Operador Diferencial y Transformadas de Laplace

1. Operador Diferencial

Un operador es un objeto matemático que convierte una función en otra, por ejemplo, el operador derivada convierte una función en una función diferente llamada la función derivada. Podemos definir el operador derivada $\mathbf{D}$ que al actuar sobre una función diferenciable produce la derivada de esta, esto es:

$$\mathbf{D}^0 f(x) = f(x)\,, \quad \mathbf{D}^1 f(x) = f'(x)\,, \quad \mathbf{D}^2 f(x) = f''(x)\,, \ldots, \mathbf{D}^n f(x) = f^{(n)}(x)\,.$$

Es posible construir la siguiente combinación lineal con los operadores diferenciales:

$$P(\mathbf{D}) = a_0 + a_1\mathbf{D} + a_2\mathbf{D}^2 + \cdots + a_n\mathbf{D}^n\,, \quad a_n \neq 0\,. \tag{1}$$

donde $a_2, a_1, a_2, \ldots a_n$ son constantes. A este nuevo objeto lo podemos llamar el Operador Polinomial de orden n.

La utilidad de este objeto matemático quedará claro si hacemos la siguiente definición

$$\begin{aligned} P(\mathbf{D})y &\equiv \left(a_n\mathbf{D}^n + a_{n-1}\mathbf{D}^{n-1} + \cdots + a_2\mathbf{D}^2 + a_1\mathbf{D} + a_0\right) y \\ &= a_n\mathbf{D}^n y + a_{n-1}\mathbf{D}^{n-1} y + \cdots + a_2\mathbf{D}^2 y + a_1\mathbf{D}y + a_0 y \\ &= a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y \end{aligned} \tag{2}$$

Por otro lado, recordemos que una ecuación diferencial lineal de orden n con coeficientes constantes es una ecuación de la forma

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = Q(x)\,, \tag{3}$$

por lo tanto, (3) se puede escribir de una manera compacta como

$$P(\mathbf{D})y = Q(x)\,. \tag{4}$$

El operador polinomial es lineal, esto significa que tiene las siguientes propiedades

- Si $f_1(x)$ y $f_2(x)$ son dos funciones diferenciables de orden n, entones

  $$P(\mathbf{D})\left[\alpha f_1(x) + \beta f_2(x)\right] = \alpha P(\mathbf{D}) f_1(x) + \beta P(\mathbf{D}) f_2(x)$$

  donde α y β son constantes. Además:

- Si $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ son n soluciones de la ecuación diferencial homogénea $P(\mathbf{D})y = 0$ entonces $y_h(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x)$ es también una solución.

- Si $y_h(x)$ es una solución de $P(\mathbf{D})y = 0$ y $y_p(x)$ es una solución de $P(\mathbf{D})y = Q(x)$ entonces $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$ es una solución de $P(\mathbf{D})y = Q(x)$.

- Si $y_{p1}(x), y_{p2}(x), \ldots, y_{pn}(x)$ son soluciones particulares de las respectivas n ecuaciones

$$P(\mathbf{D})y = Q_1(x),\ P(\mathbf{D})y = Q_2(x), \ldots, P(\mathbf{D})y = Q_n(x)$$

resulta entoneces que

$$P(\mathbf{D})\left[y_{p1}(x) + y_{p2}(x) + \cdots + y_{pn}(x)\right] = Q_1(x) + Q_2(x) + \cdots + Q_n(x)$$

implica que

$$y_p(x) = y_{p1}(x) + y_{p2}(x) + \cdots + y_{pn}(x)$$

es una solución de

$$P(\mathbf{D})y = Q_1(x) + Q_2(x) + \cdots + Q_n(x)$$

Ejemplo Encuentre una ecuación particular de

$$y'' + y = x^2 + xe^{2x} + 3 \quad \Rightarrow \quad \left(\mathbf{D}^2 + 1\right) y = x^2 + xe^{2x} + 3$$

Por alguno de los métodos anteriormente vistos podemos encontrar las soluciones particulares de cada una de las siguientes ecuaciones

$$\left(\mathbf{D}^2 + 1\right) y = x^2\,, \quad \left(\mathbf{D}^2 + 1\right) y = xe^{2x}\,, \quad \left(\mathbf{D}^2 + 1\right) y = 3$$

las soluciones son, respectivamente

$$y_{p1}(x) = x^2 - 2\,, \quad y_{p2}(x) = \frac{1}{5}\left(xe^{2x} - \frac{4}{5}e^{2x}\right)\,, \quad y_{p3}(x) = 3$$

por lo tanto, una solución particular de la ecuación diferencial problema es

$$y_p(x) = x^2 - 2 + \frac{1}{5}\left(xe^{2x} - \frac{4}{5}e^{2x}\right) + 3 = x^2 + 1 + \frac{1}{5}\left(xe^{2x} - \frac{4}{5}e^{2x}\right)\,.$$

Al operador diferencial también se le pueden agregar las siguientes propiedades. Consideremos los operadores

$$P_1(\mathbf{D}) = a_n\mathbf{D}^n + a_{n-1}\mathbf{D}^{n-1} + \cdots + a_2\mathbf{D}^2 + a_1\mathbf{D} + a_0 \quad (5)$$
$$P_2(\mathbf{D}) = b_n\mathbf{D}^n + b_{n-1}\mathbf{D}^{n-1} + \cdots + b_2\mathbf{D}^2 + b_1\mathbf{D} + b_0 \quad (6)$$

con $n \geq m$.

- $(P_1{+}P_2)f(x) = P_1f(x){+}P_2f(x) = \left[a_n\mathbf{D}^n + \cdots + a_n\mathbf{D}^n + \cdots + (a_2 + b_2)\mathbf{D}^2 + (a_1 + b_1)\mathbf{D} + a_0 + b_0\right] f(x)$
- $\left[g(x)P(\mathbf{D})\right] f(x) = g(x)\left[P(\mathbf{D})f(x)\right]$
- $g(x)\left[P_1(\mathbf{D}) + P_2(\mathbf{D})\right] f(x) = g(x)\left[P_1(\mathbf{D})f(x)\right] + g(x)\left[P_2(\mathbf{D})f(x)\right]$
- $\left[P_1(\mathbf{D})P_2(\mathbf{D})\right] f(x) = P_1(\mathbf{D})\left[P_2(\mathbf{D})f(x)\right]$

- Si el operador polinomial diferencial puede ser factorizado, es decir, si:

$$P(\mathbf{D}) = a_n\mathbf{D}^n + a_{n-1}\mathbf{D}^{n-1} + \cdots + a_2\mathbf{D}^2 + a_1\mathbf{D} + a_0 = a_n(\mathbf{D} - m_1)(\mathbf{D} - m_2)\cdots(\mathbf{D} - m_n)\,,$$

  las cantidades: $m_1, m_2, \ldots, m_n$ son las raices de la ecuación característica de $P(\mathbf{D})y = 0$.

- Para el operador polinomial diferencial es de orden n se cumple que

$$P(\mathbf{D} + a) = a_n\left(\mathbf{D} + a\right)^n + a_{n-1}\left(\mathbf{D} + a\right)^{n-1} + \cdots + a_2\left(\mathbf{D} + a\right)^2 + a_1\left(\mathbf{D} + a\right) + a_0$$

  donde a es una constante.

Teorema Si

$$P(\mathbf{D}) = a_n\mathbf{D}^n + a_{n-1}\mathbf{D}^{n-1} + \cdots + a_2\mathbf{D}^2 + a_1\mathbf{D} + a_0$$

es un operador polinomial diferencial con coeficientes constantes y $u(x)$ es una función n veces diferenciable, entonces:

$$P(\mathbf{D})\left[ue^{ax}\right] = e^{ax}P(\mathbf{D} + a)u\,,$$

donde a es una constante.

Ejemplo Evaluar la siguiente expresión

$$\left(\mathbf{D}^2 - \mathbf{D} + 3\right)\left(x^3e^{-2x}\right)$$

Al comparar la forma de esta expresión con la de teorema anterior, vemos que $a = -2$ y $u(x) = x^3$. Por lo tanto, si hacemos

$$P(\mathbf{D} - 2) = \left(\mathbf{D} - 2\right)^2 - \left(\mathbf{D} - 2\right) + 3 = \mathbf{D}^2 - 5\mathbf{D} + 9$$

se obtiene que

$$\left(\mathbf{D}^2 - \mathbf{D} + 3\right)\left(x^3e^{-2x}\right) = e^{-2x}\left(\mathbf{D}^2 - 5\mathbf{D} + 9\right)x^3 = e^{-2x}\left(9x^3 - 15x^2 + 6x\right)\,.$$

2. Solución de ecuaciones diferenciales lineales con el operador polinomial

Estudiemos un método que nos permitirá resolver ecuaciones del tipo

$$a_ny^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_2y'' + a_1y' + a_0y = Q(x)\,, \quad a_n \neq 0\,.$$

El desarrollo del método quedará evidente al estudiar el siguiente ejemplo:

Ejemplo Resolver la ecuación

$$y''' + 2y'' - y' - 2y = e^{2x} .$$

Al escribir esta ecuación utilizando el operador diferencial resulta

$$\left(\mathbf{D}^3 + 2\mathbf{D}^2 - \mathbf{D} - 2\right) y = e^{2x} \Rightarrow (\mathbf{D} - 1)(\mathbf{D} + 1)(\mathbf{D} + 2)\, y = e^{2x}$$

Si llamamos $u = (\mathbf{D} + 1)(\mathbf{D} + 2)\, y$ entonces se puede ver que

$$(\mathbf{D} - 1)\, u = e^{2x} \Rightarrow u' - u = e^{2x} \Rightarrow u = e^{2x} + C_1 e^x$$

Conocida la función u entonces se tiene que

$$(\mathbf{D} + 1)(\mathbf{D} + 2)\, y = e^{2x} + C_1 e^x$$

Repetimos el proceso, pero ahora hacemos $v = (\mathbf{D} + 2)\, y$, por lo tanto

$$(\mathbf{D} + 1)\, v = e^{2x} + C_1 e^x \Rightarrow v' + v = e^{2x} + C_1 e^x \Rightarrow v = \frac{1}{3} e^{2x} + \frac{C_1}{2} e^x + c_2 e^{-x}$$

Conocida v, entonces

$$(\mathbf{D} + 2)\, y = \frac{1}{3} e^{2x} + \frac{C_1}{2} e^x + c_2 e^{-x}$$

Integrando una vez más:

$$y' + 2y = \frac{1}{3} e^{2x} + \frac{C_1}{2} e^x + c_2 e^{-x} \Rightarrow y(x) = \frac{1}{12} e^{2x} + C_1 e^x + c_2 e^{-x} + C_3 e^{-2x} .$$

Notemos que existe una manera bastante sencilla de resolver la ecuación combinando varios métodos. Si buscamos $y_h(x)$ a través de la ecuación característica se obtiene que la solución es: $y_h(x) = C_1 e^x + c_2 e^{-x} + C_3 e^{-2x}$. Ahora bien, una solución particular se obtiene al considerar $u(x) = e^{2x}$ entonces $v = \frac{1}{3} e^{2x}$ y por lo tanto $y_p(x) = \frac{1}{12} e^{2x}$.

Ejercicio Resuelva la ecuación

$$y'' + y = e^x .$$

El método puede aplicarse a ecuaciones diferenciales de orden n, ya que si se tiene que

$$(\mathbf{D} - m_1)(\mathbf{D} - m_2) \cdots (\mathbf{D} - m_n) y = Q(x)$$

entonces se puede definir la función u como

$$u = (\mathbf{D} - m_2) \cdots (\mathbf{D} - m_n) y$$

y lo que queda es resolver una ecuación diferencial lineal de primer orden

$$(\mathbf{D} - m_1) u = Q(x)$$

Una vez resuelta la ecuación para u se sustituye en:

$$(\mathbf{D} - m_2)(\mathbf{D} - m_3)\cdots(\mathbf{D} - m_n)y = u(x)$$

Repitiendo el proceso,

$$v = (\mathbf{D} - m_3)\cdots(\mathbf{D} - m_n)y \Rightarrow (\mathbf{D} - m_2)v = u(x)$$

Integrando:

$$(\mathbf{D} - m_3)\cdots(\mathbf{D} - m_n)y = v(x)$$

Esta repetición nos llevará entonces hasta la solución $y(x)$.

Los operadores suelen tener su inversa, esto significa que si

$$P(\mathbf{D})y = Q(x) \Rightarrow P^{-1}(\mathbf{D})Q(x) = y_p(x) \Rightarrow \frac{1}{P(\mathbf{D})}Q(x) = y_p(x)$$

donde $y_p(x)$ es una solución particular de $P(\mathbf{D})y = Q(x)$. Esto significa que

$$\mathbf{D}^{-n}Q(x) = \int\int \underbrace{\cdots}_{n \text{ veces}} \int Q(x)dx$$

Ejemplo Evaluar

$$\mathbf{D}^{-2}(2x+3)\,.$$

Esto significa que

$$\mathbf{D}^{-2}(2x+3) = \mathbf{D}^{-1}\int(2x+3)dx = \mathbf{D}^{-1}(x^2+3x) = \int(x^2+3x)dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\,.$$

De todos modos es fácil verificar que $y_p = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2$ es una solución particular de $\mathbf{D}^2y = 2x+3$.

También se debe tener en cuenta que

$$P(\mathbf{D})\left[P^{-1}(\mathbf{D})Q(x)\right] = Q(x)$$

3. Solución de ecuaciones diferenciales lineales con el operador polinomial inverso

Volvamos al tema de resolver ecuaciones del tipo

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_2y'' + a_1y' + a_0y = Q(x)\,, \quad a_n \neq 0\,.$$

Estudiemos los casos mas simples

Caso 1: $Q(x) = bx^k$ y $P(\mathbf{D}) = a_n\mathbf{D}^n + a_{n-1}\mathbf{D}^{n-1} + \cdots + a_2\mathbf{D}^2 + a_1\mathbf{D} + a_0$. Esto significa que

$$P(\mathbf{D})y = \left(a_n\mathbf{D}^n + a_{n-1}\mathbf{D}^{n-1} + \cdots + a_2\mathbf{D}^2 + a_1\mathbf{D} + a_0\right) y = bx^k\,, \quad a_0 \neq 0\,.$$

Como ya lo mencionamos

$$y_p(x) = \frac{1}{P(\mathbf{D})}bx^k = \frac{1}{a_0\left[1 + \frac{a_1}{a_0}\mathbf{D} + \frac{a_2}{a_0}\mathbf{D}^2 + \cdots + \frac{a_n}{a_0}\mathbf{D}^n\right]}bx^k$$

Si se hace un desarrollo en serie de $1/P(\mathbf{D})$ resulta

$$y_p(x) = \frac{b}{a_0}\left[1 + c_1\mathbf{D} + c_2\mathbf{D}^2 + \cdots + c_k\mathbf{D}^k\right] x^k$$

Ejemplo Resolver la ecuación

$$4y'' - 3y' + 9y = 5x^2\,.$$

Cambiando de notación resulta

$$(4\mathbf{D}^2 - 3\mathbf{D} + 9)y = 5x^2$$

Comparando con la expresión general anterior tenemos que $b = 5$ y $a_0 = 9$. Por lo tanto:

$$y_p(x) = \frac{1}{P(\mathbf{D})}5x^2 = \frac{1}{9\left[1 - \frac{3}{9}\mathbf{D} + \frac{4}{9}\mathbf{D}^2\right]}5x^2$$

No tiene sentido ir más allá de $\mathbf{D}^2$ ya que: $\mathbf{D}^3(x^2) = 0$, $\mathbf{D}^4(x^2) = 0\,,\ldots$ Al hacer el desarrollo en series resulta

$$y_p(x) = \frac{5}{9}\left[1 + \frac{1}{3}\mathbf{D} - \frac{1}{4}\mathbf{D}^2\right] x^2 = \frac{5}{9}\left(x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}\right)\,.$$

En el caso de que $a_0 = 0$ se tiene que

$$\begin{aligned} P(\mathbf{D})y &= \left(a_n\mathbf{D}^n + a_{n-1}\mathbf{D}^{n-1} + \cdots + a_2\mathbf{D}^2 + a_1\mathbf{D}\right) y \\ &= \mathbf{D}\left(a_n\mathbf{D}^{n-1} + a_{n-1}\mathbf{D}^{n-2} + \cdots + a_2\mathbf{D} + a_1\right) \end{aligned}$$

Esto significa que $\mathbf{D}$ es un factor de $P(\mathbf{D})$. En general, si $\mathbf{D}^r$ es un factor de $P(\mathbf{D})$ entonces

$$P(\mathbf{D})y = \mathbf{D}^r\left[a_n\mathbf{D}^{n-r} + \cdots + a_{r+1}\mathbf{D} + a_r\right] y = bx^k\,, \quad a_r \neq 0\,.$$

$$y_p(x) = \frac{1}{\ }$$