Ecuaciones Diferenciales Lineales de Orden Superior

1. Introducción

Vamos a estudiar algunos métodos para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias de orden mayor a 1, esto es, ecuaciones del tipo

$$\mathcal{F}[x, y(x), y'(x), y''(x), ..., y^{(n)}(x)] = 0 .$$

Primero estudiemos las lineales.

2. Ecuaciones Diferenciales Lineales de orden n

Una ecuación diferencial lineal de orden n, es una ecuación de la forma

$$f_n(x)y^{(n)}(x) + f_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + f_2(x)y''(x) + f_1(x)y'(x) + f_0(x)y(x) = Q(x) , \qquad (1)$$

donde $f_0(x), f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)$ y $Q(x)$ son funciones contínuas de x en un intervalo I y $f_n(x) \neq 0$.

Si $Q(x) \neq 0$ la E.D.O se denomina una E.D.O. Lineal de orden n inhomogénea. Si $Q(x) = 0$ se llama una E.D.O. Lineal de orden n homogénea.

Teorema Si $f_0(x), f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)$ y $Q(x)$ son todas funciones contínuas sobre un intervalo común I, y $f_n(x) \neq 0$ cuando $x \in I$, entonces la ecuación diferencial

$$f_n(x)y^{(n)}(x) + f_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + f_2(x)y''(x) + f_1(x)y'(x) + f_0(x)y(x) = Q(x) ,$$

tiene una y sólo una solución

$$y = y(x) ,$$

que satisface el conjunto de condiciones iniciales

$$y(x_0) = y_0 , \; y'(x_0) = y_1 , \; y''(x_0) = y_2 , ...y^{(n)}(x_0) = y_{n-1} .$$

Donde $x_0 \in I$ y $y_0, y_1, y_2, ...y_{n-1}$ son constantes.

Estudiemos algunas propiedades

1. La ecuación diferencial homogénea asociada a la ecuación (1), es decir, cuando $Q(x) = 0$:

$$f_n(x)y^{(n)}(x) + f_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + f_2(x)y''(x) + f_1(x)y'(x) + f_0(x)y(x) = 0 , \qquad (2)$$

tienen n soluciones linealmente independientes: $y_1(x), y_2(x), y_3(x), ..., y_n(x)$.

2. La combinación lineal de esas soluciones

$$y_h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + c_3 y_3(x) + \cdots + c_n y_n(x)$$

donde $c_1, c_2, c_3, ..., c_n$ son un conjunto de constantes arbitrarias, es también una solución de (2). De dice que se tiene una familia n-paramétrica de soluciones de la ecuación (2).

3. La función

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)\,,$$

donde $y_p(x)$ es una solución particular de la ecuación diferencial inhomogénea (1), es una familia n-paramétrica de soluciones de la ecuación (1).

4. Si $y_p(x)$ es una solución particular de (1), entonces $\alpha y_p(x)$ es una solución de (1) si reemplazamos $Q(x)$ por $\alpha Q(x)$.

5. Si $y_{p1}(x)$ es una solución de:

$$f_n(x)y^{(n)}(x) + f_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + f_2(x)y''(x) + f_1(x)y'(x) + f_0(x)y(x) = Q_1(x)$$

y $y_{p2}(x)$ es una solución de

$$f_n(x)y^{(n)}(x) + f_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + f_2(x)y''(x) + f_1(x)y'(x) + f_0(x)y(x) = Q_2(x)$$

entonces $y_p(x) = y_{p1}(x) + y_{p2}(x)$ es una solucón de

$$f_n(x)y^{(n)}(x) + f_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + f_2(x)y''(x) + f_1(x)y'(x) + f_0(x)y(x) = Q_1(x) + Q_2(x)\,.$$

Esta propiedad se conoce como el Principio de Superposición.

6. Si $y_p(x) = u(x) + iv(x)$ es una solución de

$$f_n(x)y^{(n)}(x) + f_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + f_2(x)y''(x) + f_1(x)y'(x) + f_0(x)y(x) = R(x) + iC(x)\,,$$

entonces, la función $u(x)$ es una solución de

$$f_n(x)y^{(n)}(x) + f_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + f_2(x)y''(x) + f_1(x)y'(x) + f_0(x)y(x) = R(x)\,,$$

y la parte imaginaria $v(x)$ es una solución de

$$f_n(x)y^{(n)}(x) + f_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + f_2(x)y''(x) + f_1(x)y'(x) + f_0(x)y(x) = C(x)\,,$$

3. E.D.O.L. homogénea con coeficientes constantes

Por lo general, las ecuaciones del tipo (1) donde los coeficientes $f_0(x), f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)$ no presentan ningún tipo de restricción no tienen soluciones exactas. Recordemos que las soluciones exactas son aquellas que se pueden escribir en términos de funciones elementales. Sin embargo, si los coeficientes de (1) son todos constantes es posible obtener soluciones exactas.

Una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes es una ecuación de la forma

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_2 y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0\,, \tag{3}$$

donde $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ son constantes y $a_n \neq 0$.

Consideremos (o adivinemos!) que una posible solución a la ecuación (3) tiene la forma

$$y(x) = e^{mx}\,. \tag{4}$$

Ahora bien, que forma debe tener m para que (4) sea la solución de (3)?

Sustituyamos (4) en (3)

$$\begin{aligned} a_n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} e^{mx} &+ a_{n-1} \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}} e^{mx} + \cdots + a_2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} e^{mx} + a_1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} e^{mx} + a_0 e^{mx} \\ a_n m^n e^{mx} &+ a_{n-1} m^{n-1} e^{mx} + \cdots + a_2 m^2 e^{mx} + a_1 m e^{mx} + a_0 e^{mx} = 0 \\ a_n m^n &+ a_{n-1} m^{n-1} + \cdots + a_2 m^2 + a_1 m + a_0 = 0 \qquad (5) \end{aligned}$$

De esta manera hemos respondido a la pregunta: el valor de m que hace que (4) sea la solución de (3) es aquel valor que satisface ésta última ecuación algebraica de grado n. La ecuación (5) tendrá por lo menos n raíces que denotaremos por: $m_1, m_2, m_3, ..., m_n$. Esto significa que cada función $y_i(x) = e^{m_i x}$ con $i = 1, 2, 3...$ será una solución de (3).

La ecuación (5) se denomina *Ecuación Característica* de (3) y se obtiene de una manera muy sencilla simplemente intercambiando $y'(x)$ por m y el orden de la derivada por su correspondiente valor numérico. Por ejemplo:

$$5y''(x) + 3y'(x) + y(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 5m^2 + 3m + 1 = 0\,.$$

Al buscar las raices de la ecuación característica pueden ocurrir varios casos los cuales veremos a continuación.

3.1. Las raices de la ecuación característica son todas diferentes

Cuando las n raíces de la ecuación (5) son distintas entonces las n soluciones linealmente independientes de (3) se pueden escribir como:

$$y_1(x) = e^{m_1 x}\,, \quad y_2(x) = e^{m_2 x}\,, \quad y_3(x) = e^{m_3 x}\,, \quad \ldots \quad , y_n(x) = e^{m_n x}\,,$$

por lo tanto, la solución general de (3) será

$$y_h(x) = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} + c_3 e^{m_3 x} + \cdots + c_n e^{m_n x}$$

Ejemplo Encontrar la solución general de

$$y''' + 2y'' - y' - 2y = 0 \,.$$

La ecuación característica asociada a la ecuación diferencial es

$$m^3 + 2m^2 - m - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} m_1 = 1 \\ m_2 = -1 \\ m_3 = -2 \end{cases}$$

por lo tanto, la sulución general es:

$$y_h(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + c_3 e^{-3x} \,.$$

3.2. Las raices de la ecuación característica se repiten

Cuando la ecuación característica tiene una raíz $m = a$ que se repite k veces, entonces la solución general de (3) es

$$y_h(x) = \left(c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \cdots + c_n x^{k-1}\right) e^{ax}$$

Si la ecuación característica presenta raíces múltiples puede ser que la ecuación característica se pueda escribir como una colección de productos de términos, por ejemplo, supongamos que la ecuación característica se puede factorizar de la forma siguiente

$$m^2 (m-a)^3 (m+b)^4 (m+c) = 0 \,,$$

en este caso se tiene que las raíces son

$$\begin{array}{lcll} m &=& 0 \quad (2 \text{ veces}) & \rightarrow \quad y_1 = c_1 + c_2 x \\ m &=& a \quad (2 \text{ veces}) & \rightarrow \quad y_2 = \left(c_3 + c_4 x + c_5 x^2\right) e^{ax} \\ m &=& -b \quad (4 \text{ veces}) & \rightarrow \quad y_3 = \left(c_6 + c_7 x + c_8 x^2 + c_9 x^3\right) e^{-bx} \\ m &=& -c \quad (1 \text{ vez}) & \rightarrow \quad y_4 = c_{10} e^{-cx} \end{array}$$

La solución general será entonces

$$y_h(x) = c_1 + c_2 x + \left(c_3 + c_4 x + c_5 x^2\right) e^{ax} + \left(c_6 + c_7 x + c_8 x^2 + c_9 x^3\right) e^{-bx} + c_{10} e^{-cx} \,.$$

Ejemplo Encontrar la solución general de

$$y'''' - 3y'' + 2y' = 0 \,.$$

La ecuación característica asociada a la ecuación diferencial es

$$m^4 - 3m^2 + 2m = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} m_1 = 0 \\ m_2 = 1 \\ m_3 = 1 \\ m_4 = -2 \end{cases}$$

la solución será

$$y_h(x) = c_1 + (c_2 + c_3 x)\, e^x + c_4 e^{-2x}\,.$$

Puede suceder también que las raíces resultantes sean números complejos. En este caso es bueno notar que si lo coeficientes de la ecuación característica son todos reales, entonces las raíces imaginarias que puedan aparecer lo harán en la forma de pares conjugados, es decir, que si $a+ib$ es una raíz entonces $a-ib$ también lo será. Supongamos por un momento que $m_1 = a+ib$ y $m_2 = a-ib$ son dos raíces de la ecuación característica, entonces la solución de la ecuación diferencial de segundo orden asociada será:

$$y_h(x) = c_1 e^{(a+ib)x} + c_2 e^{(a-ib)x} = c_1 e^{ax} e^{ibx} + c_2 e^{ax} e^{-ibx} = e^{ax}\left[c_1 e^{ibx} + c_2 e^{-ibx}\right]$$

si utilizamos la fórmula de Euler

$$\begin{aligned} y_h(x) &= e^{ax}\left[c_1\{\cos(bx) + i\mathrm{sen}(bx)\} + c_2\{\cos(bx) - i\mathrm{sen}(bx)\}\right] \\ &= e^{ax}\left[(c_1 + c_2)\cos(bx) + i(c_1 - c_2)\,\mathrm{sen}(bx)\right] \\ &= e^{ax}\left[\mathcal{C}_1 \cos(bx) + i\,\mathcal{C}_2\,\mathrm{sen}(bx)\right] \end{aligned}$$

lo que viene a ser una segunda manera de escribir la solución de la ecuación diferencial.

Ejemplo 1.- Encontrar la solución general de

$$y'''' + 2y'' + 1 = 0\,.$$

La ecuación característica asociada a la ecuación diferencial es

$$m^4 + 2m^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(m^2+1\right)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} m_1 = i \\ m_2 = i \\ m_3 = -i \\ m_4 = -i \end{cases}$$

la solución será entonces de la forma

$$y_h(x) = (c_1 + c_2 x)e^{ix} + (c_3 + c_4 x)e^{-ix}\,.$$

2.- Encontrar la solución general de

$$y''' - 8y'' + 22y' - 20y = 0\,.$$

La ecuación característica asociada es

$$m^3 - 8m^2 + 22m - 20 = 0 \quad \Rightarrow \quad (m-2)\left(m^2 - 6m + 10\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} m_1 = 2 \\ m_2 = 3+i \\ m_3 = 3-i \end{cases}$$

la solución será:

$$\begin{aligned} y_h(x) &= c_1 e^{2x} + c_2 e^{(3+i)x} + c_3 e^{(3-i)x} \\ &= c_1 e^{2x} + e^{3x}\left[c_2 e^{ix} + c_3 e^{-ix}\right] \\ &= c_1 e^{2x} + e^{3x}\left[\mathcal{C}_2 \cos(x) + i\,\mathcal{C}_3\,\mathrm{sen}(x)\right]\,. \end{aligned}$$

4. E.D.O.L. no homogénea con coeficientes constantes

Anteriormente vimos que la solución general de la ecuación diferencial

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_2 y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = Q(x)\,,$$

se puede escribir como

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)\,,$$

donde $y_h(x)$ es la solución de la ecuación diferencial homogénea asociada a la inhomogéna, es decir, cuando $Q(x) = 0$; y $y_p(x)$ es una solución particular de la ecuación diferencial no homogénea. Como ya sabemos de un método para resolver la homogénea queda preguntarse como se hace para calcular una solución particular. Veamos algunos métodos.

4.1. El método de los coeficientes indeterminados

Este método se utiliza si la función $Q(x)$ esta conformada por funciones que tienen un número finito de derivadas linealmente independientes, es decir, que $Q(x)$ contenga únicamente términos del tipo: a, x^k, e^{ax}, $\operatorname{sen}(ax)$, $\cos(ax)$ y combinaciones lineales lineales de tales términos. Por ejemplo, si $Q(x) = \operatorname{sen}(ax)$ podemos construir un conjunto con las derivadas sucesivas

$$\left\{a\cos(ax)\,,\,-a^2\operatorname{sen}(ax)\,,\,-a^3\cos(ax)\,,\,a^4\operatorname{sen}(ax)\ldots\right\}$$

pero de este conjunto infinito únicamente las funciones: $\{\operatorname{sen}(ax)\,,\,a\cos(ax)\}$ son linealmente independientes. Otros ejemplos son:

$$\begin{array}{ccc} x^3 & \rightarrow & \left\{3x^2\,,\,6x\,,\,6\right\} \\ \dfrac{1}{x} & \rightarrow & \left\{-\dfrac{1}{x^2}\,,\,\dfrac{2}{x^3}\,,\,-\dfrac{6}{x^4}\,,\ldots\right\} \end{array}$$

Es bueno recordar que si se tiene un conjunto de funciones: $f_1, f_2, f_3, \ldots$ y cada una de esas funciones tiene derivadas del orden $n-1$, entonces estas funciones son linealmente independientes, en un intervalo común, si el Wronskiano es diferente de cero. Para el ejemplo anterior tenemos

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \operatorname{sen}(ax) & \cos(ax) \\ a\cos(ax) & -a\operatorname{sen}(ax) \end{vmatrix} &= -a\operatorname{sen}^2(ax) - a\cos^2(ax) \\ &= -a\left[\operatorname{sen}^2(ax) + \cos^2(ax)\right] = -a \neq 0\,. \end{aligned}$$

Volviendo al punto que tiene que ver con la búsqueda de $y_p(x)$, para el método de los coeficientes indeterminados necesitamos comparar los términos de $Q(x)$ con los de $y_h(x)$ y pueden resultar los siguientes casos

Caso 1 La funciones $Q(x)$ y $y_h(x)$ no contienen términos en común. En este caso, se construye una solución particular $y_p(x)$ con el conjunto conformado por $Q(x)$ y todas sus derivadas linealmente independientes.

Ejemplo Encuentre la solución general de

$$y'' + 4y' + 4y = 4x^2 + 6e^x \,.$$

Si resolvemos la ecuación homogénea: $y'' + 4y' + 4y = 0$, encontraremos que

$$y_h(x) = (c_1 + c_2 x)e^{-2x}$$

Queda claro que $Q(x)$ y $y_h(x)$ no contienen términos en común. La solución particular la construiremos de esta manera:

$$Q(x) \quad \rightarrow \quad \underbrace{\{x^2\,,\, x\,,\, 1\}}_{4x^2} \quad \cup \quad \underbrace{\{e^x\}}_{e^x}$$

No vamos a tomar en cuenta las constantes. La solución particular será una combinación lineal de los elementos que resultan de la unión de esos conjuntos

$$y_p(x) = Ax^2 + Bx + C + De^x$$

donde las constantes A, B, C, D tendrán que ser determinadas.

Una vez que la solución es propuesta, pues no queda más que derivar y sustituir en la ecuación diferencial problema:

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= 2Ax + B + De^x \\ y_p''(x) &= 2A + De^x \end{aligned}$$

Al sustituir en la ecuación diferencial resulta

$$\begin{aligned} [2A + De^x] + 4\,[2Ax + B + De^x] + 4\left[Ax^2 + Bx + C + De^x\right] &= 4x^2 + 6e^x \\ 4Ax^2 + [8A + 4B]\,x + [2A + 4B + 4C] + 9De^x &= 4x^2 + 6e^x \end{aligned}$$

igualando coeficientes

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 4A &=& 4 \\ 8A + 4B &=& 0 \\ 2A + 4B + 4C &=& 0 \\ 9D &=& 6 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad A = 1\,,\; B = -2\,,\; C = \frac{3}{2}\,,\; D = \frac{2}{3}\,,$$

por lo tanto, la solución general es

$$y(x) = (c_1 + c_2 x)e^{-2x} + x^2 - 2x + \frac{3}{2} + \frac{2}{3}e^x$$

Ejercicio Encuentre la solución general de

$$y'' - 3y' + 2y = 2xe^{3x} + 3\,\mathrm{sen}\,(x)\,.$$

Caso 2 Los términos de $Q(x)$ aparecen como x^k veces un término de la solución $y_h(x)$, donde k es un entero positivo. Esto es, si la función $y_h(x)$ contiene un término, digamos $u(x)$, tal que un término de $Q(x)$ es $x^k u(x)$ entonces una solución particular se puede construir con una combinación lineal de $x^{k+1}u(x)$ y todas las derivadas linealmente independientes. En todo lo anterior se ignoran las constantes. Si $Q(x)$ contienen términos que cumplen con el Caso 1 estos también deben ser agregados a la solución particular.

Ejemplo Encuentre la solución general de

$$y'' - 3y' + 2y = 2x^2 + 3e^{2x}\,.$$

Si resolvemos la ecuación homogénea: $y'' - 3y' + 2y = 0$, encontraremos que

$$y_h(x) = c_1 e^x + c_2 \underbrace{e^{2x}}_{u(x)}$$

Notemos que

$$Q(x) = 2x^2 + 3\underbrace{e^{2x}} \quad \to \quad e^{2x} = x^0 e^{2x} \quad \to \quad k = 0\,.$$

La solución particular se puede construir a partir del siguiente conjunto:

$$\underbrace{\left\{xe^{2x}\,,\, e^{2x}\right\}}_{x^{0+1}e^{2x}} \quad \cup \quad \underbrace{\left\{x^2\,,\, x\,,\, 1\right\}}_{x^2}$$

Del primer conjunto no tomamos en cuenta el término e^{2x} porque éste ya aparece en $y_h(x)$. Por lo tanto, la solución particular será una combinación lineal de los elementos que resultan de la unión de esos conjuntos

$$y_p(x) = Ax^2 + Bx + C + Dxe^{2x}$$

Derivando y sustituyendo en la ecuación diferencial problema:

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= 2Ax + B + 2Dxe^{2x} + De^{2x} \\ y_p''(x) &= 2A + 4Dxe^{2x} + 4De^{2x} \end{aligned}$$

Al sustituir en la ecuación diferencial resulta

$$\begin{aligned} \left[2A + 4Dxe^{2x} + 4De^{2x}\right] - 3\left[2Ax + B + 2Dxe^{2x} + De^{2x}\right] + 2\left[Ax^2 + Bx + C + Dxe^{2x}\right] &= 2x^2 + 3e^{2x} \\ 2Ax^2 + [2B - 6A]\,x + [2A - 3B + 2C] + De^{2x} &= 2x^2 + 3e^{2x} \end{aligned}$$

igualando coeficientes

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2A & = & 2 \\ 2B-6A & = & 0 \\ 2A-3B+2C & = & 0 \\ D & = & 3 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad A=1\,,\; B=3\,,\; C=\frac{7}{2}\,,\; D=3\,,$$

por lo tanto, la solución general es

$$y(x) = c_1e^x + c_2e^{2x} + x^2 + 3x + \frac{7}{2} + 3xe^{2x}\,.$$

Ejercicio Encuentre la solución general de

$$y'' - 3y' + 2y = xe^{2x} + \operatorname{sen}(x)\,.$$

Caso 3 Este caso se aplica si se cumplen las siguientes condiciones

1. La ecuación característica de la ecuación diferencial homogénea tiene una raíz multiple que se repite r veces.
2. $Q(x)$ contiene un término que es x^k veces un término $u(x)$ de la solución $y_h(x)$. La función $u(x)$ se obtiene de la raíz múltiple.

En este caso, la solución particular será una combinación lineal de $x^{k+r}u(x)$ y todas las derivadas linealmente independientes. Si además $Q(x)$ contiene términos que correspondan al Caso 1 estos deben agregarse.

Ejemplo Encuentre la solución general de

$$y'' + 4y' + 4y = 3xe^{-2x}\,.$$

Si resolvemos la ecuación homogénea: $y'' + 4y' + 4y = 0$, encontraremos que

$$y_h(x) = c_1e^{-2x} + c_2x\underbrace{e^{-2x}}_{u(x)} \quad \rightarrow \quad m_1=-2\,,\, m_2=-2 \quad \rightarrow \quad r=2$$

Notemos que

$$Q(x) = 3\underbrace{xe^{-2x}} \quad \rightarrow \quad xe^{-2x} = x^1e^{-2x} \quad \rightarrow \quad k=1\,.$$

La solución particular se puede construir a partir del siguiente conjunto:

$$\underbrace{\left\{x^3e^{-2x}\,,\, x^2e^{-2x}\,,\, xe^{-2x}\,,\, e^{-2x}\right\}}_{x^{1+2}e^{-2x}}$$

No tomamos en cuenta los términos $\left\{xe^{-2x}\,,\,e^{-2x}\right\}$ porque estos ya aparecen en $y_h(x)$. Por lo tanto, la solución particular será la siguiente combinación lineal

$$y_p(x) = Ax^3e^{-2x} + Bx^2e^{-2x}$$

Derivando y sustituyendo en la ecuación diferencial problema:

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= -2Ax^3e^{-2x} + 3Ax^2e^{-2x} - 2Bx^2e^{-2x} + 2Bxe^{-2x} \\ y_p''(x) &= 4Ax^3e^{-2x} - 12Ax^2e^{-2x} + 6Axe^{-2x} + 4Bx^2e^{-2x} - 8Bxe^{-2x} + 2Be^{-2x} \end{aligned}$$

Al sustituir en la ecuación diferencial resulta

$$\begin{aligned} \left[4Ax^3e^{-2x} - 12Ax^2e^{-2x} + 6Axe^{-2x} + 4Bx^2e^{-2x} - 8Bxe^{-2x} + 2Be^{-2x}\right] &\quad + \\ 4\left[-2Ax^3e^{-2x} + 3Ax^2e^{-2x} - 2Bx^2e^{-2x} + 2Bxe^{-2x}\right] + 4\left[Ax^3e^{-2x} + Bx^2e^{-2x}\right] &= 3xe^{-2x} \\ 6Axe^{-2x} + 2Be^{-2x} &= 3xe^{-2x} \end{aligned}$$

igualando coeficientes

$$\left\{\begin{aligned} 6A &= 3 \\ 2B &= 0 \end{aligned}\right. \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{2}\,,\, B = 0\,,$$

por lo tanto, la solución general es

$$y(x) = c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x} + \frac{1}{2}x^3e^{-2x}\,.$$

Ejercicio Encuentre la solución general de

$$y'' - 3y' + 2y = 6e^{-x}\,.$$