Sistemas de Ecuaciones Diferenciales

1. Motivación

Cuando consideramos la evolución de sistemas con varios grados de libertad o con varias partículas, naturalmente arribamos al tratamiento de sistemas de ecuaciones diferenciales. En estos sistemas encontramos varias variables dependientes de una sola variable independiente. El más natural de los ejemplos es el caso de un sistema de partículas que se mueve en el espacio bajo la acción de fuerzas externas:

$$
\begin{aligned}
\vec{\mathcal{F}}_1\left(r_1(t), r_2(t), r_3(t), \cdots r_n(t), \frac{\mathrm{d}r_1(t)}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}r_2(t)}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}r_3(t)}{\mathrm{d}t} \cdots \frac{\mathrm{d}r_n(t)}{\mathrm{d}t}, t\right) &= \frac{\mathrm{d}^2 r_1(t)}{\mathrm{d}t^2} \\
\vec{\mathcal{F}}_2\left(r_1(t), r_2(t), r_3(t), \cdots r_n(t), \frac{\mathrm{d}r_1(t)}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}r_2(t)}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}r_3(t)}{\mathrm{d}t} \cdots \frac{\mathrm{d}r_n(t)}{\mathrm{d}t}, t\right) &= \frac{\mathrm{d}^2 r_2(t)}{\mathrm{d}t^2} \\
\vec{\mathcal{F}}_3\left(r_1(t), r_2(t), r_3(t), \cdots r_n(t), \frac{\mathrm{d}r_1(t)}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}r_2(t)}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}r_3(t)}{\mathrm{d}t} \cdots \frac{\mathrm{d}r_n(t)}{\mathrm{d}t}, t\right) &= \frac{\mathrm{d}^2 r_3(t)}{\mathrm{d}t^2} \\
&\vdots \\
\vec{\mathcal{F}}_n\left(r_1(t), r_2(t), r_3(t), \cdots r_n(t), \frac{\mathrm{d}r_1(t)}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}r_2(t)}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}r_3(t)}{\mathrm{d}t} \cdots \frac{\mathrm{d}r_n(t)}{\mathrm{d}t}, t\right) &= \frac{\mathrm{d}^2 r_n(t)}{\mathrm{d}t^2}
\end{aligned}
$$

donde, la función $\vec{\mathcal{F}}_i = \sum_j \vec{F}_{i\ j}$ expresa la sumatoria de fuerzas externas sobre cada partícula, vale decir

$$
\begin{aligned}
\sum_j \vec{F}_{1\ j}\left(r_1, r_2, r_3, , \cdots r_n, \frac{\mathrm{d}r_1}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}r_2}{\mathrm{d}t}, \cdots \frac{\mathrm{d}r_n}{\mathrm{d}t}, t\right) &= \vec{\mathcal{F}}_1\left(r_1, r_2, r_3, , \cdots r_n, \frac{\mathrm{d}r_1}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}r_2}{\mathrm{d}t}, \cdots \frac{\mathrm{d}r_n}{\mathrm{d}t}, t\right) \\
\sum_j \vec{F}_{2\ j}\left(r_1, r_2, r_3, , \cdots r_n, \frac{\mathrm{d}r_1}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}r_2}{\mathrm{d}t}, \cdots \frac{\mathrm{d}r_n}{\mathrm{d}t}, t\right) &= \vec{\mathcal{F}}_2\left(r_1, r_2, r_3, , \cdots r_n, \frac{\mathrm{d}r_1}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}r_2}{\mathrm{d}t}, \cdots \frac{\mathrm{d}r_n}{\mathrm{d}t}, t\right) \\
&\vdots \\
\sum_j \vec{F}_{n\ j}\left(r_1, r_2, r_3, , \cdots r_n, \frac{\mathrm{d}r_1}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}r_2}{\mathrm{d}t}, \cdots \frac{\mathrm{d}r_n}{\mathrm{d}t}, t\right) &= \vec{\mathcal{F}}_n\left(r_1, r_2, r_3, , \cdots r_n, \frac{\mathrm{d}r_1}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}r_2}{\mathrm{d}t}, \cdots \frac{\mathrm{d}r_n}{\mathrm{d}t}, t\right)
\end{aligned}
$$

Pero igual de importante es la posibilidad de convertir una ecuación diferencial ordinaria de orden superior

$$x^{(n)}(t) = \mathrm{F}\left(x^{(n-1)}(t), x^{(n-2)}(t), , \cdots \dddot{x}(t), \ddot{x}(t), \dot{x}(t), x(t), t\right)$$

haciendo el siguiente cambio variable

$$u_n = x^{(n-1)}(t); \quad u_{n-1} = x^{(n-2)}(t); \quad \cdots u_4 = \dddot{x}(t); \quad u_3 = \ddot{x}(t); \quad u_2 = \dot{x}(t); \quad u_1 = x(t)$$

en un sistema de ecuaciones diferenciales

$$
\begin{aligned}
\dot{u}_n &= \mathrm{F}_n\left(u_n, u_{n-1}, \cdots, u_4, u_3, u_2, u_1, t\right) \\
\dot{u}_{n-1} &= x^{(n-1)}\left(t\right) \\
&\vdots \\
\dot{u}_3 &= \dddot{x}\left(t\right) \\
\dot{u}_2 &= \ddot{x}\left(t\right) \\
\dot{u}_1 &= \dot{x}\left(t\right)
\end{aligned}
$$

que puede ser generalizado a:

$$
\begin{aligned}
\dot{u}_n &= \mathrm{F}_n\left(u_n, u_{n-1}, \cdots, u_4, u_3, u_2, u_1, t\right) \\
\dot{u}_{n-1} &= \mathrm{F}_{n-1}\left(u_n, u_{n-1}, \cdots, u_4, u_3, u_2, u_1, t\right) \\
&\vdots \\
\dot{u}_3 &= \mathrm{F}_3\left(u_n, u_{n-1}, \cdots, u_4, u_3, u_2, u_1, t\right) \\
\dot{u}_2 &= \mathrm{F}_2\left(u_n, u_{n-1}, \cdots, u_4, u_3, u_2, u_1, t\right) \\
\dot{u}_1 &= \mathrm{F}_1\left(u_n, u_{n-1}, \cdots, u_4, u_3, u_2, u_1, t\right)
\end{aligned}
$$

Para garantizar que existe solución al problema de valores iniciales se debe imponer algunas restricciones sobre las funciones $\mathrm{F}_i\left(u_n, \cdots, u_3, u_2, u_1, t\right)$ para ello existen un par de teoremas que garantice esa solución

Teorema 1: Sean las funciones $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \cdots \mathrm{F}_n$ y sus derivadas
$\partial_1\mathrm{F}_1, \partial_1\mathrm{F}_2, \cdots \partial_1\mathrm{F}_n, \cdots \partial_i\mathrm{F}_1, \partial_i\mathrm{F}_2, \cdots \partial_j\mathrm{F}_n \cdots \partial_n\mathrm{F}_1, \partial_n\mathrm{F}_2, \cdots \partial_n\mathrm{F}_n$
continua en una región R del espacio $(t, u_1, u_2, \cdots u_n)$ que contiene al punto $\left(t_0, u_1^0, u_2^0, \cdots u_n^0\right)$ que caracteriza las condiciones iniciales. Entonces existe un intervalo $\|t - t_0\| < h$ en el cual existe una única solución $u_1 = \phi_1\left(t\right), u_2 = \phi_2\left(t\right), \cdots, u_n = \phi_n\left(t\right),$
Hemos denotado $\partial_j\mathrm{F}_i = \dfrac{\partial \mathrm{F}_i}{\partial u_j}$ como la derivada parcial y $u_m^0 = u_m\left(t_0\right)$ como las condiciones iniciales.

Teorema 2 Sea el siguiente sistema lineal de ecuaciones diferenciales

$$
\begin{aligned}
\dot{u}_1 &= p_{11}\left(t\right)\ u_1 + p_{12}\left(t\right)\ u_2 + \cdots p_{1n}\left(t\right)\ u_n + g_1\left(t\right) \\
\dot{u}_2 &= p_{21}\left(t\right)\ u_1 + p_{22}\left(t\right)\ u_2 + \cdots p_{2n}\left(t\right)\ u_n + g_2\left(t\right) \\
&\vdots \\
\dot{u}_n &= p_{n1}\left(t\right)\ u_1 + p_{n2}\left(t\right)\ u_2 + \cdots p_{nn}\left(t\right)\ u_n + g_n\left(t\right)
\end{aligned}
$$

Si $p_{11}\left(t\right), p_{12}\left(t\right), \cdots p_{1n}\left(t\right) \cdots p_{ij}\left(t\right) \cdots\ p_{nn}\left(t\right)$ y $g_1\left(t\right) \cdots g_n\left(t\right)$ son funciones continua en el intervalo $\alpha < t < \beta$ que contiene al punto $t = t_0$ entonces existe una única solución que satisface las condiciones iniciales $u_m^0 = u_m\left(t_0\right)$

2. Notación Vectorial

El sistema lineal antes mencionado

$$\begin{aligned}
\dot{u}_1 &= p_{11}(t)\ \ u_1 + p_{12}(t)\ \ u_2 + \cdots p_{1n}(t)\ \ u_n + g_1(t) \\
\dot{u}_2 &= p_{21}(t)\ \ u_1 + p_{22}(t)\ \ u_2 + \cdots p_{2n}(t)\ \ u_n + g_2(t) \\
&\vdots \\
\dot{u}_n &= p_{n1}(t)\ \ u_1 + p_{n2}(t)\ \ u_2 + \cdots p_{nn}(t)\ \ u_n + g_n(t)
\end{aligned}$$

puede condensarse en la siguiente ecuación matricial

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{P}(t)\ \ \mathbf{u} + \mathbf{g}(t)$$

en la cual estamos representando

$$\dot{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \vdots \\ \dot{u}_n \end{pmatrix}; \quad \mathbf{P}(t) = \begin{pmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) & \cdots & p_{1n}(t) \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) & \cdots & p_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1}(t) & p_{n2}(t) & \cdots & p_{nn}(t) \end{pmatrix}; \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad y \quad \mathbf{g}(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{pmatrix}$$

con el vector solución de la forma

$$\mathbf{u} = \mathbf{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \\ \vdots \\ \phi_n(t) \end{pmatrix}$$

3. Sistemas Lineales Homogéneos

Dado un sistema de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes de la forma $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\ \mathbf{x}$ procedemos de manera análoga al caso de una sola ecuación con coeficientes constantes

$$y' = ay \quad \rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = e^{r\ t} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$$

con a, a_{ij}, ξ_m constantes. Al sustituir las solución $\mathbf{x} = \xi\ e^{r\ t}$ en la ecuación $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\ \mathbf{x}$ obtenemos $\xi\ r\ e^{r\ t} = \xi\ e^{r\ t}$ por lo cual, el problema se reduce a la búsqueda de los autovalores y autovectores del sistema $\mathbf{A}\ \mathbf{x} = r\ \xi$

$$(\mathbf{A} - \mathbf{r}\ \mathbf{1})\,\xi = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} a_{11} - r & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - r & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es decir, para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, es necesario resolver el sistema de ecuaciones algebraico. Como un ejemplo, para el caso

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} \qquad \text{si} \quad \mathbf{x} = \xi\ e^{r\ t} \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1-r & 1 \\ 4 & 1-r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

por lo cual

$$\begin{vmatrix} 1-r & 1 \\ 4 & 1-r \end{vmatrix} = (1-r)^2 - 4 = r^2 - 2r - 3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} r_1 = 3 \\ \\ r_2 = -1 \end{array} \right.$$

de donde

$$r_1 = 3 \quad \Longrightarrow \quad -2\ \xi_1^{(1)} + \xi_2^{(1)} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \xi^{(1)} = \begin{pmatrix} \xi_1^{(1)} \\ 2\xi_1^{(1)} \end{pmatrix}$$

similarmente

$$r_2 = -1 \quad \Longrightarrow \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} \xi_1^{(2)} \\ -2\xi_1^{(2)} \end{pmatrix}$$

por lo tanto la solución general del sistema será

$$\mathbf{x} = c_1\ \mathbf{x}^{(1)}(t) + c_2\ \mathbf{x}^{(2)}(t) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3\ t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-\ t}$$

Obviamente el Wronskiano de esta solución

$$\mathrm{W}\left[\mathbf{x}^{(1)}(t), \mathbf{x}^{(2)}(t)\right](t) = \begin{vmatrix} e^{3\ t} & e^{-\ t} \\ 2e^{3\ t} & -2e^{-\ t} \end{vmatrix} = -4e^{-2\ t} \neq 0$$

garantiza que las dos soluciones son linealmente independientes.

Para el caso de matrices hermíticas, $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\maltese}$ vale decir, que la matriz $\mathbf{A}$ coincide con su conjugada y traspuesta, $\mathbf{A} = \overline{(\mathbf{A}^T)}$, todos los autovalores son reales y la solución general para un sistema de n ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes es

$$\mathbf{x}(t) = c_1\ \xi^{(1)} e^{r_1\ t} + c_2\ \xi^{(2)} e^{r_2\ t} + \cdots + c_n\ \xi^{(n)} e^{r_n\ t}$$

Para el caso particular de matrices simétricas (hermíticas reales) los autovalores $r_1, r_2 \cdots\ r_n$ y los autovectores $\xi^{(1)}, \xi^{(2)} \cdots \xi^{(n)}$ ambos son reales.

Para el caso de matrices $\mathbf{A}$ no hermíticas, consideremos primero que $\mathbf{A}$ sea real. Entonces

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\ \mathbf{x} \Longrightarrow \quad \mathbf{x} = \xi\ e^{r\ t} \Longrightarrow \quad (\mathbf{A} - \mathbf{r}\ \mathbf{1})\,\xi = \mathbf{0} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} r_1 = \lambda + \mathrm{i}\mu \\ \\ r_2 = \lambda - \mathrm{i}\mu \end{array} \right. \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} r_1 = \bar{r}_2 \\ \\ \xi^{(1)} = \bar{\xi}^{(2)} \end{array} \right.$$

por lo cual $\xi^{(1)} = \mathbf{a}+\mathrm{i}\mathbf{b}$ con $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ vectores reales, entonces

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = (\mathbf{a}+\mathrm{i}\mathbf{b})\, e^{(\lambda+\mathrm{i}\mu)\ t} = (\mathbf{a}+\mathrm{i}\mathbf{b})\ e^{\lambda\ t}(\cos\mu t + \mathrm{i}\mathrm{sen}\ \mu t)$$

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \underbrace{e^{\lambda\ t}(\mathbf{a}\cos\mu t - \mathbf{b}\mathrm{sen}\ \mu t)}_{\mathbf{u}(t)} + \mathrm{i}\underbrace{e^{\lambda\ t}(\mathbf{a}\mathrm{sen}\ \mu t + \mathbf{b}\cos\mu t)}_{\mathbf{v}(t)}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \mathbf{u}(t) + \mathrm{i}\mathbf{v}(t)$$

Así, para el caso que los autovalores de la matriz real, $\mathbf{A}$,sean complejos, $r_1 = \lambda + \mathrm{i}\mu;\quad r_2 = \lambda - \mathrm{i}\mu$ complejos y $r_3, r_4 \cdots\ r_n$ reales, y los autovectores $\xi^{(1)} = \mathbf{a}+\mathrm{i}\mathbf{b}$; $\xi^{(2)} = \mathbf{a}-\mathrm{i}\mathbf{b}$; $\xi^{(3)}, \xi^{(4)} \cdots \xi^{(n)}$ la solución general sera

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{u}(t) + \mathrm{i}c_2\mathbf{v}(t) + c_3\ \xi^{(3)}e^{r_3\ t} + c_4\ \xi^{(4)}e^{r_4\ t} + \cdots + c_n\ \xi^{(n)}e^{r_n\ t}$$

como ejemplo

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}\mathbf{x} \qquad \text{si} \qquad \mathbf{x} = \xi\ e^{r\ t} \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1-r & -1 \\ 5 & -3-r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

por lo cual

$$\begin{vmatrix} 1-r & -1 \\ 5 & -3-r \end{vmatrix} = r^2 + 2r + 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} r_1 = -1 + \mathrm{i} \\ \\ r_2 = -1 - \mathrm{i} \end{array} \right. \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2-\mathrm{i} \end{pmatrix} \\ \\ \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2+\mathrm{i} \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

finalmente la solución general sera

$$\mathbf{x}(t) = c_1\ e^{-\ t}\begin{pmatrix} \cos t \\ 2\cos t + \mathrm{sen}\ t \end{pmatrix} + \mathrm{i}c_2\ e^{-\ t}\begin{pmatrix} \mathrm{sen}\ t \\ -\cos t + 2\mathrm{sen}\ t \end{pmatrix}$$

Para el caso que los autovalores de la matriz real, $\mathbf{A}$,estén repetidos $r_1 = r_2 = r_3 = \cdots = r_m = \rho$ y $r_{m+1}, \cdots\ r_n$ distintos, la solución general sera

$$\mathbf{x}(t) = \left\{t^{m-1}\ \zeta^{(m-1)} + t^{k-2}\ \zeta^{(m-2)} + \cdots \zeta^{(0)}\right\}e^{\rho t} + c_{m+1}\ \xi^{(m+1)}e^{r_{m+1}\ t} + \cdots + c_n\ \xi^{(n)}e^{r_n\ t}$$

4. Sistemas Lineales Inhomogéneos

Todo operador lineal hermítico $\mathbf{A} : V \longrightarrow V$,con n autovectores distintos, definidos por $\mathbf{A}\,|u_j\rangle = \lambda_j\,|u_j\rangle$, tiene una representación matricial diagonal $\hat{A}_{ij}{=}\lambda_i\delta_{ij}$ mediante una transformación de similaridad $\mathbf{TAT}^{-1} = \hat{\mathbf{A}}$ con $\mathbf{T}$ una matriz unitaria $\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^{\maltese}$ que trasforma la base de $\mathbf{A}$ a la base donde $\hat{\mathbf{A}}$ es diagonal $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, \cdots |v_i\rangle \cdots |v_n\rangle\} \overset{\mathbf{T}}{\Longrightarrow} \{|u_1\rangle, |u_2\rangle, \cdots |u_i\rangle \cdots |u_n\rangle\}$ Este teorema es claro: a partir de que sí $\mathbf{A}$ tiene n autovalores distintos, tiene n autovectores linealmente independientes los cuales forman base de V y en la cual la representación matricial del $\mathbf{A}$ es diagonal. Pero como siempre es posible pasar de $\mathbf{A}$ no diagonal a $\hat{\mathbf{A}}$ a diagonal con los mismos autovalores mediante una transformacion de similidaridad $\mathbf{TAT}^{-1} = \hat{\mathbf{A}}$ queda demostrado. Esto puede formalizarse de la siguiente manera

$$\langle v_i | \underbrace{\mathbf{T}^{\maltese}\mathbf{T}}_{\mathbf{1}} \mathbf{A} \underbrace{\mathbf{T}^{\maltese}\mathbf{T}}_{\mathbf{1}} |v_j\rangle = \underbrace{\langle v_i | \mathbf{T}^{\maltese}}_{\langle u_i|} \underbrace{\mathbf{TAT}^{\maltese}}_{\hat{\mathbf{A}}} \underbrace{\mathbf{T} |v_j\rangle}_{|u_j\rangle} == \langle u_i | \hat{\mathbf{A}} |u_j\rangle = \lambda_j \langle u_i |u_j\rangle = \lambda_j \delta_{ij}$$

Nos queda determinar la forma de la matriz unitaria de transformación $\mathbf{T}$. Para ello seleccionamos la base canónica $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, \cdots |e_i\rangle \cdots |e_n\rangle\}$ como base de partida de $\mathbf{A}$ con

$$|e_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |e_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots |e_i\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots |e_n\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

y $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, \cdots |u_i\rangle \cdots |u_n\rangle\}$ la base de autovectores en la cual $\hat{\mathbf{A}}$ es diagonal. Por lo tanto $\mathbf{T}$ es la matriz de transformación de una base a la otra, identificando columna a columna nos damos cuenta que las columnas de la matriz $\mathbf{T}$ son los autovectores de $\mathbf{A}$

$$|u_i\rangle = \sum_{j=1}^{n} T_{ij} |e_j\rangle \qquad \Rightarrow \quad \langle e_j |u_i\rangle = \langle e_j \left(\sum_{j=1}^{n} T_{ij} |e_j\rangle \right) \qquad \Rightarrow$$

$$\langle e_j |u_i\rangle = T_{ij} = \begin{pmatrix} u_1^{(1)} & u_2^{(1)} & \cdots & u_n^{(1)} \\ u_1^{(2)} & u_2^{(2)} & & u_n^{(2)} \\ \vdots & & \ddots & \\ u_1^{(n)} & u_2^{(n)} & & u_n^{(n)} \end{pmatrix} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathbf{T}^{\maltese} = \begin{pmatrix} u_1^{(1)} & u_1^{(2)} & \cdots & u_1^{(n)} \\ u_2^{(1)} & u_2^{(2)} & & u_2^{(n)} \\ \vdots & & \ddots & \\ u_n^{(1)} & u_n^{(1)} & & u_n^{(n)} \end{pmatrix} = \mathbf{T}^{-1}$$

donde hemos denotado $u_i^{(m)}$ la componente m del vector $j-esimo$ en la base $|e_i\rangle$ (con $i = 1, \cdots n$). Por lo tanto, si los n autovalores y autovectores de $\mathbf{A}$ son distintos y conocidos, $\mathbf{A}$ se dice diagonalizable. Si $\mathbf{A}$ es hermitica, $\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^{\maltese}$ y es muy facil construir la inversa de la matriz de transformacion $\mathbf{T}$. Si los autovalores de $\mathbf{A}$ con degenerados, vale decir si el número de autovectores linealmente independientes es menor que n, entonces $\mathbf{A}$ no es diagonalizable y no existe una matriz de transformacion $\mathbf{T}$ ($\mathbf{T}$ no tiene inversa) tal que $\mathbf{TAT}^{-1} = \hat{\mathbf{A}}$.

Lo que nos ocupa ahora es la solución del sistema de ecuaciones diferenciales inhomogéneo de la forma

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}(t) \qquad \text{con} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \text{y} \quad a_{ij} = \text{const} \\ \\ \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x^{(1)}(t) \\ x^{(2)}(t) \\ \vdots \\ x^{(n)}(t) \end{pmatrix} \\ \\ \mathbf{g}(t) = \begin{pmatrix} g^{(1)}(t) \\ g^{(2)}(t) \\ \vdots \\ g^{(n)}(t) \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

donde $\mathbf{A}$ una matriz constante y diagonalizable, $\mathbf{g}(t)$ contínua en el intervalo $\alpha \leq t \leq \beta$. La solución de este problema pasa por encontrar los autovalores y autovectores de $\mathbf{A} \Rightarrow \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_j \cdots \lambda_n; |u_1\rangle, |u_2\rangle, \cdots |u_i\rangle \cdots$ construir a partir de ellos la matriz $\mathbf{T}$ y su hermitica conjugada $\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^{\maltese}$ y a partir de ella hacer un cambio de variable

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{T}\ \mathbf{y}(t) \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{T}\ \mathbf{y}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{T}\ \mathbf{y}(\mathbf{t}) + \mathbf{g}(t) \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{y}'(t) = \underbrace{\mathbf{T^{-1}AT}}_{\hat{\mathbf{A}}}\ \mathbf{y}(\mathbf{t}) + \mathbf{T^{-1}g}(t)$$

por lo tanto

$$\mathbf{y}'(t) = \hat{\mathbf{A}}\ \mathbf{y}(t) + \mathbf{h}(t) \qquad \text{con} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \hat{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \\ \\ \mathbf{h}(t) = \mathbf{T^{-1}g}(t) \end{array} \right.$$

Entonces, por componente quedan

$$y_i'(t) = \lambda_i y_i(t) + h_i(t) = \lambda_i y_i(t) + T^*_{ji}\ g_j(t) = y_i(t) = e^{\lambda_i t} \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}\tau\ e^{\lambda_i \tau}\ u_j^{*(i)}\ g_j(\tau) + c_i\ e^{\lambda_i t}$$

Veamos algunos ejemplos. Encontremos la soluci'on general de

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \dot{\mathbf{x}} = \mathbb{A}\mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{t})$$

Donde los autovalores y autovectores de $\mathbb{A}$ son

$$\lambda_1 = -3 \quad \xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ y } \lambda_2 = -1 \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \mathbf{x(t)_{gh}} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-3t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

donde $\mathbf{x(t)_{gh}}$ es la soluci'on general de la homog'enea. Como $\mathbb{A}$ es real y sim'etrica,, constuimos la matriz de los autovectores, nomalizando los autovectores. Esto es

$$\mathbb{T} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathbb{T}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora cambiando variables y sustituy'endola en la ecuaci'on $\mathbf{x} = \mathbb{T}\mathbf{y}$ tendremos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbb{D}\mathbf{x} \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{y} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2e^{-t} - 3t \\ 2e^{-t} + 3t \end{pmatrix}$$

con lo cual, como se esperaba

$$\dot{\mathbf{y_1}} + 3\mathbf{y}_1 = \sqrt{2}e^{-t} - \frac{3}{\sqrt{2}}t \quad \text{y} \quad \dot{\mathbf{y_2}} + 3\mathbf{y}_2 = \sqrt{2}e^{-t} + \frac{3}{\sqrt{2}}t$$

y la soluci'on es inmediata

$$\mathbf{y}_1(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-t} - \frac{3}{\sqrt{2}}\left(\frac{t}{3} - \frac{1}{9}\right) + C_1 e^{-3t} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{y}_2(t) = \sqrt{2}e^{-t} + \frac{3}{\sqrt{2}}(t-1)C_2 e^{-t}$$

y devolviendo el cambio de variables tenemos que

$$\mathbf{x} = \mathbb{T}\mathbf{y} \quad \Rightarrow \mathbf{x} = \begin{pmatrix} y_1 + y_2 \\ -y_1 + y_2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \frac{c_1}{\sqrt{2}}e^{-3t} + \left(\frac{c_2}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right) e^{-t} + t - \frac{4}{3} + te^{-t} \\ -\frac{c_1}{\sqrt{2}}e^{-3t} + \left(\frac{c_2}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\right) e^{-t} + 2t - \frac{5}{3} + te^{-t} \end{pmatrix}$$

es decir

$$\mathbf{x} = \frac{C_1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-3t} + \frac{C_2}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} te^{-t} + \frac{t}{2} - \frac{4}{15}$$