Algunas Aplicaciones de las Ecuaciones de Orden Superior Parte 1

1. Mecánica y Electricidad

Una de las más famosas ecuaciones diferenciales, lineales, ordinaria con coeficientes constantes es

$$\alpha\ \ddot{u} + \beta\ \dot{u} + \gamma\ u \equiv \alpha\ \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} + \beta\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \gamma\ u = \Lambda\left(t\right)$$

La cual utiliza para describir sistemas mecánicos y toma la forma

$$m\ \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \eta\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + k\ x = F\left(t\right) \qquad \text{donde} \quad \left\{ \begin{array}{ccl} x & \Rightarrow & \text{Desplazamiento} \\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} & \Rightarrow & \text{Velocidad} \\ m & \Rightarrow & \text{masa} \\ \eta & \Rightarrow & \text{Constante de Amortiguamiento} \\ k & \Rightarrow & \text{Constante Elástica} \\ F\left(t\right) & \Rightarrow & \text{Fuerza Aplicada} \end{array} \right.$$

y circuitos eléctricos

$$L\ \frac{\mathrm{d}^2 Q}{\mathrm{d}t^2} + R\ \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}\ Q = E\left(t\right) \qquad \text{donde} \quad \left\{ \begin{array}{ccl} Q & \Rightarrow & \text{Carga Eléctrica} \\ \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = I & \Rightarrow & \text{Intensidad de Corriente} \\ L & \Rightarrow & \text{Inductancia} \\ R & \Rightarrow & \text{Resistencia} \\ C & \Rightarrow & \text{Capacitancia} \\ E\left(t\right) & \Rightarrow & \text{Fuerza Electromotriz} \end{array} \right.$$

Analicemos la ecuación que describe sistemas mecánicos y dejamos la cual describe sistemas eléctricos para un análisis posterior. El primero de los casos a analizar será el de las oscilaciones libres, vale decir $F\left(t\right) = 0$, lo cual en el lenguaje de las ecuaciones diferenciales se traduce a ecuaciones diferenciales homogéneas. En contraste, si $F\left(t\right) \neq 0$, es decir, el caso inhomogéneo, estaremos describiendo oscilaciones forzadas.

2. Oscilaciones libres

Analicemos pues del caso del oscilador armónico libre, i.e.

$$m\ \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + k\ x = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x\left(t\right) = C_1 \cos\left(\omega_0 t\right) + C_2 \operatorname{sen}\left(\omega_0 t\right) \qquad \text{con} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

ω_0 se denomina la frecuencia natural de oscilación y C_1 y C_2 las constantes de integración que se determinan de las condiciones iniciales. Es claro que

$$\text{si} \quad \left\{ \begin{array}{l} C_1 = A\cos\delta \\ C_2 = A\operatorname{sen}\delta \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad x\left(t\right) = C_1 \cos\left(\omega_0 t\right) + C_2 \operatorname{sen}\left(\omega_0 t\right) \quad \Leftrightarrow \quad x\left(t\right) = A\cos\left(\omega_0 t + \delta\right)$$

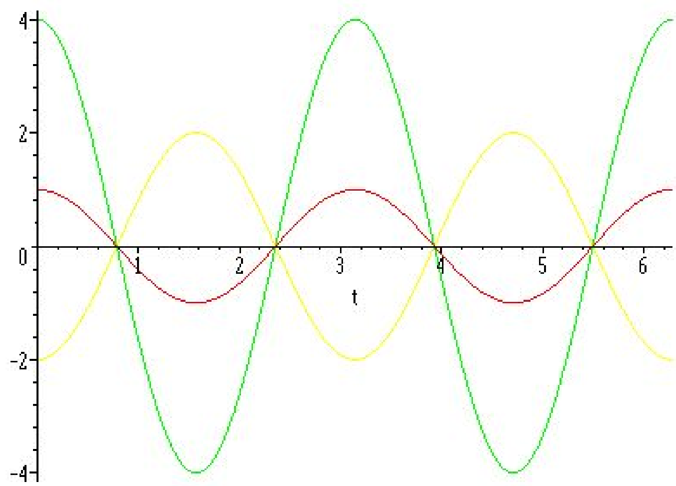

Figura 1: Oscilador armónico libre. Cambios en la posición inicial no afectan la frecuencia natural.

con R la amplitud y δ en ángulo de fase. Obviamente, el período del movimiento será

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Ejemplo Como un ejemplo analicemos el caso de un sistema en el cual $m = 0{,}1$ Kg. y $k = 0{,}4$ N/m En este caso la frecuencia angular $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 2$ rad/sg. La ecuación diferencial que describe este movimiento será

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 4\,x = 0 \quad \wedge \quad \left\{ \begin{array}{lll} x\left(0\right) = 1; & \left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = 0; & \Rightarrow \quad x\left(t\right) = \cos(2t) \\ x\left(0\right) = 4; & \left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = 0 & \Rightarrow \quad x\left(t\right) = 4\cos\left(2t\right) \\ x\left(0\right) = -2; & \left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = 0 & \Rightarrow \quad x\left(t\right) = -2\cos\left(2t\right) \end{array} \right.$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 4\,x = 0 \quad \wedge \quad \left\{ \begin{array}{lll} x\left(0\right) = 0; & \left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = 1; & \Rightarrow \quad x\left(t\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}(2t) \\ x\left(0\right) = 0; & \left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = 4; & \Rightarrow \quad x\left(t\right) = 2\,\mathrm{sen}\left(2t\right) \\ x\left(0\right) = 0; & \left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = -2 & \Rightarrow \quad x\left(t\right) = -\,\mathrm{sen}\left(2t\right) \end{array} \right.$$

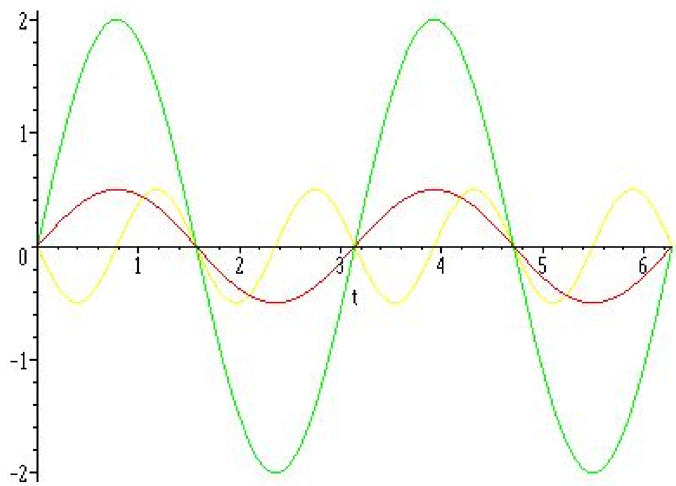

Figura 2: Oscilador Armónico Libre. Cambios de velocidad incial no afectan la frecuencia natural

3. Oscilaciones Libres Amortiguadas

Consideremos que en el movimiento actúa una fuerza de amortiguación proporcional a la velocidad, por lo cual el movimiento viene descrito por

$$m\,\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\eta\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+k\,x=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2\mu\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2\,x=0$$

la cual constituye una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden. Las raíces del polinomio característico asociado serán

$$r=\frac{-\eta\pm\sqrt{\eta^2-4km}}{2m}=-\frac{\eta}{2m}\pm\sqrt{\left(\frac{\eta}{2m}\right)^2-\frac{k}{m}}=-\mu\pm\sqrt{\mu^2-\omega_0^2}$$

por lo tanto la solución será

$$x\,(t)=C_1e^{\left(-\left(\mu+\sqrt{\mu^2-\omega_0^2}\right)t\right)}+C_2e^{\left(-\left(\mu-\sqrt{\mu^2-\omega_0^2}\right)t\right)}$$

de donde se deducen los siguientes casos

$$x\,(t)=C_1\,e^{r_1t}+C_2\,e^{r_2t}\qquad\Leftarrow\quad\mu^2-\omega_0^2>0\quad\text{Sobreamortiguado}$$

$$x\,(t)=(C_1+C_2\,t)\,e^{\mu\,t}\qquad\Leftarrow\quad\mu^2-\omega_0^2=0\quad\text{Crítico}$$

$$x\,(t)=e^{-\mu\,t}\left\{C_1\cos\left[\left(\sqrt{\omega_0^2-\mu^2}\right)t\right]+C_2\,\mathrm{sen}\left[\left(\sqrt{\omega_0^2-\mu^2}\right)t\right]\right\}\quad\Leftarrow\quad\mu^2-\omega_0^2<0\quad\text{Subamortiguado}$$

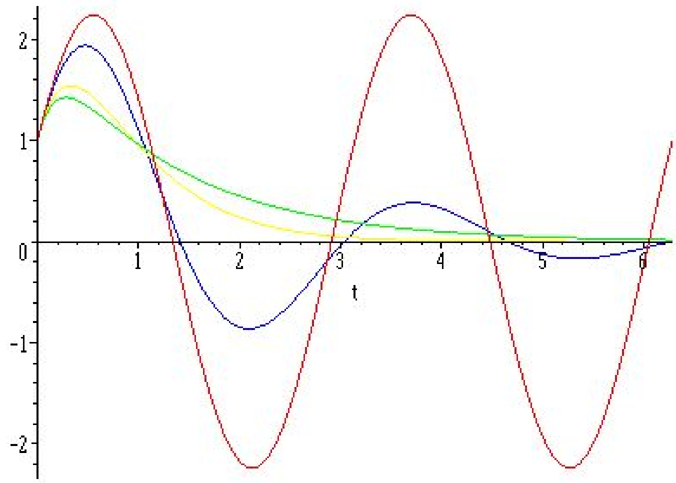

Figura 3: Oscilaciones libres amortiguadas y no amortiguadas. Nótese que el período es mayor para el caso subamortiguado

Ejemplo Como un ejemplo analicemos el mismo caso del sistema anterior en el cual $m = 0{,}1$ Kg. y $k = 0{,}4$ N/m, sólo que ahora la constante de amortiguamiento será $\eta = 0{,}60, 0{,}40$ y $0{,}15$ En todos los caso la frecuencia angular $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 2$ rad/sg. y la cantidad subradical $\left(\mu^2 - \omega_0^2\right)$ corresponderá a los tres casos anteriormente mencionados. Las ecuaciones diferenciales que describen este movimiento serán

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 6\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 4\,x = 0 \quad \wedge \quad \left\{ \begin{array}{c} x\left(0\right) = 0 \\ \\ \left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = 4 \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad x\left(t\right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{7}{2\sqrt{5}}\right) e^{\left(\sqrt{5}-3\right)t} + \left(\frac{1}{2} - \frac{7}{2\sqrt{5}}\right) e^{-\left(3+\sqrt{5}\right)t}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 4\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 4\,x = 0 \quad \wedge \quad \left\{ \begin{array}{c} x\left(0\right) = 0 \\ \\ \left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = 4 \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad x\left(t\right) = \left(1 + 6t\right) e^{-2t}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 4\,x = 0 \quad \wedge \quad \left\{ \begin{array}{c} x\left(0\right) = 0 \\ \\ \left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = 4 \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad x\left(t\right) = e^{-\frac{1}{2}t}\left[\frac{9}{\sqrt{15}}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right) + \cos\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right)\right]$$

Si en los casos anteriores cambiamos el signo de la velocidad inicial, i.e. $\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = -4$ m/s,

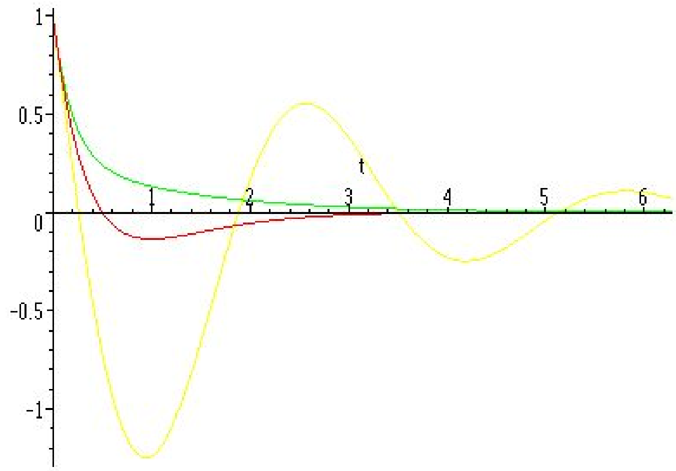

Figura 4: Oscilaciones Libres amortiguadas con cambio de signo en la velocidad inicial

tendremos la siguiente representación gráfica.

$$x\left(0\right)=1;\quad \left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=-4;\quad \Rightarrow\quad x\left(t\right)=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{5}}\right)e^{\left(\sqrt{5}-3\right)t}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{5}}\right)e^{-\left(3+\sqrt{5}\right)t}$$

$$x\left(0\right)=1;\quad \left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=-4;\quad \Rightarrow\quad x\left(t\right)=\left(1+2t\right)e^{-2t}$$

$$x\left(0\right)=1;\quad \left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=-4\quad \Rightarrow\quad x\left(t\right)=e^{-\frac{1}{2}t}\left[\frac{-7}{\sqrt{15}}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right)+\cos\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right)\right]$$

En todos los casos dado que $r_1, r_2 < 0$ se tiene que $x\left(t\rightarrow 0\right)\rightarrow 0$. El movimiento subamortiguado es periódico y el período viene descrito por

$$T_{am}=\frac{\frac{2\pi}{\omega_0}}{\sqrt{1-\left(\frac{\mu}{\omega_0}\right)^2}}=\frac{T}{\sqrt{1-\left(\frac{\mu}{\omega_0}\right)^2}}\qquad \text{si}\qquad \left(\frac{\mu}{\omega_0}\right)^2<<1\quad\Rightarrow\quad T_{am}\approx T\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{\omega_0}\right)^2\right)$$

el cual siempre sera mayor que el periodo de oscilación natural del sistema.

4. Oscilaciones Forzadas

Supongamos ahora que existe una fuerza aplicada al sistema tal que

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2\mu\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2\,x=\frac{F_0}{m}\cos\left(\varpi t\right)$$

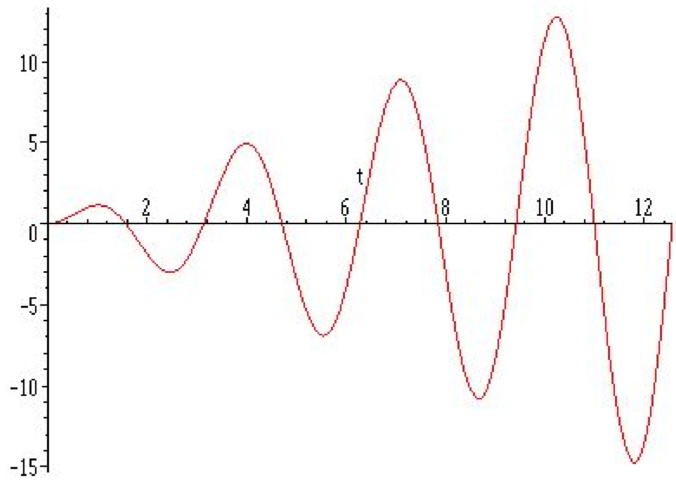

Figura 5: Oscilador armónico forzado con $\varpi = \omega_0^2$ Nótese el fenómeno de resonancia

4.0.1. Oscilaciones Forzadas no amortiguadas

En este caso $\mu = 0$ y por lo tanto

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2\, x = \frac{F_0}{m}\cos(\varpi t)$$

4.0.2. Amplitud modulada $\varpi \neq \omega_0$

y tendrá como solución

$$x(t) = \underbrace{C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \operatorname{sen}(\omega_0 t)}_{\text{homogénea}} + \underbrace{\frac{F_0}{m\left(\omega_0^2 - \varpi^2\right)}\cos(\varpi t)}_{\text{inhomogénea}} = A\cos(\omega_0 t + \delta) + \frac{F_0}{m\left(\omega_0^2 - \varpi^2\right)}\cos(\varpi t)$$

con lo cual es la suma de dos movimientos armónicos con distintas frecuencias y amplitudes. Si el cuerpo parte del reposo, esto es: $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ entonces

$$\left.\begin{array}{c} C_1 = \frac{-F_0}{m\left(\omega_0^2 - \varpi^2\right)} \\ \\ C_2 = 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad x(t) = \frac{F_0}{m\left(\omega_0^2 - \varpi^2\right)}\left[\cos(\varpi t) - \cos(\omega_0 t)\right]$$

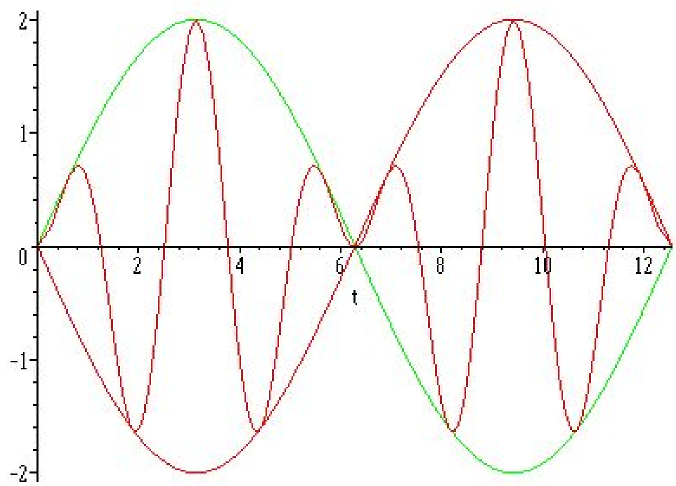

Figura 6: Oscilador armónico forzado. Nótese la envolvente de la función

dado que

$$\cos(\omega_0 t) = \cos\left[\left\{\left(\frac{\omega_0-\varpi}{2}\right)+\left(\frac{\omega_0+\varpi}{2}\right)\right\}t\right]$$

$$\cos(\omega_0 t) = \cos\left(\frac{\omega_0-\varpi}{2}\right)\cos\left(\frac{\omega_0+\varpi}{2}\right)-\operatorname{sen}\left(\frac{\omega_0-\varpi}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\omega_0+\varpi}{2}\right)$$

$$\cos(\varpi t) = \cos\left[\left\{\left(\frac{\omega_0-\varpi}{2}\right)-\left(\frac{\omega_0+\varpi}{2}\right)\right\}t\right]$$

$$\cos(\varpi t) = \cos\left(\frac{\omega_0-\varpi}{2}\right)\cos\left(\frac{\omega_0+\varpi}{2}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{\omega_0-\varpi}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\omega_0+\varpi}{2}\right)$$

$$x(t) = \underbrace{\frac{2F_0}{m\left(\omega_0^2-\varpi^2\right)}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\omega_0-\varpi}{2}t\right)\right]}_{\text{Envolvente}}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\omega_0+\varpi}{2}t\right)\right]$$

Ejemplo El mismo sistema anterior en el cual $m = 0{,}1$ Kg. y $k = 0{,}4$ N/m, cuando parte del reposo desde el origen de coordenadas y existe una fuerza de excitación $F = 0{,}5\cos(3t)$. Por lo tanto la ecuación diferencial que describe el movimiento sera

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+4\,x = 5\cos(3t) \qquad \left\{\begin{array}{c} x(0)=0 \\ \\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}=0 \end{array}\right\} \Longrightarrow x(t) = \underbrace{\cos(2t)}_{\text{homogénea}} - \underbrace{\cos(3t)}_{\text{inhomogénea}} \equiv \underbrace{2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}t\right)}_{\text{envolvente}}\operatorname{sen}\left(\frac{5}{2}t\right)$$

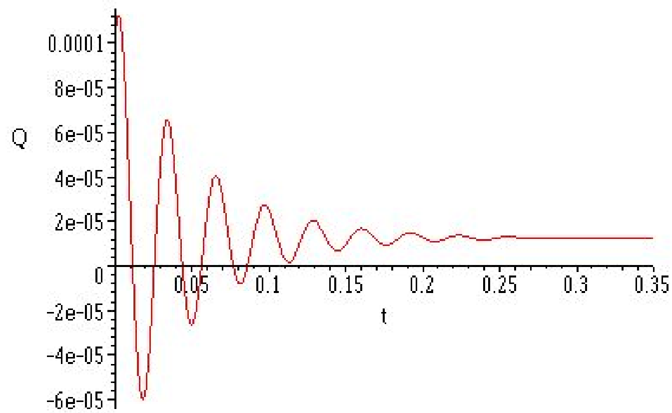

Figura 7: Carga en función del tiempo en un circuito RLC sometido a un voltaje constante. Nótese que el sistema alcanza el régimen estacionario cercano a los 0,3 sg

4.0.3. Resonancia $\varpi = \omega_0$

En el caso que la frecuencia de la fuerza de excitación coincida con la frecuencia natural del sistema, se tiene

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2\ x = F_0 \cos(\omega_0 t) \quad \Longrightarrow \quad x(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \operatorname{sen}(\omega_0 t) + \underbrace{\frac{F_0}{2m\omega_0} t}_{\text{envolvente}} \ \operatorname{sen}(\omega_0 t)$$

Ejemplo El sistema anterior ($m = 0{,}1$ Kg. y $k = 0{,}4$ N/m), cuando parte del reposo desde el origen de coordenadas y existe una fuerza de excitación $F = 0{,}5\cos(2t)$. Por lo tanto la ecuación diferencial que describe el movimiento sera

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 4\ x = 5\cos(2t) \quad \wedge \quad \left\{ \begin{array}{c} x(0) = 0 \\ \\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} = 0 \end{array} \right\} \quad \Longrightarrow \quad x(t) = \frac{5t}{4}\operatorname{sen}(2t)$$

5. Oscilaciones Forzadas amortiguadas

En este caso $\mu \neq 0$ y por lo tanto

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 2\mu\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\ x = \frac{F_0}{m}\cos(\varpi t)$$

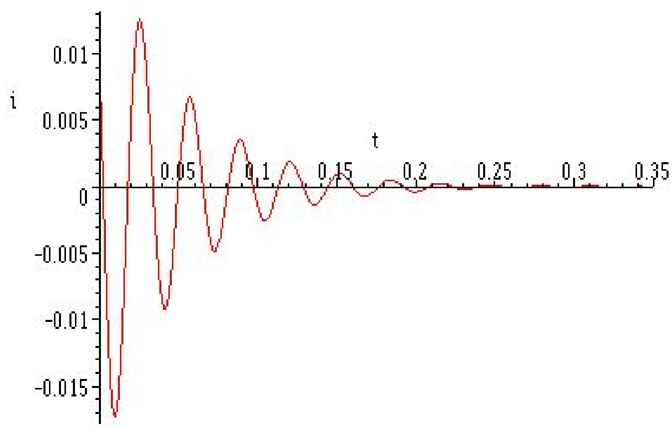

Figura 8: Intensidad en un circuito RLC sometido a un voltaje constante.

la cual tendrá como solución

$$x(t) = C_1 e^{\left(-\left(\mu+\sqrt{\mu^2-\omega_0^2}\right)t\right)} + C_2 e^{\left(-\left(\mu-\sqrt{\mu^2-\omega_0^2}\right)t\right)} + \frac{F_0}{m}\left(\frac{\left(\omega_0^2 \ - \varpi^2\right)\cos(\varpi t) + 2\mu\varpi \operatorname{sen}(\varpi t)}{\left(\omega_0^2 \ - \varpi^2\right)^2 + (2\mu\varpi)^2}\right)$$

una vez más se puede convertir en

$$x(t) = \underbrace{C_1 e^{\left(-\left(\mu+\sqrt{\mu^2-\omega_0^2}\right)t\right)} + C_2 e^{\left(-\left(\mu-\sqrt{\mu^2-\omega_0^2}\right)t\right)}}_{\text{solución homogéne} \equiv \text{régimen transitorio}} + \underbrace{\frac{F_0}{m}\frac{\cos(\varpi t - \zeta)}{\sqrt{\left(\omega_0^2 \ - \varpi^2\right)^2 + (2\mu\varpi)^2}}}_{\text{solución inhomogénea} \equiv \text{ régimen estacionario}}$$

donde

$$\cos(\zeta) = \frac{\left(\omega_0^2 \ - \varpi^2\right)}{\sqrt{\left(\omega_0^2 \ - \varpi^2\right)^2 + (2\mu\varpi)^2}} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}(\zeta) = \frac{2\mu\varpi}{\sqrt{\left(\omega_0^2 \ - \varpi^2\right)^2 + (2\mu\varpi)^2}}$$

Es claro que el término homogéneo en todos sus casos (sobreamortiguado, crítico y subamortiguado) tiende a cero, por ello se considera un término transitorio, no así el término inhomogéneo que permanece oscilando. En términos Físico se pude decir que el término transitorio representa la disipación de la energía inicial que se le provee al sistema a través de la posición y la velocidad inicial de lanzamiento. Esta energía inicial se expresa a través de las condiciones iniciales se disipa. Si no existiera disipación esta energía inicial permanecería por siempre en el sistema. Finalmente el término inhomogéneo, a través de la fuerza de excitación, impone el movimiento al sistema. Nótese además que el termino inhomogéneo nunca se hace infinito, ni siquiera para el caso para el cual tiene un máximo y es aquel en el cual la frecuencia de excitación coincide con la frecuencia natural del sistema.

Ejemplo En un circuito RLC, cuyos componentes son $L = 1$ henry, $R = 40$ ohmios y $C = \frac{1}{40000}$ faradios, se le aplica un tensión de $V = 24$ voltios. Determine el comportamiento de la carga y la intensidad de corriente en el circuito.

La ecuación diferencial que describe el comportamiento del sistema

$$L\,\frac{\mathrm{d}^2Q\,(t)}{\mathrm{d}t^2} + R\,\frac{\mathrm{d}Q\,(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}\,Q = E\,(t) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}^2Q\,(t)}{\mathrm{d}t^2} + 40\,\frac{\mathrm{d}Q\,(t)}{\mathrm{d}t} + 40000\,Q\,(t) = \frac{1}{2}$$

$$L\,\frac{\mathrm{d}^2I\,(t)}{\mathrm{d}t^2} + R\,\frac{\mathrm{d}I\,(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}\,I\,(t) = \frac{\mathrm{d}E\,(t)}{\mathrm{d}t} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}^2I\,(t)}{\mathrm{d}t^2} + 40\,\frac{\mathrm{d}I\,(t)}{\mathrm{d}t} + 40000\,I\,(t) = 0$$

tomando en cuenta las condiciones iniciales tendremos como solución

$$\left.\begin{array}{l} Q\,(0) = 10^{-4} \\ \\ I\,(0) = \left.\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = 10^{-2} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} Q(t) = \frac{1}{8000} + e^{-20t}\left[\frac{47\sqrt{11}}{2640000}\mathrm{sen}\,\left(\sqrt{11}60t\right) + \frac{7}{8000}\cos\left(\sqrt{11}60t\right)\right] \\ \\ I\,(t) = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = e^{-20t}\left[\frac{1}{100}\cos\left(\sqrt{11}60t\right) - \frac{37\sqrt{11}}{6600}\mathrm{sen}\,\left(\sqrt{11}60t\right)\right] \end{array}\right.$$

Si en vez de un tensión constante de 0,5 V. la fuente de tensión es sinusoidal de la forma $E\,(t) = \frac{1}{2}\cos(180t)$ voltios las ecuaciones se transforman en

$$\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2} + 40\,\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + 40000\,Q = \frac{1}{2}\cos(180t) \quad \text{con} \quad Q\,(0) = 10^{-4} \quad \wedge \quad I\,(0) = \left.\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = 10^{-2}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2I}{\mathrm{d}t^2} + 40\,\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + 40000\,I = -90\mathrm{sen}\,(180t)$$

con sus correspondientes soluciones a las condiciones iniciales del sistema

$$Q(t) = \frac{1}{1000}\left\{e^{-20t}\left[\frac{293\sqrt{11}}{30140}\mathrm{sen}\,\left(60\sqrt{11}t\right) + \frac{91}{685}\cos\left(60\sqrt{11}t\right)\right] - \frac{9}{274}\cos(180t) + \frac{19}{548}\mathrm{sen}\,(180t)\right\}$$

$$I(t) = \frac{1}{100}\left\{e^{-20t}\left[\frac{103}{274}\cos\left(60\sqrt{11}t\right) - \frac{2461\sqrt{11}}{3014}\mathrm{sen}\,\left(60\sqrt{11}t\right)\right] + \frac{81}{137}\mathrm{sen}\,(180t) + \frac{171}{274}\cos(180t)\right\}$$

Por analogía con el caso mecánico procedemos a identificar cantidades

$$\left.\begin{array}{l} 2\mu = \frac{R}{L} \\ \\ \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow A = \frac{V_0}{L\sqrt{\left(\frac{1}{LC} - \varpi^2\right)^2 + \left(\frac{R}{L}\varpi\right)^2}} = \frac{1}{2\sqrt{\varpi^4 - 78400\varpi^2 + 1600000000}}$$

con ello se puede ver la funcionalidad de la amplitud con la frecuencia excitatriz

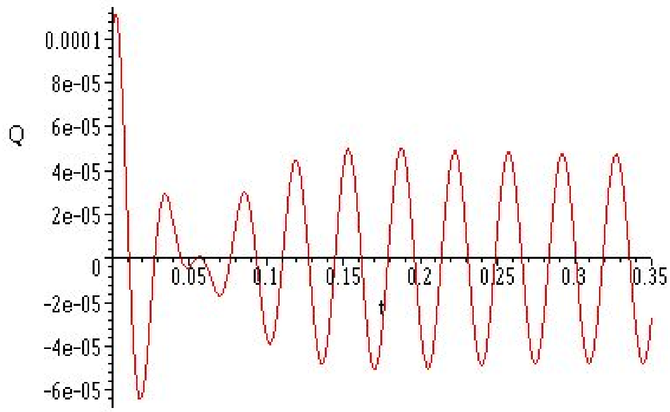

Figura 9: Carga en función del tiempo en un circuito RLC sometido a un voltaje sinusoidal $V(t) = \frac{1}{2}\cos(180t)$. Nótese el régimen transitorio $(0 \leq t \lesssim 0{,}17)$ y estacionario $(t \gtrsim 0{,}17)$.

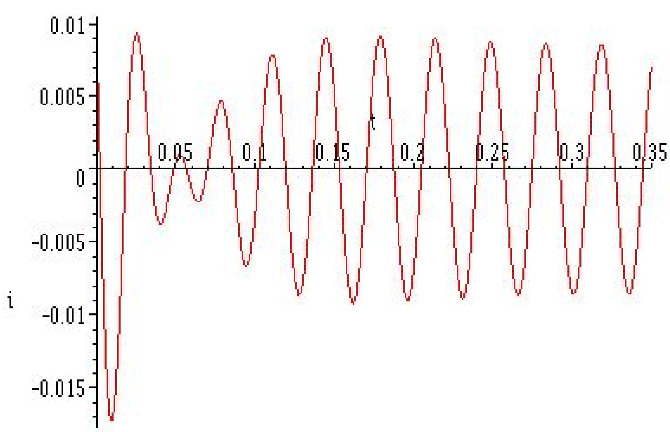

Figura 10: Intensidad de corriente en un circuito RLC sometido a un voltaje sinusoidal $V(t) = \frac{1}{2}\cos(180t)$

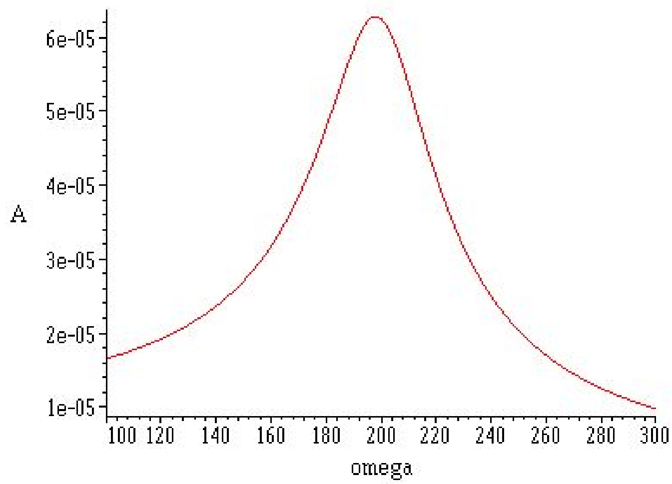

Figura 11: Amplitud como función de la frecuencia excitatriz. Nótese el máximo de la amplitud cuando el sistema entra en resonancia, i.e. $\varpi = \omega_0$