Ecuaciones Diferenciales y Series
Taylor y el comienzo

1. Otra vez Algebra de Series

- Las series se suman

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)(x-x_0)^n$$

- Las series se multiplican

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$$

con

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_j b_{n-j} + \cdots + a_{n-2} b_2 + a_{n-1} b_1 + a_n b_0$$

- Las series se derivan

$$\frac{\mathrm{d}\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n\right]}{\mathrm{d}x} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \; n \; (x-x_0)^{n-1}$$

Nótese como cambia el comienzo de la serie.

- Los índices en las series son mudos

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \; n \; (x-x_0)^{n-1} = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \; j \; (x-x_0)^{j-1} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} \; (k+1) \; (x-x_0)^k$$

en la última sumatoria hemos hecho $k = j-1$, por lo cual $j = k+1$.

- Las series se igualan

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \; n \; (x-x_0)^{n-1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} \; (k+1) \; (x-x_0)^k = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} \; (n+1) \; (x-x_0)^n$$

por lo cual

$$b_n = a_{n+1} \; (n+1)$$

si la igualdad hubiera sido

$$\sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x-x_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, n \; (x-x_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} \; (n+1) \; (x-x_0)^n \quad \Longrightarrow \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{(n+1)}$$

2. Un Ejemplo conocido.

Consideremos la conocidad ecuación diferencial

$$y'' + y = 0$$

se propone encontrar una solución entorno a $x = 0$ por lo tanto

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n \\ \\ y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\, a_n x^{n-2} \end{array} \right.$$

$$y'' + y = 0 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\, a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$y'' + y = 0 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)\,(k+1)\, a_{k+2} x^k + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$y'' + y = 0 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} \left[(k+2)\,(k+1)\, a_{k+2} + a_k\right] x^k = 0$$

entonces

$$(k+2)\,(k+1)\, a_{k+2} + a_k = 0 \quad \Longrightarrow \quad a_{k+2} = \frac{-a_k}{(k+2)\,(k+1)} \quad \text{con} \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

por lo que

$$a_2 = \frac{-a_0}{2 \cdot 1}; \quad a_4 = \frac{-a_2}{4 \cdot 3} = \frac{-1}{4 \cdot 3} \cdot \frac{(-a_0)}{2} = \frac{a_0}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{a_0}{4!};$$

$$a_6 = \frac{-a_4}{6 \cdot 5} = \frac{-a_0}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = -\frac{a_0}{6!}$$

en general

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!} a_0$$

Similarmente, para los impares se obtiene

$$a_3 = \frac{-a_1}{3 \cdot 2}; \quad a_5 = \frac{-a_3}{5 \cdot 4} = \frac{-1}{5 \cdot 4} \cdot \frac{(-a_1)}{3 \cdot 2} = \frac{a_1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{a_1}{5!};$$

$$a_7 = \frac{-a_5}{7 \cdot 6} = \frac{-a_1}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{-a_1}{7!}$$

de donde

$$a_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} a_1$$

De este modo, la solución deseada queda como

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \frac{(-a_0)}{2!} x^2 + \frac{(-a_1)}{3!} x^3 + \frac{a_0}{4!} x^4 + \frac{a_1}{5!} x^4 + \frac{(-a_0)}{6!} x^6 + \frac{(-a_1)}{7!} x^7 + \cdots$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 \left[\underbrace{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots}_{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}} \right] + a_1 \left[\underbrace{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots}_{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}} \right]$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + a_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = a_0 \cos x + a_1 \operatorname{sen} x$$

3. Otro Ejemplo menos conocido pero importante

Considere ecuación de Hermite[1] la cual aparece en la solución del oscilador armónico cuántico

$$y'' - 2xy' + \lambda y = 0$$

Para resolver esta ecuación alrededor del punto $x_0 = 0$, proponemos la siguiente expansión en series de potencias como solución:

$$y(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j \Rightarrow \begin{cases} y'(x) = \sum_{j=1}^{\infty} j a_j x^{j-1} \\ \\ y''(x) = \sum_{j=2}^{\infty} j(j-1) a_j x^{j-2} \end{cases}$$

entonces la ecuación de Hermite queda como

$$\left[\sum_{j=2}^{\infty} j(j-1) a_j x^{j-2} \right] - 2 \left[\sum_{j=1}^{\infty} j a_j x^j \right] + \lambda \left[\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j \right] = 0$$

reacomodando índices queda como

$$\left[\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) a_{k+2} x^k \right] - 2 \left[\sum_{j=1}^{\infty} j a_j x^j \right] + \lambda \left[\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j \right] = 0$$

[1] **Charles Hermite**, (1822-1901). Matemático francés, especializado en el estudio de teoría de funciones. Profesor en la Universidad de París, ofreció importantes aportaciones al álgebra, las funciones abelianas y la teoría de las formas cuadráticas.

o equivalentemente

$$(2a_2 + \lambda a_0) + \sum_{j=1}^{\infty} \left[(j+2)\,(j+1)a_{j+2} - 2ja_j + \lambda a_j\right] x^j = 0$$

$$a_0 = -\frac{2a_2}{\lambda} \qquad \text{y} \qquad a_{j+2} = \frac{-\,(\lambda - 2j)}{(j+2)\,(j+1)} a_j \qquad n \geq 1$$

y tendrá como solución

$$y\,(x) = a_0 \left[\underbrace{1 - \frac{\lambda}{2!}x^2 - \frac{(4-\lambda)\,\lambda}{4!}x^4 - \frac{(8-\lambda)\,(4-\lambda)\,\lambda}{6!}x^6 - \cdots}_{y_0}\right]$$

$$+ a_1 \left[\underbrace{x + \frac{(2-\lambda)}{3!}x^3 + \frac{(6-\lambda)\,(2-\lambda)}{5!}x^5 + \frac{(10-\lambda)\,(6-\lambda)\,(2-\lambda)}{7!}x^7 + \cdots}_{y_1}\right]$$

nótese que para valores pares de λ una u otra serie se corta y genera polinomios de la forma

λ	Ecuación de Hermite	Polinomio asociado
0	$y'' - 2xy' = 0$	$y_0(x) = 1$
2	$y'' - 2xy' + 2y = 0$	$y_1(x) = x$
4	$y'' - 2xy' + 4y = 0$	$y_0(x) = 1 - 2x^2$
6	$y'' - 2xy' + 6y = 0$	$y_1(x) = x - \frac{2}{3}x^3$
8	$y'' - 2xy' + 8y = 0$	$y_0(x) = 1 - 10x^2 + \frac{35}{3}x^4$

También, puede ser definido a partir de una ecuación:

$$H_\lambda(x) = (-1)^\lambda e^{x^2} \frac{\mathrm{d}^\lambda}{\mathrm{d}x^\lambda} e^{-x^2}, \qquad \lambda = 0, 1, 2, ... \tag{1}$$

o a través de una relación de recurrencia

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0$$

Las ecuaciones antes mencionadas son ecuaciones homogéneas. En el caso que la ecuación diferencial a resolver por series sea una ecuación inhomogéna, se procederá del mismo modo como se propuso en el caso de que los coeficientes de la ecuación diferencial fueran constantes. Esto es se resuelve, por series la homogénea y luego se propone una solución particular, en forma de serie de potencias, la cual se iguala con la expansión, también en series de potencias, del término inhomogéneo. Como ejemplo, antes de proceder a casos más generales resolvamos la ecuación de Airy[2], pero inhomogéna planteada arriba. A pesar de su simplicidad, esta ecuación admite sólo soluciones en forma de serie. ahora el caso de la ecuación homogénea de Airy

$$y'' - xy = 0$$

Luego, compruebe, siguiendo el procedimiento arriba expuesto que una posible ecuación inhomogénea de Airy

$$y'' - xy = \exp(x)$$

tiene como solución la siguiente serie de potencias

$$y(x) = \underbrace{y(0)\underbrace{\left\{1 + \frac{1}{6}x^3 + \cdots\right\}}_{y_1} + y'(0)\underbrace{\left\{x + \frac{1}{12}x^4 + \cdots\right\}}_{y_2}}_{y_h} + \underbrace{\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \cdots}_{y_{ih}}$$

Nótese que los dos primeros términos corresponden a la solución de la ecuación homogénea y el último representa la serie que anula el término inhomogéneo. Hemos hecho patente la dependencia de las constantes de integracón de las condiciones iniciales.

4. Método de Diferenciaciones Sucesiva

En general, dada la Ecuación diferencial

$$a_0(x)\ y(x) + a_1(x)\ y'(x) + \cdots + a_{n-1}(x)\ y^{n-1}(x) + a_n(x)\ y^n(x) = \sum_{i=o}^{n} a_i(x)\ y^{(i)}(x) = \mathcal{F}(x) \qquad (2)$$

Si los coeficientes $a_0(x) \cdots a_n(x)$ son funciones analíticas en $x = x_0$ (se pueden expresar como una serie de Taylor de $(x - x_0)$ que converge al valor de la función con un radio de convergencia de $|x - x_0| < \rho$), entonces, la ecuación diferencial 2 tendrá como solución única, $y = y(x)$ de la ecuación homogéna una serie de potencias la cual satisface las n condiciones iniciales

$$y(x_0) = c_1; \qquad y'(x_0) = c_2; \qquad y''(x_0) = c_3; \cdots \qquad y''(x_0) = c_n$$

Adicionalmente, se expandirá en Taylor la función inhomogénea, esto es $\mathcal{F}(x) = \sum_{i=o}^{n} \mathcal{F}^{(i)}(x_0) \frac{(x - x_0)^i}{i!}$

y se propondrá una solución particular de la inhomogénea, también en términos de una serie $y_{ih}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$.

[2]**George Biddell Airy** (1801-1892) Matemático y Astrónomo Inglés con contribuciones importantes en la solución de ecuaciones diferenciales y su utilización en Astronomía. Mejoró significativamente las estimaciones teóricas de la orbita de Venus y la Luna. Igualmente realizó estudios matemáticos de la formación del arcoiris y la densidad de la tierra.

Otra forma de hacerlo es proceder directamente y conservar el término inhomogéneo y a partir de la ecuación completa encontrar los coeficientes de la expansión por Taylor alrededor del punto en el cual se disponga de las condiciones iniciales. La solución en series de Taylor será

$$y_h(x) = y(0) + y'(0)x + y''(0)\frac{x^2}{2!} + y'''(0)\frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Así para la siguiente ecuación diferencial

$$y'' - (x+1)\,y' + x^2 y = x; \qquad \mathit{con} \quad y(0) = 1; \quad \text{y} \quad y'(0) = 1.$$

los coeficientes de la expansión se obtienen de los valores de las derivadas en $x_0 = 0$, los cuales salen de las condiciones iniciales, de la ecuación diferencial esto es

$$y(0) = 1; \quad y'(0) = 1; \quad y''(0) = (0) + (0+1)\,y'(0) - 0^2 y(0) = 1$$

y de las derivadas de la ecuación diferencial

$$\begin{aligned}
y'''(x) &= y'(x) + (x+1)\,y''(x) - 2x\; y(x) - x^2 y'(x) + 1 \\
y'''(0) &= y'(0) + (0+1)\,y''(0) - 2(0)\; y(0) - 0^2 y'(0) + 1 \\
y'''(0) &= 1 + 1 + 1 = 3
\end{aligned}$$

finalmente, la solución

$$y_h(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + \cdots$$

Esta solución contiene las dos soluciones (la homogénea y la particular de la inhomogénea) sumadas

Dado $|x| < 1$ y la ecuación diferencial

$$y'' + \frac{x}{1-x^2}y' - \frac{1}{1-x^2}\; y = \exp(2x)\,; \qquad \mathit{con} \quad y(0) = 1; \quad \text{y} \quad y'(0) = 1.$$

compruebe que tiene como solución general por series

$$y(x) = y(0)\left\{1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{80}x^6 + \cdots\right\} + y'(0)\,x + \left\{\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{8}x^4 + \cdots\right\}$$

y al incorporar los valores de las condiciones iniciales se obtiene

$$y(x) = 1 + x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{30}x^5 + \frac{1}{180}x^6 - \frac{4}{315}x^7 - \frac{79}{10\,080}x^8 + \cdots$$

5. Métodos de los Coeficientes Indeterminados

En general, para encontrar la solución a la ecuación antes mencionada

$$\sum_{i=o}^{n} a_i(x)\; y^{(i)}(x) = \mathcal{F}(x)$$

Se expanden por series de potencias cada uno de los coeficientes $a_0(x) \cdots a_n(x)$, la función $\mathcal{F}(x)$ y se expande también la serie

$$y(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \frac{(x-x_0)^j}{j!}$$

luego de bastante transpiración se despejan los coeficiente $c_0 \cdots c_n \cdots$ veamos el ejemplo con la misma ecuación del ejemplo anterior.

$$y'' - (x+1)\, y' + x^2 y = x; \qquad \textit{con} \quad y(0) = 1; \quad \text{y} \quad y'(0) = 1.$$

Como $x_0 = 0$, proponemos la siguiente expansión en series de potencias como solución:

$$y(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j \qquad \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} y'(x) = \sum_{j=1}^{\infty} j c_j x^{j-1} \\ \\ y''(x) = \sum_{j=2}^{\infty} j(j-1) c_j x^{j-2} \end{array} \right.$$

y al sustituir

$$\sum_{j=2}^{\infty} j(j-1)c_j x^{j-2} - (x+1) \sum_{j=1}^{\infty} j c_j x^{j-1} + x^2 \sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j = x$$

expandiendo

$$\sum_{j=2}^{\infty} j(j-1)c_j x^{j-2} - \sum_{j=1}^{\infty} j c_j x^j - \sum_{j=1}^{\infty} j c_j x^{j-1} + \sum_{j=0}^{\infty} c_j x^{j+2} = x$$

si hacemos $j-2 = l$ en el primer término, $j-1 = k$ en el tercero y $j+2 = m$ en el cuarto, tenemos

$$\sum_{l=0}^{\infty} (l+2)\,(l+1)\, c_{l+2} x^l - \sum_{j=1}^{\infty} j c_j x^j - \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\, c_{k+1} x^k + \sum_{m=2}^{\infty} c_{m-2} x^m = x$$

acomodando

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left((n+2)\,(n+1)\, c_{n+2} - n c_n - (n+1)\, c_{n+1} \right) x^n + \sum_{m=2}^{\infty} c_{m-2} x^m = x$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} c_2 - c_1 &= 0 \\ 3 \cdot 2\ c_3 - c_1 - 2\ c_2 &= 1 \end{aligned}$$

y la relación de recurrencia para $n \geq 2$

$$(n+2)\,(n+1)\, c_{n+2} - n c_n - (n+1)\, c_{n+1} - c_{n-2} = 0$$

con la cual se obtienen todos los demás coeficientes.

Si la ecuación es

$$y'' + (\sin x)\, y' + (\exp x)\, y = 0$$

se expanden los coeficientes

$$y'' + \left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \cdots\right) y' + \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \cdots\right) y = 0$$

se propone la solución en términos de series de potencias

$$y(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} y'(x) = \sum_{j=1}^{\infty} j c_j x^{j-1} \\ \\ y''(x) = \sum_{j=2}^{\infty} j(j-1) c_j x^{j-2} \end{array} \right.$$

por lo cual

$$\left[\sum_{j=2}^{\infty} j(j-1)c_j x^{j-2}\right] + \left(x - \frac{1}{6}x^3 + \cdots\right)\left[\sum_{j=1}^{\infty} j c_j x^{j-1}\right] + \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots\right)\left[\sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j\right] = 0$$

acomodando

$$(2c_2 + c_0) + (6c_3 + 2c_1 + c_0)\, x + (12c_4 + 3c_2 + c_1 + c_0)\, x^2 + (20c_5 + 4c_3 + c_2 + c_1 + c_0)\, x^3 + \cdots = 0$$

$$\begin{aligned} 2c_2 + c_0 &= 0 \\ 6c_3 + 2c_1 + c_0 &= 0 \\ 12c_4 + 3c_2 + c_1 + c_0 &= 0 \\ 20c_5 + 4c_3 + c_2 + c_1 + c_0 &= 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Ejercicio. Utilice el mismo método para la ecuación ejercicio anterior

$$y'' + \frac{x}{1-x^2} y' - \frac{1}{1-x^2}\ y = \mathrm{e}^{2x}; \qquad \textit{con} \quad y(0) = 1; \quad \text{y} \quad y'(0) = 1.$$

6. Los Puntos y las Estrategias

Dada una ecuación diferencial del tipo

$$P(x)\, y'' + Q(x)\, y' + R(x)\ y = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y'' + \frac{Q(x)}{P(x)} y' + \frac{R(x)}{P(x)}\ y = 0$$

Puntos ordinarios Un punto ordinario $x = x_0$ será aquel alrededor del cual $p(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}$ y $q(x) = \frac{R(x)}{P(x)}$ sean analíticas en ese punto o

$$\lim_{x \to x_0} p(x) \equiv \lim_{x \to x_0} \frac{Q(x)}{P(x)} = l_1 \qquad \text{con } l_1 \text{ finito}$$

$$\lim_{x \to x_0} q(x) \equiv \lim_{x \to x_0} \frac{R(x)}{P(x)} = l_2 \qquad \text{con } l_2 \text{ finito}$$

O también, lo que es lo mismo, que $p(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}$ y $q(x) = \frac{R(x)}{P(x)}$ tengan una expansión en Taylor alrededor de ese punto $x = x_0$.

Puntos singulares regulares Un punto $x = x_0$ se llamará punto singular regular si

$$\lim_{x \to x_0} (x - x_0)\, p(x) \equiv \lim_{x \to x_0} (x - x_0) \frac{Q(x)}{P(x)} = l_3 \qquad \text{con } l_3 \text{ finito}$$

$$\lim_{x \to x_0} (x - x_0)^2\, q(x) \equiv \lim_{x \to x_0} (x - x_0)^2 \frac{R(x)}{P(x)} = l_4 \qquad \text{con } l_4 \text{ finito}$$

O también, lo que es lo mismo, que $p(x)\,(x - x_0) = (x - x_0)\,\frac{Q(x)}{P(x)}$ y $q(x)\,(x - x_0)^2 = (x - x_0)^2\,\frac{R(x)}{P(x)}$ tengan una expansión en Taylor alrededor de ese punto.

Puntos singulares irregulares Ninguna de las anteriores

7. Ecuaciónes e intervalos en puntos regulares

La ecuación de Legendre[3]

$$(1 - x^2)\; y'' - 2x\; y' + \lambda(\lambda + 1)\; y = 0$$

tiene puntos regulares en $x \neq \pm 1$ y puntos singulares regulares en $x = \pm 1$. Pero es analítica en $x \in (-1, 1)$ lo tanto, todos los x son ordinarios si $x \in (-1, 1)$. En ese intervalo se propone una solución

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

por lo tanto

$$(1 - x^2)\; \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - 2x\; \sum_{n=1}^{\infty} n\; a_n x^{n-1} + \lambda(\lambda + 1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

[3] **Adrien Marie Legendre** (1752-1833). Matemático francés, encuadrado en la escuela de París, que surgió tras la revolución de 1789. Realizó una teoría general de las funciones elipticas y divulgó numerosos trabajos de investigadores jóvenes en el campo del análisis matemático.

multiplicando y acomodando

$$\sum_{j=0}^{\infty}(j+2)(j+1)a_{j+2}x^{j} - \sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n x^n - 2\sum_{n=1}^{\infty}n\ a_n x^n + \lambda(\lambda+1)\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n = 0$$

expandiendo

$$\begin{aligned} 0 = & 2a_2 + \lambda(\lambda+1)a_0 \left\{(\lambda+2)(\lambda-1)a_1 + (3\cdot 2)a_3\right\} x + \\ & + \sum_{n=2}^{\infty}\left\{(n+2)(n+1)a_{n+2} + (\lambda+n+1)(\lambda-n)a_n\right\} x^n \end{aligned}$$

donde hemos utilizado

$$-n(n-1) - 2n + \lambda(\lambda+1) = (\lambda+n+1)(\lambda-n)$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{(\lambda+1)\lambda}{2}\ a_0 \\ a_4 &= \frac{(\lambda+3)(\lambda+1)\lambda(\lambda-2)}{4!}\ a_0 \\ a_{2n} &= (-1)^n\frac{(\lambda+2n-1)(\lambda+2n-3)\cdots(\lambda+1)\lambda(\lambda-2)\cdots(\lambda-2n+2)}{(2n)!}\ a_0 \end{aligned}$$

y las potencias impares serán

$$\begin{aligned} a_3 &= -\frac{(\lambda+2)(\lambda-1)}{3!}\ a_1 \\ a_5 &= \frac{(\lambda+4)(\lambda+2)(\lambda-1)(\lambda-3)}{5!}\ a_1 \\ a_{2n+1} &= (-1)^n\frac{(\lambda+2n)(\lambda+2n-2)\cdots(\lambda+2)(\lambda-1)\cdots(\lambda-2n+1)}{(2n+1)!}\ a_1 \end{aligned}$$

y su solución general de la forma

$$y(x) = a_0\ y_0(x) + a_1 y_1(x)$$

con

$$\begin{aligned} y_0(x) &= 1 - \frac{(\lambda+1)\lambda}{2}\ x^2 + \frac{(\lambda+3)(\lambda+1)\lambda(\lambda-2)}{4!}\ x^4 + \cdots \\ y_1(x) &= x - \frac{(\lambda+2)(\lambda-1)}{3!}\ x^3 + \frac{(\lambda+4)(\lambda+2)(\lambda-1)(\lambda-3)}{5!}\ x^5 + \cdots \end{aligned}$$

si $\lambda = 2n$ una de las series se corta solución es un polinomio de potencias pares y si $\lambda = 2n+1$ la otra se corta en uno de potencias impares

λ	Ecuación de Legendre	Polinomio Asociado
0	$(1-x^2)\ y'' - 2x\ y' = 0$	$y_0(x) = 1$
1	$(1-x^2)\ y'' - 2x\ y' + 2\ y = 0$	$y_1(x) = x$
2	$(1-x^2)\ y'' - 2x\ y' + 6\ y = 0$	$y_0(x) = 1 - 3x^2$
3	$(1-x^2)\ y'' - 2x\ y' + 12\ y = 0$	$y_1(x) = x - \frac{5}{3}x^3$
4	$(1-x^2)\ y'' - 2x\ y' + 20\ y = 0$	$y_0(x) = 1 - 10x^2 + \frac{35}{3}x^4$

Los polinomios de Legendre son funciones que surgen en problemas de electrostática como solución de la ecuación de Legendre y son efectivamente polinomios para λ entero. Los Polinomios de Legendre también pueden ser generados a partir de la Fórmula de Rodrígues

$$P_n(x) = \frac{1}{n!2^n}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n, \qquad n = 0, 1, 2, ...$$

con $P_0(x) = 1$. También se dispone de una relación de recurrencia

$$(n+1)\,P_{n+1}(x) = \ (2n+1)\,xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$$