Transformadas de Laplace

1. Definiciones para Comenzar

En general vamos a definir una transformación integral, $F(s)$, de una función, $f(t)$ como

$$F(s) = \int_a^b \mathcal{K}(s,t)\ f(t)\mathrm{d}t = \mathbf{T}\{f(t)\} \tag{1}$$

donde $\mathcal{K}(s,t)$ es una función conocida de s y t, denominada el *núcleo* de la transformación. Si a y b son finitos la transformación se dirá finita, de lo contrario infinita. Dependiendo de la selección del núcleo y los limites tendremos distintas transformaciones integrales. En Física las más comunes son:

Nombre	$F(s) = \mathbf{T}\{f(t)\}$	$f(t) = \mathbf{T}^{-1}\{F(s)\}$
Laplace	$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\mathrm{d}t$	$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} F(s)\mathrm{d}s$
Fourier de senos y cosenos	$F(s) = \displaystyle\int_0^\infty \begin{array}{c} sen(st) \\ \cos(st) \end{array} f(t)\mathrm{d}t$	$f(t) = \frac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \begin{array}{c} sen(ts) \\ \cos(ts) \end{array} F(s)\mathrm{d}s$
Fourier compleja	$F(s) = \displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{i\ st} f(t)\mathrm{d}t$	$f(t) = \frac{2}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-i\ st} F(s)\mathrm{d}s$
Hankel	$F(s) = \displaystyle\int_0^\infty t J_n(st) f(t)\mathrm{d}t$	$f(t) = \displaystyle\int_0^\infty s J_n(ts) F(s)\mathrm{d}s$
Mellin	$F(s) = \displaystyle\int_0^\infty t^{s-1}\ f(t)\mathrm{d}t$	$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} s^{-t}\ F(s)\mathrm{d}s$

La idea detrás de la utilidad de las transformaciones integrales puede resumirse en el siguiente esquema

EDO para $f(t)$	transformación directa $\longrightarrow$ $F(s) = \mathbf{T}\{f(t)\}$	relación para $F(s)$ eventualmente más fácil
$\downarrow$ solución directa difícil $\downarrow$		$\downarrow$ solución para $F(s)$ más fácil $\downarrow$
se encuentra $f(t)$	$\longleftarrow$ transformación inversa $f(t) = \mathbf{T}^{-1}\{F(s)\}$	se encuentra $F(s)$

2. Tranformada de Laplace

En nuestro caso ilustraremos el uso de transformaciones integrales con la transformada de Laplace, que denotaremos de manera simbólica como $F(s) = \mathbf{L}\{f(t)\}$.La siguiente tabla resume las transformaciones de algunas funciones.

$f(t) = \mathbf{L}^{-1}\{F(s)\}$		$F(s) = \mathbf{L}\{f(t)\}$
1	$\longleftrightarrow$	$\frac{1}{s}, \qquad s > 0$
$e^{a\ t}$	$\longleftrightarrow$	$\frac{1}{s-a}, \qquad s > a$
$\text{sen }(at)$	$\longleftrightarrow$	$\frac{a}{s^2+a^2}, \qquad s > 0$
$\cos(at)$	$\longleftrightarrow$	$\frac{s}{s^2+a^2}, \qquad s > 0$
$t^n \qquad n > 0$	$\longleftrightarrow$	$\frac{n!}{s^{n+1}}, \qquad s > 0$
$t^p \qquad p > -1$	$\longleftrightarrow$	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}, \qquad s > 0$
$\text{sen } hat$	$\longleftrightarrow$	$\frac{a}{s^2-a^2}, \qquad s > \|a\|$
$\cosh at$	$\longleftrightarrow$	$\frac{s}{s^2-a^2}, \qquad s > \|a\|$
$e^{a\ t}\left\{\begin{array}{c}\text{sen }(bt)\\ \\ \cos(bt)\end{array}\right\}$	$\longleftrightarrow$	$\left\{\begin{array}{c}\frac{a}{(s-a)^2+b^2}\\ \\ \frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}\end{array}\right\} \qquad s > \|a\|$
$t^n\ e^{a\ t} \qquad n \in \aleph$	$\longleftrightarrow$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \qquad s > a$

$f(t) = \mathbf{L}^{-1}\{F(s)\}$		$F(s) = \mathbf{L}\{f(t)\}$
$u_c(t) \begin{cases} 0 & t < c \\ 1 & t \geq c \end{cases} \quad c > 0$	$\longleftrightarrow$	$\dfrac{e^{-c\ t}}{s} \quad s > 0$
$u_c(t)\ f(t-c)$	$\longleftrightarrow$	$e^{-c\ t}F(s)$
$e^{c\ t}\ f(t)$	$\longleftrightarrow$	$F(s-c)$
$f(c\ t)$	$\longleftrightarrow$	$\frac{1}{c}F\left(\frac{s}{c}\right), \quad c > 0$
$\int_0^t f(t-\tau)\, g(\tau)\, \mathrm{d}\tau$	$\longleftrightarrow$	$F(s)\, G(s)$
$\delta(t-c)$	$\longleftrightarrow$	$e^{-c\ s}$
$f^{(n)}(t)$	$\longleftrightarrow$	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$
$(-t)^n f(t)$	$\longleftrightarrow$	$F^{(n)}(s)$

3. Ejemplos Sencillos

Como un ejemplo de lo anterior, encontraremos la solución a las siguientes ecuaciones diferenciales

1. Ecuación diferencial inhomogénea, continua, con valores iniciales

$$y'' + y = \text{sen } 2t \qquad \text{con} \begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \tag{2}$$

$$\mathbf{L}\left\{y'' + y\right\} = \mathbf{L}\{\text{sen } 2t\} \qquad \Rightarrow \qquad s^2 Y(s) - s y(0) - y'(0) + Y(s) = \frac{2}{s^2+4} \tag{3}$$

$$Y(s) = \frac{s^2+6}{(s^2+1)(s^2+4)} = \frac{as+b}{s^2+1} + \frac{cs+d}{s^2+4} = \frac{\frac{5}{3}}{s^2+1} - \frac{\frac{2}{3}}{s^2+4} \tag{4}$$

mediante la transformada inversa en cada término

$$\left.\begin{array}{r} \mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{5}{3}}{s^2+1}\right\} = \frac{5}{3}\text{sen } t \\ \\ \mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{2}{3}}{s^2+4}\right\} = \frac{1}{3}\text{sen } 2t \end{array}\right\} \qquad \Rightarrow y(t) = \frac{5}{3}\text{sen } t - \frac{1}{3}\text{sen } 2t \tag{5}$$

2. Ecuación diferencial, con valores iniciales, inhomogénea a una función escalón:

$$y'' + 4y = h(t) = \begin{cases} 1 & \pi \leq t \leq 2\pi \\ \\ 0 & 0 \leq t \leq \pi \qquad t \geqslant 2\pi \end{cases} \qquad \text{con} \begin{cases} y(0) = 1 \\ \\ y'(0) = 0 \end{cases} \tag{6}$$

$$y'' + y = h(t) = u_\pi(t) - u_{2\pi}(t) \qquad \Rightarrow \mathbf{L}\left\{y'' + 4y\right\} = \mathbf{L}\left\{u_\pi(t) - u_{2\pi}(t)\right\} \tag{7}$$

$$\Rightarrow \left(s^2+4\right) Y(s) - sy(0) - y'(0) = \frac{e^{-\pi s}}{s} - \frac{e^{-2\pi s}}{s} \tag{8}$$

$$Y(s) = \frac{s}{s^2+4} + \frac{e^{-\pi s}}{s\left(s^2+4\right)} - \frac{e^{-2\pi s}}{s\left(s^2+4\right)} \tag{9}$$

mediante la transformada inversa

$$\mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} = \cos 2t \tag{10}$$

$$\mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\pi s}}{s\left(s^2+4\right)}\right\} = u_\pi(t)\, g(t-\pi) \qquad \text{con } g(\tau) = \mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s\left(s^2+4\right)}\right\} \tag{11}$$

por lo tanto

$$\mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\pi s}}{s\left(s^2+4\right)}\right\} = u_\pi(t)\,\mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4}\right)\right\} = u_\pi(t)\left[\frac{1}{4}\left(1 - \cos 2(t-\pi)\right)\right] \tag{12}$$

del mismo modo

$$\mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2\pi s}}{s\left(s^2+4\right)}\right\} = u_{2\pi}(t)\left[\frac{1}{4}\left(1 - \cos 2(t-2\pi)\right)\right] \tag{13}$$

recordemos que hemos definido la función escalón como

$$u_c(t) \begin{cases} 0 & t < c \\ \\ 1 & t \geq c \end{cases} \qquad c > 0 \tag{14}$$

y finalmente la solución será

$$y(t) = \cos 2t + u_\pi(t)\left[\frac{1}{4}\left(1 - \cos 2(t-\pi)\right)\right] - u_{2\pi}(t)\left[\frac{1}{4}\left(1 - \cos 2(t-2\pi)\right)\right] \tag{15}$$

3. Ecuación diferencial, con valores iniciales, inhomogénea a una función impulso (delta de Dirac)

$$y'' + 2y' + 2y = \delta(t-\pi) \qquad \text{con} \begin{cases} y(0) = 0 \\ \\ y'(0) = 0 \end{cases} \tag{16}$$

donde la función (distribución) delta de Dirac viene definida por

$$\delta(t-t_0)=0 \qquad \text{con } t\neq t_0 \qquad \text{y} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\tau\ \delta(\tau-\tau_0)=1 \tag{17}$$

con la útil propiedad de

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\tau\ \delta(\tau-\tau_0)\ f(\tau)=\ f(\tau_0) \tag{18}$$

En una de las tablas anteriores hemos mostrado la transformada de Laplace de la función (distribución) Delta de Dirac: $\mathbf{L}\{\delta(t-c)\}=e^{-c\ s}$ por lo tanto

$$y''+2y'+2y=\delta(t-\pi) \qquad \Rightarrow \mathbf{L}\left\{y''+2y'+2y\right\}=\mathbf{L}\{\delta(t-\pi)\} \tag{19}$$

$$\left(s^2+2s+2\right)Y(s)=e^{-\pi\ s} \qquad \Rightarrow Y(s)=\frac{e^{-\pi\ s}}{(s^2+2s+2)}=e^{-\pi\ s}\frac{1}{(s+1)^2+1} \tag{20}$$

por lo tanto

$$y(t)=\mathbf{L}^{-1}\left\{e^{-\pi\ s}\frac{1}{(s+1)^2+1}\right\}=u_\pi(t)\left[e^{-(t-\pi)}\text{sen }(t-\pi)\right] \tag{21}$$

o también

$$y(t)=\begin{cases} 0 & t<\pi \\ \\ e^{-(t-\pi)}\text{sen }(t-\pi) & t\geq\pi \end{cases} \tag{22}$$

4. Integral de Convolución

Algunas veces es posible identificar la transformada de Laplace $H(s)$ como el producto de dos transformadas de Laplace, $F(s)$ y $G(s)$ las cuales son las transformadas de funciones conocides $f(t)$ y $g(t)$. **Pero eso es algunas veces: en general la transformada del producto de funciones no es el producto de transformadas**. Esas veces están contenidas en el llamado Teorema de Convolución, según el cual se establece una especie de "producto generalizado" de funciones f y g.

Teorema de Convolución

Sean

$$F(s)=\mathbf{L}\{f(t)\} \quad \text{y} \quad G(s)=\mathbf{L}\{g(t)\} \qquad \text{que existen en el intervalo } s>a>0$$

Entonces

$$H(s)=F(s)G(s)=\mathbf{L}\{h(t)\} \qquad \text{para } s>a$$

donde

$$h(t)=\mathbf{L}^{-1}\left(F(s)G(s)\right)=\int_0^t f(t-\tau)\ g(\tau)\ \mathrm{d}\tau=\int_0^t f(\tau)\ g(t-\tau)\ \mathrm{d}\tau=(f*g)(t)$$

y $h(t)$ se indentifica como la convolución de f y g. Las integrales arriba expuestas se conocen con integrales de convolución y hemos denotado $h(t)=(f*g)(t)$ para insistir que se trata de un "producto generalizado" de funciones f y g. que comparte, con el producto ordinario de funciones, las siguientes propiedades

$$f * g = g * f \qquad \text{(conmutatividad)}$$

$$f * [g + k] = f * g + f * k \qquad \text{(distributividad)}$$

$$f * [g * k] = [f * g] * k \qquad \text{(asociatividad)}$$

$$f * 0 = 0 * f = 0$$

sin embargo $f * 1 \neq f$ tal y como se puede apreciar de

$$(f * 1)(t) = \int_0^t f(t-\tau)\ 1\ \mathrm{d}\tau = \int_0^t f(t-\tau)\ \mathrm{d}\tau \neq f(t)$$

en el caso particular de que $f(t) = \cos(t)$ tendremos

$$(\cos *1)(t) = \int_0^t \cos(t-\tau)\ 1\ \mathrm{d}\tau = \text{sen }(t-\tau)|_{\tau=0}^{\tau=t} = \text{sen }(0) - \text{sen }(t) = -\text{sen }(t)$$

y por la misma razón, no hay garantía que $(f * f)(t) > 0 \quad \forall\ f \neq 0$

El ejemplo más emblemático de la aplicación del Teorema de Convolución es el estudio del oscilador amortiguado y forzado, el cual viene descrito por la ecuación diferencial

$$\ddot{x} + 2\lambda\ \dot{x} + \omega_0^2\ x = f(t) \qquad \text{con } \dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \qquad \left\{ \begin{array}{l} x_0 = x(0) \\ \\ \dot{x}_0 = \left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \end{array} \right. \tag{23}$$

la transformada de Laplace nos lleva a

$$s^2 X(s) - s x_0 - \dot{x}_0 + 2\lambda\ s X(s) - 2\lambda\ x_0 + \omega_0^2\ X(s) = F(s) \tag{24}$$

resolviendo

$$X(s) = \frac{2\lambda\ x_0 + \dot{x}_0 + s x_0}{s^2 + 2\lambda s + \omega_0^2} + \frac{F(s)}{s^2 + 2\lambda s + \omega_0^2} \tag{25}$$

el primer sumando queda como

$$X_1(s) = \frac{2\lambda\ x_0 + \dot{x}_0 + s x_0}{s^2 + 2\lambda s + \omega_0^2} = \frac{x_0\ (s+\lambda)}{(s+\lambda)^2 + \left(\omega_0^2 - \lambda^2\right)} + \frac{\dot{x}_0 + x_0\ \lambda}{(s+\lambda)^2 + \left(\omega_0^2 - \lambda^2\right)} \tag{26}$$

y por lo tanto devolviendo el cambio

$$x_1(t) = x_0\ e^{-\lambda t} \cos\omega t + \frac{\dot{x}_0 + \lambda x_0}{\omega} \text{sen } \omega t \qquad \text{con} \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \tag{27}$$

$$X_2(s) = \frac{F(s)}{s^2 + 2\lambda s + \omega_0^2} \tag{28}$$

y por el teorema de convolución

$$x_2(t) = \int_0^t \frac{1}{\omega} e^{-\lambda(t-\tau)} \mathrm{sen}\ \omega (t-\tau)\ \ f(t)\ \ \mathrm{d}\tau \tag{29}$$

y por lo tanto la solución general será

$$x(t) = x_0\ e^{-\lambda t} \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0 + \lambda x_0}{\omega} \mathrm{sen}\ \omega t + \int_0^t \frac{1}{\omega} e^{-\lambda(t-\tau)} \mathrm{sen}\ \omega (t-\tau)\ \ f(t)\ \ \mathrm{d}\tau \tag{30}$$