Ecuaciones Diferenciales Lineales - Continuación

1. Soluciones para E.D.O.L no homogéneas

Vamos a continuar con el estudio de los métodos para resolver ecuaciones del tipo:

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_2 y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = Q(x)\,, \tag{1}$$

donde $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ son constantes y $a_n \neq 0$.

El método de los coeficientes indeterminados, para encontrar una solución particular de (1), esta limitado por la condición de que la función $Q(x)$ sea una función con la que se pueda construir un conjunto finito de derivadas linealmente independientes. Estudiemos un método que quita esta restricción.

2. Método de la variación de parámetros

Por simplicidad, para desarrollar este método vamos a considerar el caso $n = 2$, luego veremos como generalizar al caso de orden n. Es decir, vamos a estudiar la ecuación

$$a_2 y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = Q(x)\,, \quad a_2 \neq 0\,, \tag{2}$$

donde $Q(x)$ es una función continua y diferente de cero. Si $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son un par de soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial homogénea asociada a (2), es decir, de la ecuación

$$a_2 y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0\,, \tag{3}$$

entonces, vamos a proponer que una solución particular de la ecuación (2) es de la forma:

$$y_p(x) = u_1(x) y_1(x) + u_2(x) y_2(x)\,, \tag{4}$$

donde $u_1(x)$ y $u_2(x)$ son dos funciones a determinar.

Derivando:

$$\begin{aligned}
y_p'(x) &= u_1'(x)y_1(x) + u_1(x)y_1'(x) + u_2'(x)y_2(x) + u_2(x)y_2'(x) \\
&= \left[u_1(x)y_1'(x) + u_2(x)y_2'(x)\right] + \left[u_1'(x)y_1(x) + u_2'(x)y_2(x)\right] \\
y_p''(x) &= u_1''(x)y_1(x) + u_1'(x)y_1'(x) + u_1'(x)y_1'(x) + u_1(x)y_1''(x) \\
&+ u_2''(x)y_2(x) + u_2'(x)y_2'(x) + u_2'(x)y_2'(x) + u_2(x)y_2''(x) \\
&= \left[u_1(x)y_1''(x) + u_2(x)y_2''(x)\right] + \left[u_1'(x)y_1'(x) + u_2'(x)y_2'(x)\right] + \left[u_1'(x)y_1(x) + u_2'(x)y_1(x)\right]'
\end{aligned}$$

y sustituyendo en (2) resulta:

$$\begin{aligned}
a_2\left[u_1(x)y_1''(x) + u_2(x)y_2''(x)\right] &+ a_2\left[u_1'(x)y_1'(x) + u_2'(x)y_2'(x)\right] + a_2\left[u_1'(x)y_1(x) + u_2'(x)y_2(x)\right]' + \\
a_1\left[u_1(x)y_1'(x) + u_2(x)y_2'(x)\right] &+ a_1\left[u_1'(x)y_1(x) + u_2'(x)y_2(x)\right] + a_0\left[u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)\right] = Q(x)
\end{aligned}$$

acomodando términos:

$$u_1(x)\overbrace{\left[a_2y_1''(x)+a_1y_1'(x)+a_0y_1(x)\right]}^{=0} \;+\; u_2(x)\overbrace{\left[a_2y_2''(x)+a_1y_2'(x)+a_0y_2(x)\right]}^{=0}+$$
$$a_2\left[u_1'(x)y_1'(x)+u_2'(x)y_2'(x)\right] \;+\; a_2\left[u_1'(x)y_1(x)+u_2'(x)y_2(x)\right]'+a_1\left[u_1'(x)y_1(x)+u_2'(x)y_2(x)\right]=Q(x)$$

Es claro que lo que tenemos es una ecuación con dos incógnitas: $u_1'(x)$ y $u_2'(x)$, pero como lo que estamos buscando es una solución particular podemos tomar de esta última ecuación el siguiente caso:

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_1'(x)y_1(x)+u_2'(x)y_2(x) & = & 0 \\ \\ u_1'(x)y_1'(x)+u_2'(x)y_2'(x) & = & \dfrac{Q(x)}{a_2} \end{array}\right.$$

La solución de este sistema es

$$u_1'(x)=\frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ \frac{Q(x)}{a_2} & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}}=G_1(x)\,, \qquad u_2'(x)=\frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & \frac{Q(x)}{a_2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}}=G_2(x)$$

Integrando y omitiendo las constantes de integración:

$$u_1(x)=\int G_1(x)\,\mathrm{d}x\,, \quad u_2(x)=\int G_2(x)\,\mathrm{d}x$$

por lo tanto, la solución general resulta ser

$$y(x)=C_1\,y_1(x)+C_2\,y_2(x)+u_1(x)\,y_1(x)+u_2(x)\,y_2(x)\,.$$

Si la ecuación diferencial es de orden n, se puede demostrar que

$$y_p(x)=u_1(x)y_1(x)+u_2(x)y_2(x)+\cdots+u_n(x)y_n(x)$$

será una ecuación particular de la ecuación no homogénea, donde $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ son las n soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial homogénea.

Sustituyendo la ecuaci'on para la solución particular y siguiendo el mismo procedimiento que para el caso de orden 2 se tendrá que resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_1'(x)y_1(x)+u_2'(x)y_2(x)+\cdots+u_n'(x)y_n(x) & = & 0 \\ \\ u_1'(x)y_1'(x)+u_2'(x)y_2'(x)+\cdots+u_n'(x)y_n'(x) & = & 0 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots & = & \vdots \\ u_1'(x)y_1^{(n-1)}(x)+u_2'(x)y_2^{(n-1)}(x)+\cdots+u_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) & = & \dfrac{Q(x)}{a_n} \end{array}\right.$$

Ejemplo Encuentre la solución general de

$$y'' - 3y + 2y = \text{sen}\left(e^{-x}\right)$$

Cuando se resuelve la ecuación diferencial homogénea asociada a la ecuación diferencial del problema se tiene

$$y'' - 3y + 2y = 0 \quad \Rightarrow \quad y_h(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}\,,$$

por lo tanto: $y_1 = e^x$ y $y_2 = e^{2x}$. Como ya hicimos el desarrollo para $n = 2$ podemos ir directamente al sistema resultante:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u_1'(x)e^x + u_2'(x)e^{2x} & = & 0 \\ u_1'(x)e^x + 2u_2'(x)e^{2x} & = & \dfrac{\text{sen}\,(e^{-x})}{1} \end{array} \right.$$

Al querer resolver el sistema resulta:

$$u_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{2x} \\ \text{sen}\,(e^{-x}) & 2e^{2x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{vmatrix}} = \frac{-e^{2x}\text{sen}\,(e^{-x})}{e^{3x}}\,, \qquad u_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & \text{sen}\,(e^{-x}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{vmatrix}} = \frac{e^x\text{sen}\,(e^{-x})}{e^{3x}}$$

Integrando por partes:

$$u_1(x) = \int \frac{-e^{2x}\text{sen}\,(e^{-x})}{e^{3x}}\,\mathrm{d}x = -\cos\left(e^{-x}\right)\,, \quad u_2(x) = \int \frac{e^x\text{sen}\,(e^{-x})}{e^{3x}}\,\mathrm{d}x = -\text{sen}\left(e^{-x}\right) + e^{-x}\cos\left(e^{-x}\right)$$

La solución particular es entonces:

$$y_p(x) = -\cos\left(e^{-x}\right)e^x + \left[-\text{sen}\left(e^{-x}\right) + e^{-x}\cos\left(e^{-x}\right)\right]e^{2x} = -e^{2x}\text{sen}\left(e^{-x}\right)\,,$$

por lo tanto, la solución general resulta ser

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} - e^{2x}\text{sen}\left(e^{-x}\right)$$

Ejercicios Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales

1. $$y'' + 4y' + 4y = 3xe^{-2x}$$

2. $$y'' + y' = \tan(x)\,, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

3. Método de reducción del orden (Coeficientes no constantes)

Ahora vamos a desarrollar un método para resolver ecuaciones diferenciales lineales:

$$f_n(x)y^{(n)}(x) + f_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + f_2(x)y''(x) + f_1(x)y'(x) + f_0(x)y(x) = Q(x)\,, \tag{5}$$

donde $f_0(x), f_1(x), \ldots, f_n(x)$ y $Q(x)$ sun funciones contínuas de x en un intervalo común I, además $f_n(x) \neq 0$.

Primero que todo, debemos poder encontrar una solución (no trivial) de la ecuación diferencial homogénea asociada a (5)

$$f_n(x)y^{(n)}(x) + f_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + f_2(x)y''(x) + f_1(x)y'(x) + f_0(x)y(x) = 0\,. \tag{6}$$

Consideremos, por simplicidad, el caso $n = 2$:

$$f_2(x)y''(x) + f_1(x)y'(x) + f_0(x)y(x) = Q(x)\,. \tag{7}$$

y sea $y_1(x)$ una solución (no trivial) de la ecuación diferencial homogénea asociada a (8):

$$f_2(x)y''(x) + f_1(x)y'(x) + f_0(x)y(x) = 0\,. \tag{8}$$

El método permitirá encontrar una segunda solución de la ecuación homogénea y también una solución particular de (7).

Sea $y_2(x)$ una segunda solución de la ecuación diferencial homogénea y vamos a suponer que tiene la forma

$$y_2(x) = y_1(x)\int u(x)\mathrm{d}x\,, \tag{9}$$

donde $u(x)$ es una función a determinar. Por lo tanto:

$$y_2'(x) = y_1(x)u(x) + y_1'(x)\int u(x)\mathrm{d}x \tag{10}$$

$$y_2''(x) = y_1(x)u'(x) + 2y_1'(x)u(x) + y_1''(x)\int u(x)\mathrm{d}x \tag{11}$$

sustituyendo en (8) resulta:

$$f_2(x)\left[y_1(x)u'(x) + 2y_1'(x)u(x) + y_1''(x)\int u(x)\mathrm{d}x\right] + f_1(x)\left[y_1(x)u(x) + y_1'(x)\int u(x)\mathrm{d}x\right] + f_0(x)\left[y_1(x)\int u(x)\mathrm{d}x\right] = 0$$

$$\left[f_2(x)y_1''(x) + f_1(x)y_1'(x) + f_0(x)y_1(x)\right]\int u(x)\mathrm{d}x + f_2(x)y_1(x)u'(x) + \left[2f_2(x)y_1'(x) + f_1(x)y_1(x)\right]u(x) = 0$$

Como el primer término de la última ecuación es idénticamente igual a cero, entonces:

$$f_2(x)y_1(x)u'(x) + \left[2f_2(x)y_1'(x) + f_1(x)y_1(x)\right]u(x) = 0\,,$$

acomodando términos

$$\frac{\mathrm{d}u}{u}+2\frac{\mathrm{d}y_1(x)}{y_1(x)}=-\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad \int\frac{\mathrm{d}u}{u}+2\int\frac{\mathrm{d}y_1(x)}{y_1(x)}=-\int\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\mathrm{d}x$$

esto es:

$$\begin{aligned}
\ln|u(x)|+2\ln|y_1(x)| &= -\int\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\mathrm{d}x \\
\ln|u(x)(y_1(x))^2| &= -\int\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\mathrm{d}x \\
u(x)(y_1(x))^2 &= \exp\left[-\int\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\mathrm{d}x\right] \\
u(x) &= \frac{1}{(y_1(x))^2}\exp\left[-\int\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\mathrm{d}x\right]
\end{aligned}$$

Por lo tanto, si logramos integrar esta última ecuación estaremos encontrando una segunda solución linealmente independiente de (8):

$$y_2(x)=y_1(x)\int\frac{1}{(y_1(x))^2}\exp\left[-\int\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}x\,. \tag{12}$$

Ejemplo Encontrar la solución general de

$$x^2y''+xy'-y=0\,,$$

donde $y_1=x$ es una solución de la ecuación diferencial y $x\neq 0$.

Como esta ecuación es de orden 2, podemos ir directamente a la ecuación (12) en lugar de hacer el desarrollo nuevamente

$$y_2(x)=x\int\frac{1}{x^2}\exp\left[-\int\frac{x}{x^2}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}x=x\int\frac{1}{x^2}\exp\left[-\ln|x|\right]\mathrm{d}x=x\int\frac{1}{x^3}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2x}$$

por lo tanto:

$$y_h(x)=C_1x+C_2\frac{1}{x}\,.$$

Si queremos encontrar una solución paricular de la ecuación no homogénea (7) también podemos utilizar la solución de prueba (9). Repitiendo los cálculos resultará:

$$\begin{aligned}
f_2(x)y_1(x)u'(x)+\left[2f_2(x)y_1'(x)+f_1(x)y_1(x)\right]u(x) &= Q(x) \\
u'(x)+\left[2\frac{y_1'(x)}{y_1(x)}+\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right]u(x) &= \frac{Q(x)}{f_2(x)y_1(x)}
\end{aligned}$$

y esta ecuación es simplemente una ecuación diferencial lineal de primer orden para $u(x)$. Esto significa que debemos encontrar el factor integrador

$$\mu(x)=e^{\int\left[2\frac{y_1'(x)}{y_1(x)}+\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right]\mathrm{d}x}$$

para luego escribir la solución:

$$u(x) = \frac{1}{\mu(x)} \int \mu(x) \frac{Q(x)}{f_2(x) y_1(x)} \mathrm{d}x + \frac{C}{\mu(x)} \,.$$

Ejemplo Encuentre la solución general de

$$x^2 y'' + x y' - y = x \,,$$

En el ejemplo anterior vimos que para la ecuación homogénea tenemos dos soluciones linealmente independientes:

$$x^2 y'' + x y' - y = 0 \quad \Rightarrow \quad y_1(x) = x \,, \; y_2(x) = x^{-1}$$

Podemos entonces proponer la siguiente solución particular para la ecuación diferencial no homogénea:

$$y_p(x) = x \int u(x) \mathrm{d}x \,,$$

En lugar de repetir los cálculos que consisten en derivar $y_p(x)$ un par de veces y sustituir en la ecuación diferencial problema, podemos ir directamente al grano pues ya sabemos el resultado, esto es:

$$u'(x) + \left[2\frac{1}{x} + \frac{x}{x^2} \right] u(x) = \frac{x}{x^3} \quad \Rightarrow \quad u'(x) + \frac{3}{x} u(x) = \frac{1}{x^2}$$

el factor integrador para esta ecuación es

$$\mu(x) = e^{\int \frac{3}{x} \mathrm{d}x} = e^{\ln |x|^3} = x^3$$

por lo tanto:

$$u(x) = \frac{1}{x^3} \int \frac{x^3}{x^2} \mathrm{d}x + \frac{C}{x^3} \quad \Rightarrow \quad u(x) = \frac{1}{x^3} \int x \mathrm{d}x + \frac{C}{x^3} \quad \Rightarrow \quad u(x) = \frac{1}{x^3} \frac{x^2}{2} + \frac{C}{x^3}$$

Como lo que queremos es una solución particular podemos omitir la constante de integración, es decir:

$$u(x) = \frac{1}{2x}$$

y la solución particular es entonces

$$y_p(x) = x \int \frac{1}{2x} \mathrm{d}x = \frac{x}{2} \ln |x|$$

La solución general de la ecuación diferencial es entonces:

$$y(x) = C_1 x + C_2 x^{-1} + \frac{x}{2} \ln |x| \,.$$

Ejercicios Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales

1. $$x^2y'' + xy' - 4y = x^3\,, \quad y_1(x) = x^2$$

2. $$x^2y'' + xy' - y = x^2e^{-x}\,, \quad y_1(x) = x$$

4. La ecuación de Euler

La ecuación inhomogénea de Cauchy[1]-Euler[2]

$$a_0\ y(x) + a_1\ x\ y'(x) + \cdots + a_n\ x^n\ y^{(n)}(x) = \mathcal{F}(x)$$

con los $a_i = ctes$, puede ser resuelta por este método. Consideremos una ecuación de orden 2

$$c\ y(x) + b\ x\ y'(x) + a\ x^2\ y''(x) = \mathcal{F}(x)$$

La solución de la homogénea se propone como $y_h = x^m$ por lo tanto

$$\begin{aligned} c\ y(x) + b\ x\ y'(x) + a\ x^2\ y''(x) &= 0 \\ c\ x^m + b\ x\ mx^{m-1} + a\ x^2\ m(m-1)x^{m-2} &= 0 \\ x^m\left(c + bm + am(m-1)\right) &= 0 \end{aligned}$$

por lo tanto

$$am^2 + (b-a)m + c = 0$$

con

$$m = \frac{-(b-a) \pm \sqrt{(b-a)^2 - 4ac}}{2a}$$

por lo tanto

1. Si $m_1 \neq m_2$ y ambas reales, entonces la solución de la homogénea será

$$y_h = C_1x^{m_1} + C_2x^{m_2}$$

2. Si $m_1 = m_2$ y ambas reales, entonces la solución de la homogénea será

$$y_h = x^{m_1}\left(C_1 + C_2\ \ln x\right)$$

[1]**Louis Augustin Baron de Cauchy** (1789-1857). Matemático francés, uno de los creadores del análisis matemático moderno. Estudió, entre otras cuestiones, los criterios de convergencia de series, las funciones de variable compleja y los sistemas de ecuaciones diferenciales

[2]**Leonhard Euler** (1707-1783). Matemático suizo. Destacó en el estudio de diversas cuestiones del cálculo logarítmico y diferencial, así como de las series algebraicas y la trigonometría.

3. Si $m_1 = \overline{m}_2 = \alpha + i\beta$, entonces la solución de la homogénea será

$$y_h = x^{\alpha}\left(C_1 \cos(\beta \;\ln x) + C_2 \;\mathrm{sen}(\beta \;\ln x)\right)$$

Ahora para lograr la solución de la inhomogénea suponemos el caso $m_1 \neq m_2$ por lo tanto

$$y_{1h} = x^{m_1} \quad y_{2h} = x^{m_2}$$

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x^{m_2} \\ \frac{\mathcal{F}(x)}{a\;x^2} & m_2\;x^{m_2-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x^{m_1} & x^{m_2} \\ m_1\;x^{m_1-1} & m_2\;x^{m_2-1} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x^{m_2} \\ \frac{\mathcal{F}(x)}{a\;x^2} & m_2\;x^{m_2-1} \end{vmatrix}}{W(y_1, y_2)} = \mathcal{G}_1(x)$$

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} x^{m_1} & 0 \\ m_1\;x^{m_1-1} & \frac{\mathcal{F}(x)}{a\;x^2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x^{m_1} & x^{m_2} \\ m_1\;x^{m_1-1} & m_2\;x^{m_2-1} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} x^{m_1} & 0 \\ m_1\;x^{m_1-1} & \frac{\mathcal{F}(x)}{a\;x^2} \end{vmatrix}}{W(y_1, y_2)} = \mathcal{G}_2(x)$$

La siguiente ecuación diferencial

$$x^2 y'' - xy' + 5y = \frac{1}{x}$$

tiene como solución de la homogénea

$$y_h = x\;\left(C_1 \cos(2\;\ln x) + C_2\;\mathrm{sen}(2\;\ln x)\right)$$

la solución particular por el método de variación de los parámetros queda como

$$y_p = u_1(x)\;y_{h1} + u_2(x)\;y_{h2}$$

calculando los coeficientes respectivos en donde el Wronskiano

$$W\left(x\;\cos(2\;\ln x);\;x\;\mathrm{sen}(2\;\ln x)\right) = 2x$$

por lo cual los coeficientes quedan

$$u_1 = \int \mathcal{G}_1(x)\;dx = \int \frac{x\mathrm{sen}(2\ln x)\frac{1}{x}}{2x}dx = \frac{1}{4}\cos(2\ln x)$$

$$u_2 = \int \mathcal{G}_2(x)\;dx = \int \frac{x\cos(2\ln x)\frac{1}{x}}{2x}dx = \frac{1}{4}\mathrm{sen}(2\ln x)$$

finalmente las solución particular será

$$y_p = x\left(\frac{1}{4}\cos^2(2\ln x) + \frac{1}{4}\mathrm{sen}^2(2\ln x)\right) = \frac{1}{4}x$$

y la general

$$y = x\;\left(C_1 \cos(2\;\ln x) + C_2\;\mathrm{sen}(2\;\ln x)\right) + \frac{1}{4}x$$