por lo tanto

$$y(t) = \frac{k\ y_0}{a\ y_0 + (k - a\ y_0)\ e^{-k\,t}}$$

el crecimiento de la población venezolana desde 1800 puede modelarse con $k = 0{,}018$, $a = 0{,}001$

4. La Ley de Enfriamiento de Newton

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m) \qquad T(0) = T_0$$

la solución será

$$T = (T_0 - T_m)\ e^{k\,t} + T_m$$

y para el caso de una torta recien sacada del horno a una temperatura de $T_0 = 176°$, y una temperatura ambiente de $T_m = 23°$, con $T(80) = 63°$,la gráfica será también se puede modelar el

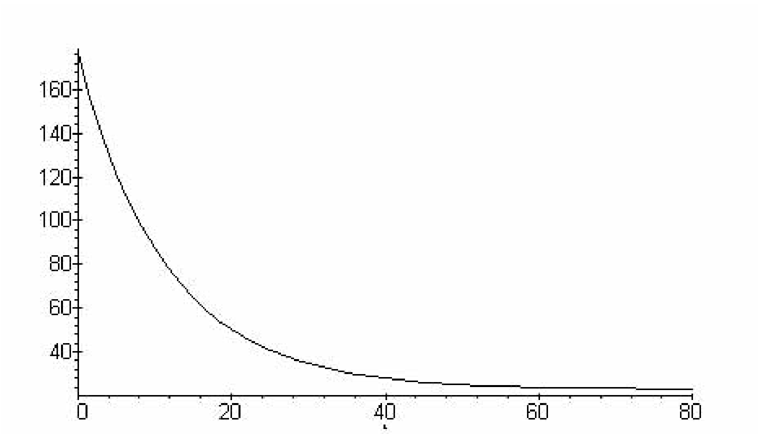

Figura 3: Enfriamiento de una torta recien horneada

enfriamiento con una temperatura del ambiente variable esto es

$$\frac{dT}{dt} = k\left[T - T_m(t)\right] \qquad T(0) = T_0$$

tómese, por ejemplo,

$$T_m(t) = 23 - 10\cos\left(\frac{\pi\ t}{12}\right) \qquad \text{con} \ \ 0 \leq t \leq 24 \text{ horas}$$

si $T(0) = 15^\circ$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{4}\left[T - 23 - 7\cos\left(\frac{\pi\ t}{12}\right)\right]$$

con la solución

$$T(t) = -\frac{-23\,\pi^2 + 11\,e^{-\frac{t}{4}}\pi^2 + 21\,\pi\ \mathrm{sen}(\frac{\pi\,t}{12}) + 63\ \cos(\frac{\pi\,t}{12}) - 207 + 36\,e^{-\frac{t}{4}}}{9 + \pi^2}$$

y la siguiente evolución

5. Interés Compuesto.

Otra de las aplicaciones de las ecuaciones diferenciales es en el cálculo del crecimiento del capital inicial, depositado en un banco C_0 durante un cierto lapso de tiempo y sujeto a un determinada tasa de interés. Luego del lapso de tiempo, el nuevo capital será

$$C_1 = C_0\left(1 + \frac{int}{100}\right)$$

Pasados dos lapsos (años) de tiempo el capital será

$$C_2 = C_1\left(1+\frac{int}{100}\right) = C_0\left(1+\frac{int}{100}\right)\left(1+\frac{int}{100}\right)$$

en t lapsos de tiempo,

$$C(t) = C_0\left(1+\frac{int}{100}\right)^t$$

Ahora bien, si el pago de los intereses se hace varias veces durante ese lapso, entonces tendremos

$$C_2 = C_1\left(1+\frac{int}{100\cdot 2}\right) = C_0\left(1+\frac{int}{100\cdot 2}\right)\left(1+\frac{int}{100\cdot 2}\right).$$

Finalmente, si el interés se paga k veces en cada lapso, entonces

$$C(t) = C_0\left(1+\frac{int}{100\cdot k}\right)^{kt}. \tag{2}$$

Si $k = 12$ entonces se tienen intereses pagaderos sobre saldos mensuales. En el caso de que $k = 365$, los intereses son pagaderos sobre saldos diarios. Nótese que si

$$k\to\infty \Rightarrow \left(1+\frac{int}{100\cdot k}\right)^{kt} \to e^{\frac{int}{100}\ t} \quad ;$$

entonces, podemos aproximar este modelo discreto de pagos sobre saldos por uno continuo, i.e.

$$C(t) = C_0 e^{\frac{int}{100}\ t} \quad\Leftrightarrow\quad C'(t) = \frac{int}{100}C(t).$$

Existen situaciones en las cuales los bancos, movidos por la competencia, ofrecen cancelar los intereses sobre un año hipotético de 360 días. En este caso, el capital crece como:

$$C(t) = C_0\left(1+\frac{int}{100\cdot 360}\right)^{365t}. \tag{3}$$

La siguiente tabla muestra una comparación del crecimiento del capital inicial $C_0 = 1$, en un lapso de 10 años, sujeto a intereses del 40 % sobre saldos diarios y siguiendo los tres modelos antes mencionados.

Años	$C(t) = C_0 e^{\frac{int}{100}\ t}$	$C(t) = C_0\left(1+\frac{int}{100\cdot k}\right)^{kt}.$	$C(t) = C_0\left(1+\frac{int}{100\cdot 360}\right)^{365t}$
0	1.0	1.0	1.0
1	1.491497997	1.491824698	1.499797972
2	2.224566275	2.225540928	2.249393957
3	3.317936142	3.320116923	3.373636494
4	4.948695110	4.953032424	5.059773172
5	7.380968843	7.389056099	7.588637542
6	11.00870024	11.02317638	11.38142320
7	16.41945436	16.44464677	17.06983543
8	24.48958329	24.53253020	25.60130455
9	36.52616442	36.59823444	38.39678465
10	54.47870107	54.59815003	57.58741975

6. Mecánica Elemental.

El estudio del movimiento de los cuerpos sometidos a la acción de un conjunto de fuerzas externas, fue una de las principales motivaciones para el planteamiento y solución de las ecuaciones diferenciales.

$$\sum_{externas} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t), t) = \frac{d\ m\mathbf{v}(t)}{dt} = m\ \mathbf{a}(t)\ , \tag{4}$$

para sistemas con $m = cte$ (partículas) y con $\mathbf{v}(t)$ la velocidad y $\mathbf{r}(t)$ la posición.

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}\ .$$

6.1. Movimientos con Acelaración Constante

Así en carreras de velocidad, en las cuales los autos tienen que generar el máximo posible de velocidad para una distancia dada tendremos, que la ecuación Newton 4 se expresa

$$cte = F = m\ \frac{dv(t)}{dt} \quad \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} v(t) = v_0 + \frac{F}{m}t \\ x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}\frac{F}{m}t^2 \end{array} \right\}$$

Los valores típicos para este caso son $v_0 = r_0 = 0$, $a = \frac{F}{m} = 9{,}8\ m/s^2$, y por lo tanto la velocidad final a los 400 m. es

$$v_f = \sqrt{2ax} \approx 89\ m/s = 320,4\ Km/h$$

6.2. Fricción en Fluidos

Por su parte, la descripción del movimiento de un paracaidista la ecuación 4 se convierte en

$$\sum_{externas} F(v(t)) = -mg + cv^2 = \frac{d\ p(t)}{dt} = m\frac{d\ v(t)}{dt} = m\ a(t)\ , \tag{5}$$

con c una constante arbitraria que depende de la forma del cuerpo. Integrando esta ecuación separable se obtiene

$$v(t) = -v_t\ \frac{1 - \exp\left(-\frac{2gt}{v_t}\right)}{1 + \exp\left(-\frac{2gt}{v_t}\right)} \tag{6}$$

Donde hemos definido la velocidad terminal

$$v_t = \sqrt{\frac{mg}{c}}$$

como la velocidad que anula la sumatoria de fuerzas y a partir de la cual el cuerpo cae sin aceleración. El tiempo que tarda en alcanzar esa velocidad es estrictamente para $t \longrightarrow \infty$, sin embargo, una buena aproximación que surge de la ecuación 6, la constituye: $t \gg v_t/2g$. La velocidad terminal típica en un día soleado para un paracaidista de 70 Kg., en posición de "águila extendida", es 54

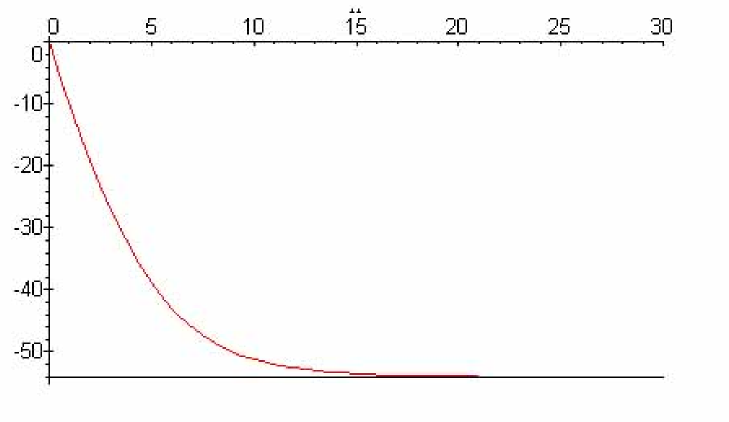

Figura 4: Velocidad del paracaidista en función del tiempo

m/s. (194,4 Km/h.) y por lo tanto alcanza la velocidad terminal luego de aproximadamente 15 s. esta situación se aprecia claramente en la figura 4.

Por su parte, la posición surge al integrar la ecuación 6

$$v(t) = \frac{dy(t)}{dt} = -v_t \, \frac{1 - \exp\left(-\frac{2gt}{v_t}\right)}{1 + \exp\left(-\frac{2gt}{v_t}\right)}$$

integrando esta ecuación obtendremos

$$y_0 - y(t) = v_t \left(t + \frac{v_t}{g} \ln \left(\frac{2}{\exp\left(-\frac{2gt}{v_t}\right) + 1} \right) \right) \tag{7}$$

Con el comportamiento gráfico que muestra la figura 5.

6.3. Fuerzas Elásticas

Otra situación muy conocida se presenta bajo la acción de fuerzas elásticas. Así, la ecuación 4, ahora se expresa como

$$\sum_{externas} F(x(t)) = -kx(t) \; = m \, \frac{dv(t)}{dt} = m \; a(t) \; ,$$

Utilizando la "regla de la cadena"

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{dv(t)}{dx(t)} \frac{dx(t)}{dt} = v(t) \; \frac{dv(t)}{dx(t)}$$

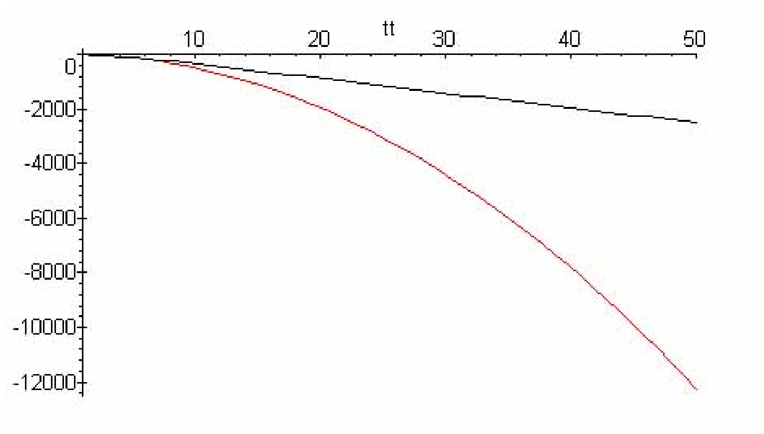

Figura 5: Posición del paracaidista respecto al tiempo

Se convierte en separable y se integra para obtener la velocidad

$$m\ v(t)^2 = -k\ x(t)^2 + C_1 \Rightarrow v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \sqrt{\frac{-k\ x(t)^2 + C_0}{m}} \tag{8}$$

La posición será

$$x(t) = C_1 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + C_2\right)$$

Para analizar el caso del lanzamiento de una flecha (23 g.) por una arco de 30 lb (134 N) el cual un arquero puede separarlo 0,72 m. se obtiene la velocidad de salida de la flecha como

$$v_f = d\sqrt{\frac{k}{m}} = 0,72\sqrt{\frac{\frac{134}{0,72}}{23 \times 10^{-3}}} = 65\ m/s$$

Es interesante mencionar que en 100 m la flecha baja una distancia de ≈ 11 m. ¡!

6.4. Sistemas de Masa Variable

Otro de los ejemplos interesantes es la evolución de sistemas de masa variable. El primero de los caso tiene que ver con una barca de masa m_0 que tiene una velocidad inicial v_0 en su navegar, comienza a llover y se va llenando de agua. El agua se acumula con una tasa σ (masa por unidad de tiempo). Se pide encontrar la velocidad de la barca como función del tiempo.

$$P = mv = const = m_0 v_0$$

si $\frac{dm}{dt} = \sigma = cont \Rightarrow m(t) = m_0 + \sigma t$ y consecuentemente

$$v(t) = v_0 \frac{m_0}{m_0 + \sigma t}$$

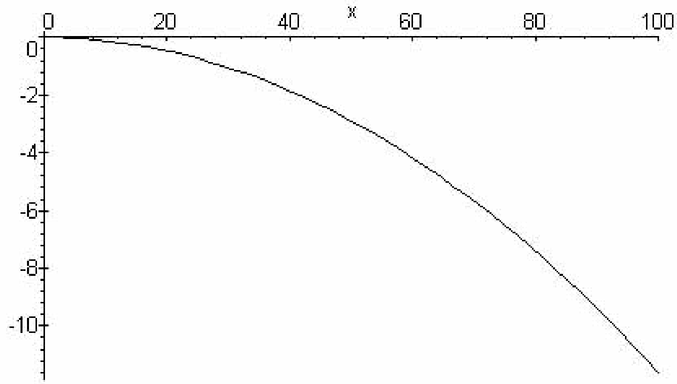

Figura 6: Trayectoria de la Flecha al abandonar el arco

Un segundo caso tiene que ver con una masa M atada a una cadena de densidad lineal de masa ρ. Esta masa se impulsa hacia arriba con una velocidad inicial v_0. Se pide encontrar el tiempo en que alcanza la altura máxima. La ecuación de Newton para este caso se puede expresar como

$$-Peso_{Masa} - Peso_{cadena} = \frac{d\,(mv)}{dt} \qquad \Leftrightarrow \qquad -Mg - \rho x g = \frac{dm}{dt} v + \frac{dv}{dt} m$$

o equivalentemente

$$-g\rho\xi = \frac{dp}{dt} \qquad \text{donde} \qquad \left\{ \begin{array}{c} \xi = \frac{M}{\rho} + x \\ \text{y} \\ p = mv = \rho\xi \frac{d\xi}{dt} \end{array} \right.$$

con lo cual

$$-g\rho\xi p = p\frac{dp}{dt} \qquad \Rightarrow \qquad -g\rho\xi m d\xi = pdp \qquad \Rightarrow \qquad -g\rho\xi\rho\xi d\xi = pdp$$

$$-\int_{\frac{M}{\rho}}^{\xi} g\rho^2\xi^2 d\xi = \int_{m_0 v_0}^{p} pdp \qquad \Rightarrow \qquad g\rho^2 \left(\frac{\xi^3}{3} - \frac{\left(\frac{M}{\rho}\right)^3}{3} \right) = \frac{p^2}{2} - \frac{(m_0 v_0)^2}{2}$$

$$t - t_0 = \int \frac{\rho\xi d\xi}{\sqrt{2g\rho^2 \left(\frac{\xi^3}{3} - \frac{\left(\frac{M}{\rho}\right)^3}{3} + \frac{(m_0 v_0)^2}{2} \right)}}$$

6.5. Un Cohete en Movimiento

Finalmente el caso más emblemático es el movimiemto de un cohete que consume una fracción importante de su combustible. Llamemos v la velocidad de cohete para un instante de tiempo t y v'

la velocidad de salida de los gases respecto a tierra. Para ese instante t la cantidad de movimiento del cohete es mv un instante dt más tarde la cantidad de movimiento será

$$p' = \underbrace{(m+dm)(v+dv)}_{cohete} + \underbrace{(-dm)v'}_{gases} = mv + m\ dv - dm\,\underbrace{(v'-v)}_{vel.\ rel.}$$

Entonces el cambio en la cantidad de movimiento será

$$dp = p' - p = mdv - v_{gases}\ dm$$

y por lo tanto la ecuación de Newton

$$m(t)\frac{dv(t)}{dt} - v_{gases}\ \frac{dm}{dt} = \sum_{externas} F$$

Despreciando la resistencia del aire y suponiendo la gravedad constante, tendremos

$$\frac{dv(t)}{dt} - \frac{v_{gases}}{m}\ \frac{dm}{dt} = -g$$

integrando

$$v = v_0 + v_{gases} \ln\left(\frac{m_i}{m(t)}\right) - gt$$

si suponemos que el combustible se quema de la forma

$$m(t) = m_i(1+\alpha t) \leftrightarrow \frac{dm}{dt} = \alpha = cte$$

La cantidad

$$E = v_{gases}\left|\frac{dm}{dt}\right|$$

se denomina el empuje del cohete.

7. Modelado de Concentración/Desliemiento de Soluciones

Otro de los problemas típicos donde se aplican exitosamente las ecuaciones diferenciales son los problemas de manejo de concentración de sustancias en soluciones líquidas. El principal objetivo, consiste en plantear el problema en término del problema de valores iniciales que gobierna el fenómeno (ecuación diferencial + condiciones iniciales). Para ello, en este tipo de problemas, siempre utilizaremos la regla intuitiva de

$$\text{Tasa de Cambio de la Concentración} = \text{ Tasa de Ingreso} - \text{ Tasa de Egreso}$$

Así, tendremos que para un problema típico en el cual inicialmente se encuentran diluidos en un recipiente (un tanque) y_0 gr de una sustancia en V_0 litros de un líquido. A este tanque le cae otro líquido con una concentraci[on distinta de la misma sustancia a $v_{entrada}$ lit/min, mientras

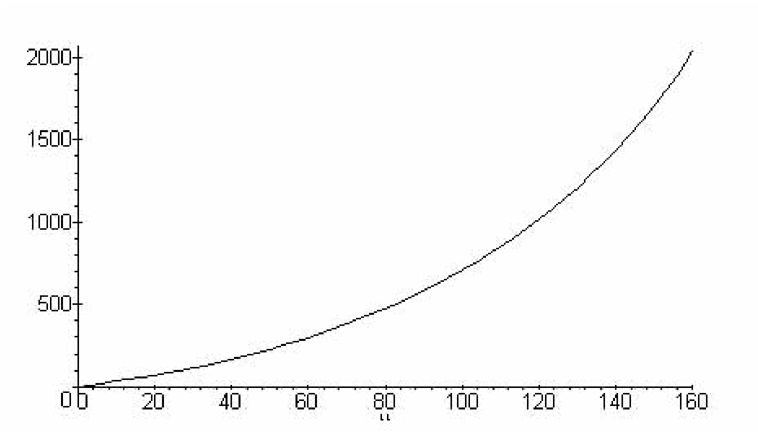

Figura 7: Velocidad del Cohete

que v_{salida} lit/min salen del tanque. Si suponemos que dentro del tanque sucede algún proceso de homogenización de la solución, la pregunta típica esque queremos saber la cantidad de sustancia que se encuentra en el tanque en un tiempo t. A la concentraciíon de la sustancia en el líquido de entrada (gr/lit), en un tiempo t, la denotaremos como $C(t)$ gr/lit. La figura (9) ilustra este proceso.

Para empezar notemos que, en esta situación el volumen no es constante. Por lo tanto, con el mismo espíritu de la "ley de balanceo" que hemos propuesto, si las velocidades de ingreso y egreso son constantes, nos queda que la variación del volumen inicial viene dada por la diferencia de estas velocidades, esto es

$$V'(t) = v_{\text{entrada}} - v_{\text{salida}} \Rightarrow V(t) = V_0 + (v_{\text{entrada}} - v_{\text{salida}})\,t$$

con lo cual también hemos integrado una ecuación diferencial para encontrar como variaría el volumen con el tiempo.

Para la construcción de la ecuación diferencial, procedemos de manera similar y si describimos la cantidad de sustancia en el tanque como $y(t)$, nos queda que la tasa de cambio de la cantidad de sustancia en el tanque será

$$y'(t) = \underbrace{v_{\text{entrada}}\left(\frac{\text{lit}}{\text{mín}}\right) C(t)\left(\frac{\text{gr}}{\text{lit}}\right)}_{\text{Tasa de Ingreso}} - \underbrace{v_{\text{salida}}\left(\frac{\text{lit}}{\text{mín}}\right)\left(\frac{y(t)}{V_0 + (v_{\text{entrada}} - v_{\text{salida}})\,t}\frac{\text{gr}}{\text{lit}}\right)}_{\text{Tasa de Egreso}}$$

Por lo tanto la ecuación diferencial tomará la forma típica de una ecuación diferencial lineal de primer orden inhomogénea

$$y'(t) + y(t)\frac{v_{\text{sal}}}{V_0 + (v_{\text{ent}} - v_{\text{sal}})\,t} = v_{\text{ent}}C(t)$$

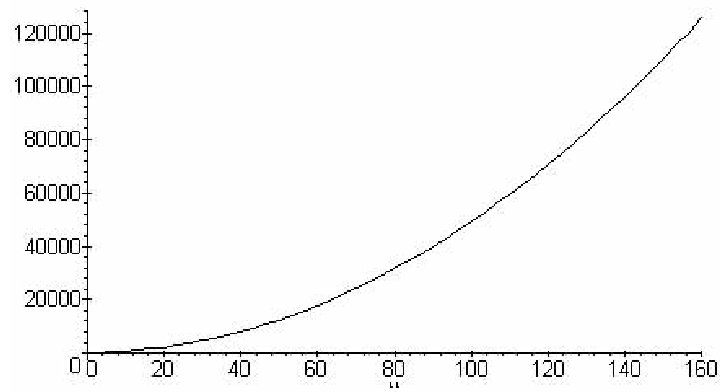

Figura 8: Posición del Cohete

que tendrá por solución

$$y(t) = \underbrace{\frac{y_0}{(-V_0)^{-\left(\frac{v_{\text{sal}}}{v_{\text{ent}} - v_{\text{sal}}}\right)}} \left((-v_{\text{ent}} + v_{\text{sal}})\, t - V_0\right)^{\left(\frac{-v_{\text{sal}}}{v_{\text{ent}} - v_{\text{sal}}}\right)}}_{\text{Respuesta a las Condiciones iniciales}}$$

$$\underbrace{- \left((-v_{\text{ent}} + v_{\text{sal}})\, t - V_0\right)^{\frac{v_{\text{sal}}}{-v_{\text{ent}} + v_{\text{sal}}}} \int_0^t v_{\text{ent}}\, C(u) \left(u\,(v_{\text{ent}} - v_{\text{sal}}) + V0\right)^{\left(\frac{v_{\text{sal}}}{v_{\text{ent}} - v_{\text{sal}}}\right)} \mathrm{d}u}_{\text{Respuesta a la Exitaci[on externa}}$$

Nótese lo genérico de esta solución. Por un lado, la concentración de la sustancia, $C(t)$, en la solución que entra al sistema es distinta a la concentración de la sustancia presente en el tanque, más aún, puede ser variable con el tiempo. Por otro lado esta solución presenta una singularidad (un infinito) cuando la velocidad de ingreso es igual a la velocidad de egreso. Para este caso en el cual el volumen del tanque permanece constante tendremos que resolver la ecuación diferencial

$$y'(t) + y(t)\, \frac{v_{\text{sal}}}{V_0} = v_{\text{ent}} C(t) \Rightarrow y(t) = \left(\int_0^t C(u)\, v_{\text{entrada}}\, e^{\left(\frac{v_{\text{salida}}\, u}{V}\right)} \mathrm{d}u + y0 \right) e^{-\frac{v_{\text{salida}}\, t}{V}}$$

Tal y como hemos mencionado varias veces (y seguiremos mencionando) la solución general para una ecuación diferencial inhomogénea se compone de dos soluciones, la solución de la ecuación diferencial homgénea más la solución de la inhomogéna.

$$y_{\text{general}}(x) = y_{\text{homog[enea}}(x) + y_{\text{inhomog[enea}}(x)$$

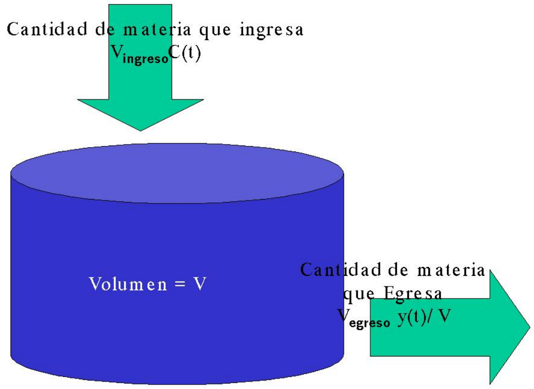

Figura 9: Soluciones y tanques

Este ejemplo nos permite constatar el sentido cada una de estas soluciones, vale decir

$$y(t) = \underbrace{y0e^{-\frac{v_{salida}\,t}{V}}}_{\text{Respuesta a las Condiciones Iniciales}} + \underbrace{e^{-\frac{v_{salida}\,t}{V}} \int_0^t C(u)\, v_{entrada}\, e^{\left(\frac{v_{salida}\,u}{V}\right)} \mathrm{d}u}_{\text{Respuesta a la Exitaci[on externa}}$$

En esta es una visión que debemos conservar, en general para todas las ecuaciones lineales inhomogéneas independientes del orden de la ecuación diferencial, así recordando, dada una ecuación diferencial y su solución tal que se cumple la condición inicial $y(0) = y_0$ entonces siempre es posible

$$\frac{d}{dx} y(x) + p(x)\, y(x) = g(x) \Leftrightarrow y(x) = \underbrace{y_0 e^{\int_0^x -p(u)du}}_{\text{soluci[on homg[enea}} + \underbrace{e^{\int_0^x -p(u)du} \int_0^x g(u)\, e^{\int p(u)du} du}_{\text{Soluci[on inhomog[enea}}$$

donde ahora vemos claramente que la solución de la homogénea da cuenta a las condiciones iniciales del proceso y la solución de la inhomogénea provee la respuesta a la exitación externa al sistema.

Este comportamiento de las soluciones es útil si nos planteamos que al tratar de “limpiar” una piscina, a la cual le hemos añadido el doble de la cantidad de sulfatos permitida, y queremos saber cuanto tiempo tenemos que mantener abierta una entrada de 120 lits/min de agua sin sulfatos y la salida de la piscina que responde a 60 lits/min. La piscina en cuestión tiene 20 m de longitud, 10 m de ancho y 2 m de profundidad. Siguiendo los pasos anteriormente planteados, tendremos que

$$y'(t) + y(t)\left(\frac{v_{\text{sal}}}{V_0 + (v_{\text{ent}} - v_{\text{sal}})\, t}\right) = 0 \Rightarrow y'(t) + y(t)\left(\frac{60\left(\frac{\text{lit}}{\text{mín}}\right)}{4\times 10^5 \text{lit} + (120-60)\, t \left(\frac{\text{lit}}{\text{mín}}\right)}\right) = 0$$

$$y'(t) + y(t)\left(\frac{60\left(\frac{\text{lit}}{\text{mín}}\right)}{4\times 10^5\text{lit} + 60\left(\frac{\text{lit}}{\text{mín}}\right)t}\right) = 0 \Rightarrow y(t) = 20000\frac{y_0}{3t+20000}$$

donde el volumen es $V = 400m^3 = 400\,(100cm)^3 = 4\times 10^8 cm^3 = 4\times 10^8\left(10^{-3}\text{lit}\right) = 4\times 10^5\text{lit}$.

Con lo cual el tiempo para que la cantidad final decaiga a la mitad de la inicial surge de

$$y_0 = 20000\frac{2y_0}{3t+20000} \Rightarrow t \approx 6{,}666,66 \text{ minutos !!!!!}$$