Operador Diferencial y Transformadas de Laplace

1. El Método de Frobenius

Para la solución de ecuaciones diferenciales lineales ordinarias alrededor de puntos singulares regulares se utiliza el método de Frobenius[1]. Dada una ecuación diferencial

$$y'' + F_1(x)\, y' + F_2(x)\ y = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad y'' + \frac{f_1(x)}{(x-x_0)} y' + \frac{f_2(x)}{(x-x_0)^2}\ y = 0 \tag{1}$$

donde $F_1(x)$ y $F_2(x)$ tienen singularidades regulares en$x = x_0$ y por lo tanto $f_1(x)$ y $f_2(x)$ son analíticas alrededor de ese punto entonces, la propuesta de solución será una serie de Frobenius

$$y(x) = (x-x_0)^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \tag{2}$$

donde n es entero positivo, pero m puede ser entero positivo (entonces la serie de Frobenius es una serie de Taylor) o entero negativo (entonces la serie de Frobenius es una serie de Laurent), o un racional. Por lo cual una serie de Frobenius incluye a las serie de Taylor y Laurent. Para hacer las cosas más simples supongamos, sin perder generalidad, $x_0 = 0$. Además, como $f_1(x)$ y $f_2(x)$ son analíticas entonces

$$f_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \qquad \text{y} \qquad f_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \tag{3}$$

por lo tanto

$$x^2 y'' + x\ f_1(x)\ y' + f_2(x)\ y = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2 y'' + x\ \left[\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right]\ y' + \left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right]\ y = 0$$

y con la propuesta de serie de Frobenius

$$y(x) = x^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad \Longrightarrow y'(x) = m x^{m-1} \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right] + x^m \left[\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}\right]$$

$$\Downarrow$$

$$y''(x) = m(m-1)\, x^{m-2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right] + 2m x^{m-1} \left[\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}\right] + x^m \left[\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, a_n x^{n-2}\right]$$

[1] **Ferdinand Georg Frobenius** (1849-1917) Matemático Alemán famoso por sus contribuciones en Teoría de Grupos y métodos para resolver ecuaciones diferneciales.

sustituyendo

$$0 = x^2 \left\{ m\left(m-1\right) x^{m-2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right] + 2m x^{m-1} \left[\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}\right] + x^m \left[\sum_{n=2}^{\infty} n\left(n-1\right) a_n x^{n-2}\right]\right\} +$$

$$+ x \left[\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right] \left\{ m x^{m-1} \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right] + x^m \left[\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}\right]\right\} + \left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right] \left\{ x^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right\}$$

acomodando

$$0 = \left\{ m\left(m-1\right) x^{m} \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right] + 2m x^{m} \left[\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n}\right] + x^m \left[\sum_{n=2}^{\infty} n\left(n-1\right) a_n x^{n}\right]\right\} +$$

$$+ \left[\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right] \left\{ m x^{m} \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right] + x^m \left[\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n}\right]\right\} + \left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right] \left\{ x^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right\}$$

o

$$0 = x^m \left(\left\{ m\left(m-1\right) \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right] + 2m \left[\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n}\right] + \left[\sum_{n=2}^{\infty} n\left(n-1\right) a_n x^{n}\right]\right\} + \right.$$

$$\left. + \left[\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right] \left\{ m \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right] + \left[\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n}\right]\right\} + \left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right] \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right\} \right)$$

Expandiendo las series tendremos

$$0 = x^m \left\{ a_0 \underbrace{\left[m\left(m-1\right)+b_0 m+c_0\right]}_{EI(m)} \right\} + \tag{4}$$

$$+ x^{m+1} \left\{ a_1 \underbrace{\left[m\left(m+1\right)+b_0\left(m+1\right)+c_0\right]}_{EI(m+1)} + a_0\left[b_1 m+c_1\right] \right\} + \tag{5}$$

$$+ x^{m+2} \left\{ a_2 \underbrace{\left[\left(m+2\right)\left(m+1\right)+b_0\left(m+2\right)+c_0\right]}_{EI(m+2)} + a_1\left[b_1\left(m+1\right)+c_1\right] + a_0\left[b_2 m+c_2\right] \right\} \tag{6}$$

$$+ x^{m+3} \left\{ a_3 \underbrace{\left[\left(m+3\right)\left(m+2\right)+b_0\left(m+3\right)+c_0\right]}_{EI(m+3)} + a_2\left[b_1\left(m+2\right)+c_1\right] + \right. \tag{7}$$

$$\left. + a_1\left[b_2\left(m+1\right)+c_2\right] + a_0\left[b_3 m+c_3\right] \right\} + \cdots$$

$$\vdots$$

$$+ x^{m+n} \left\{ a_n \underbrace{\left[\left(m+n\right)\left(m+n-1\right)+b_0\left(m+n\right)+c_0\right]}_{EI(m+n)} + a_{n-1}\left[b_1\left(m+n-1\right)+c_1\right] + \right. \tag{8}$$

$$+ a_{n-2}\left[b_2\left(m+n-2\right)+c_2\right] + a_{n-3}\left[b_3\left(m+n-3\right)+c_3\right] + \cdots \tag{9}$$

$$\left. + a_1\left[b_{n-1}\left(m+1\right)+c_{n-1}\right] + a_0\left[b_n m+c_n\right] \right\} \tag{10}$$

$$+ \cdots$$

la cual puede ser reacomodada aún más, y toma la forma elegante y compacta de

$$0 = x^m \left\{a_0 \; EI\left(m\right)\right\} + \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ a_i \; EI\left(m+i\right) + \sum_{k=0}^{i-1} a_k \;\; \left[\left(m+k\right) b_{i-k} + c_{i-k}\right] \right\} x^{m+i} \tag{11}$$

donde hemos identificado$EI\left(m\right) = m\left(m-1\right)+b_0 m+c_0$. Como es de esperarse, este polinomio se anula si los coeficientes de $x^m \cdots x^{m+i}$ se anulan. La primera de las ecuaciones que surge es la ecuación indicadora o índice

$$a_0 \neq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad EI\left(m\right) = m\left(m-1\right)+b_0 m+c_0 = 0 \tag{12}$$

que no es otra cosa que un polinomio de segundo grado en m. Al anular el coeficiente de x^{m+i}

$$\left\{ a_i \; EI\left(m+i\right) + \sum_{k=0}^{i-1} a_k \;\; \left[\left(m+k\right) b_{i-k} + c_{i-k}\right] \right\} = 0 \tag{13}$$

obtendremos la relación de recurrencia para la serie de Frobenius, correspondientes a cada raíz de la ecuación indicadora (12). Dato que la ecuación indicadora es un polinomio de segundo grado para m, entonces de allí se derivan dos raíces m_1 y m_2. Dependiendo de como sean estas raíces distinguiremos tres casos:

1. $m_1 \neq m_2 \wedge m_1 - m_2 \neq N$ con N entero.
   En este caso, la solución en términos de la serie de Frobenius para la ecuación diferencial será

$$y(x) = C_1 \underbrace{\|x\|^{m_1} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(m_1\right) x^n\right]}_{y_1(x)} + C_2 \underbrace{\|x\|^{m_2} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(m_2\right) x^n\right]}_{y_2(x)} \tag{14}$$

2. $m_1 = m_2$
   En este caso, la solución en términos de la serie de Frobenius para la ecuación diferencial será

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1 \underbrace{\|x\|^{m} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(m\right) x^n\right]}_{y_1(x)} \\ &+ C_2 \underbrace{\left\{ \underbrace{\|x\|^{m} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(m\right) x^n\right]}_{y_1(x)} \ln x + \|x\|^{m} \left[\sum_{n=0}^{\infty} B_n\left(m\right) x^n\right] \right\}}_{y_2(x)} \end{aligned} \tag{15}$$

3. $m_1 \neq m_2 \wedge m_1 - m_2 = N$ con N entero positivo.
   En este caso, la solución en términos de la serie de Frobenius para la ecuación diferencial será

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1 \underbrace{\|x\|^{m_1} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(m_1\right) x^n\right]}_{y_1(x)} \\ &+ C_2 \underbrace{\left\{ f \ \underbrace{\|x\|^{m_1} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(m_1\right) x^n\right]}_{y_1(x)} \ln x + \|x\|^{m_2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(m_2\right) x^n\right] \right\}}_{y_2(x)} \end{aligned} \tag{16}$$

Donde las constantes $a_n(m_1), a_n(m_2), B_n(m_1)$ y f, surgen de sustituir estas soluciones en la ecuación diferencial y resolver por el método de los coeficientes indeterminados. Nótese que hemos indicado explícitamente que los coeficientes $a_n = a_n(m_1); a_n = a_n(m_2); B_n = B_n(m_2)$ corresponden a las series de cada una de las raíces de la ecuacion indicadora.

En resumen, si una ecuación diferencial $y'' + F_1(x)\, y' + F_2(x)\ y = 0$ presenta puntos sigulares regulares para $F_1(x)$ y $F_2(x)$ en $x = x_0$. Lo que se traduce en que

$$y'' + \frac{f_1(x)}{(x-x_0)} y' + \frac{f_2(x)}{(x-x_0)^2}\ y = 0 \qquad \text{con} \qquad \left\{ \begin{array}{l} f_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n \\ \\ f_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n \end{array} \right.$$

es decir, que $f_1(x)$ y $f_2(x)$ sean analíticas en torno a $x = x_0$. Entonces se aplica el método de Frobenius. Para ello,

1. se propone una solución en series de potencias de Frobenius:

$$y(x) = x^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

con $m \in \Re \wedge n \in N$,

2. se sustituye en la ecuación diferencial y se aisla el término independiente (de orden cero en n). El coeficiente de este término se anula e implica la ecuación la indicadora o índice

$$a_0 \neq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad EI(m) = m(m-1) + b_0 m + c_0 = 0$$

que no es otra cosa que un polinomio de segundo grado en m. De esta ecuación emergen dos raíces $m_2 \wedge m_1$,en función de estas raíces, procedemos de distinto modo

a) si $m_1 \neq m_2 \wedge m_1 - m_2 \neq N$ con N entero entonces tendremos dos series de Frobenius

$$y(x) = C_1\ x^{m_1} \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n(m_1) x^n \right] + C_2\ x^{m_2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n(m_2) x^n \right]$$

b) si $m_1 = m_2$ tenemos que insertar un logaritmo

$$y(x) = \ x^{m_1} \left\{ (C_1 + C_2 \ln x) \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n(m) x^n \right] + C_2 \ \left[\sum_{n=0}^{\infty} B_n(m) x^n \right] \right\}$$

c) $m_1 \neq m_2 \wedge m_1 - m_2 = N$ con N entero positivo, entoces, como por arte de magia

$$y(x) = \ x^{m_1} \left\{ (C_1 + f \ln x) \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n(m_1) x^n \right] \right\} + C_2 x^{m_2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n(m_2) x^n \right]$$

3. Seguidamente se determina, según el caso, se determinan las relaciones de recurrecias para los distintos coeficientes $a_n = a_n(m_1); a_n = a_n(m_2); B_n = B_n(m_2); G_n = G_n(m_2)$ a partir de la ecuación (13)

$$\left\{ a_n \; EI\,(m+n) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \; \left[(m+k)\, b_{n-k} + c_{n-k}\right] \right\} = 0$$

tomando en cuenta los coeficientes de los desarrollos en series de potencias de las funciones

$$f_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \qquad \text{y} \qquad f_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

si anulamos los coeficientes de x^{m+n}

$$a_n \; EI\,(m+n) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \; \left[(m+k)\, b_{n-k} + c_{n-k}\right] = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a_n = -\frac{\sum_{k=0}^{n-1} a_k \; \left[(m+k)\, b_{n-k} + c_{n-k}\right]}{EI\,(m+n)}$$

entonces se obtiene la relación de recurrencia, al menos para los casos (14) y (15) en los cuales $EI\,(m+n) \neq 0$. El caso $EI\,(m+n) = 0$, vale decir $m_1 \neq m_2 \wedge m_1 - m_2 = N$ con N será analizado en detalle más adelante.

1.1. $m_1 \neq m_2 \wedge m_1 - m_2 \neq N$ con N entero.

En ese caso es claro que la resolver la ecuación indicadora y sustituir m_1 en el resto de los coeficientes, se va despejando todos los coeficientes $a_0 \cdots a_n$ en términos de a_0. Igualmente al sustituir m_2 encontramos la otra solución y ambas son linealmente independientes y la solución será

$$y(x) = C_1 \; x^{m_1} \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right] + C_2 \; x^{m_2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right]$$

Ejemplo, encuentre la solución en términos de series de Frobenius de la siguiente ecuación

$$x^2 \; y'' + x\left(x + \frac{1}{2}\right) y' - \left(x^2 + \frac{1}{2}\right) \; y = 0$$

al dividir por x^2 identificamos que a $x = 0$ es un punto singular regular. Proponemos por lo tanto una serie de Frobenius $y(x) = x^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ como posible solución. La ecuación indicadora $EI\,(m) = m\,(m-1) + b_0 m + c_0 = 0$ queda ahora, como

$$\left.\begin{array}{l} m = 1 \\ \\ m = \frac{-1}{2} \end{array}\right\} \Longleftarrow m\,(m-1) + \frac{1}{2}m - \frac{1}{2} = 0 \qquad \Longleftarrow \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{c} b_0 = \frac{1}{2} \\ \\ b_1 = 1 \end{array} \right\} \Longleftarrow f_1(x) = \frac{1}{2} + x \\ \\ \left\{ \begin{array}{c} c_0 = -\frac{1}{2} \\ \\ c_1 = 0 \\ \\ c_2 = -1 \end{array} \right\} \Longleftarrow f_2(x) = -\frac{1}{2} - x^2 \end{array} \right.$$

los demás coeficientes $b_2 = b_3 = \cdots = b_n = \cdots = 0$ y $c_3 = c_4 = \cdots = c_n = \cdots = 0$.

- El primer término del coeficiente de x^{m+n}, puede ser escrito en términos de genéricos, como

$$EI\,(m+n) = (m+n)\,(m+n-1) + \underbrace{\frac{1}{2}}_{b_0}\,(m+n) + \underbrace{\left(-\frac{1}{2}\right)}_{c_0} = m^2 + 2mn - \frac{1}{2}m + n^2 - \frac{1}{2}n - \frac{1}{2} \tag{17}$$

- El segundo término de ese mismo coeficiente, es una sumatoria en la cual inervienen los coeficientes de las expansiones de $f_1(x)$ y $f_2(x)$ (ecuación (3)). Como de esta expansión sobrevive $b_1 = 1$ significa que sólo aparecen el coeficiente para el cual $n - k = 1 \Rightarrow k = n - 1$ y como también sobrevive $c_2 = -1$, tendremos que $n - k = 2 \Rightarrow k = n - 2$,también estará presente. Esto es

$$a_{n-1}\left[(m+n-1)\cdot\underbrace{1}_{b_1}\right] + a_{n-2}\left[\underbrace{(-1)}_{c2}\right] \tag{18}$$

En definitiva el coeficiente completo se escribe como

$$a_n\left[m^2 + 2mn - \frac{1}{2}m + n^2 - \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}\right] + a_{n-1}\,[m+n-1] - a_{n-2} = 0 \tag{19}$$

con lo cual la relación de recurrencia general será

$$a_n = \frac{a_{n-2} - a_{n-1}\,[m+n-1]}{m^2 + 2mn - \frac{1}{2}m + n^2 - \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}} \qquad \text{para } n \geq 2 \tag{20}$$

Dependiendo del valor de m tendremos una relación de recurrencia para la primera de las series $m = 1$ o para la segunda, $m = -\frac{1}{2}$. Analicemos cado por caso. Para el caso particular $m = 1$, se obtiene la relación de recurrencia:

$$a_n = (a_{n-2} - na_{n-1})\,\frac{2}{2n^2 + 3n} \qquad \text{para } n \geq 2$$

y se encuentra a_1 al utilizar el coeficiente de x^{m+1} (ecuación (5))

$$a_1\left[1\,(1+1) + \frac{1}{2}\,(1+1) - \frac{1}{2}\right] + a_0\,[1+0] = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad a_1 = -\frac{2}{5}a_0$$

con lo cual

$$\begin{array}{lllll}
n = 2 & \Longrightarrow & a_2 = \frac{1}{7}\,(-2a_1 + a_0) = \frac{1}{7}\left(\frac{4}{5}a_0 + a_0\right) = \frac{9}{35}a_0 & \Longrightarrow & a_2 = \frac{9}{35}a_0 \\
n = 3 & \Longrightarrow & a_3 = \frac{2}{27}\,(-3a_2 + a_1) = \frac{2}{27}\left(\frac{-27}{35}a_0 - \frac{2}{5}a_0\right) = -\frac{82}{945}a_0 & \Longrightarrow & a_3 = -\frac{82}{945}a_0 \\
n = 4 & \Longrightarrow & a_4 = \frac{1}{22}\,(-4a_3 + a_2) = \frac{1}{22}\left(\frac{328}{945}a_0 - \frac{9}{35}a_0\right) = \frac{571}{20790}a_0 & \Longrightarrow & a_4 = \frac{571}{20790}a_0 \\
\vdots & & & & \vdots
\end{array}$$

Así la primera solución será

$$y_1(x) = a_0\ x \left(1 - \frac{2}{5}x + \frac{9}{35}x^2 - \frac{82}{945}x^3 + \frac{571}{20790}x^4 + \cdots\right)$$

Del mismo modo se construye la segunda solución linealmente independiente a partir de $m = -\dfrac{1}{2}$. Así, la relación de recurrencia para los coficientes de la serie de Frobenius $m = -\dfrac{1}{2}$ será:

$$a_n = \left(a_{n-2} - \left(n - \frac{3}{2}\right) a_{n-1}\right) \frac{2}{2n^2 - 3n} \qquad \text{para } n \geq 2$$

y

$$a_1 \left[\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\right] + a_0 \left[-\frac{1}{2}\right] = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad a_1 = -a_0$$

por lo cual

$$\begin{array}{lllll}
n=2 & \Longrightarrow & a_2 = -\frac{1}{2}a_1 + a_0 = \frac{1}{2}a_0 + a_0 = \frac{3}{2}a_0 & \Longrightarrow & a_2 = \frac{3}{2}a_0 \\
n=3 & \Longrightarrow & a_3 = \frac{2}{9}\left(-\frac{3}{2}a_2 + a_1\right) = \frac{2}{9}\left(\frac{-9}{4}a_0 - a_0\right) = -\frac{13}{18}a_0 & \Longrightarrow & a_3 = -\frac{13}{18}a_0 \\
n=4 & \Longrightarrow & a_4 = \frac{1}{10}\left(-\frac{5}{2}a_3 + a_2\right) = \frac{1}{10}\left(\frac{65}{36}a_0 + \frac{3}{2}a_0\right) = \frac{119}{360}a_0 & \Longrightarrow & a_4 = \frac{119}{360}a_0 \\
\vdots & & & & \vdots
\end{array}$$

Por lo cual, la solución general será

$$y(x) = C_1\ x \left(1 - \frac{2}{5}x + \frac{9}{35}x^2 - \frac{82}{945}x^3 + \frac{571}{20790}x^4 + \cdots\right)$$

$$+ C_2\ x^{-\frac{1}{2}} \left(1 - x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{13}{18}x^3 + \frac{119}{360}x^4 + \cdots\right)$$

Nótese que esta solución vale para $0 < \|x\| < \infty$ por cuanto para $x < 0$, la segunda solución se hace imaginaria pero se puede resolver haciendo $C_2 = i\ C_3$

Como ejercicio resuelva

$$2x^2\ y'' - x\ y' - (x+1)\ y = 0$$

1.2. $m_1 = m_2$.

Del mismo modo, si tenemos una ecuación diferencial

$$x^2\ y'' + x \underbrace{\left[x\ F_1(x)\right]}_{f_1(x)} y' + \underbrace{\left[x^2\ F_2(x)\right]}_{f_2(x)} y = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad L\{y\} = x^2\ y'' + x\ f_1(x)\, y' + f_2(x)\ y = 0 \quad (21)$$

donde en la cual $F_1(x)$ y $F_2(x)$ tienen singularidades regulares en $x=0$ pero $f_1(x)$ y $f_2(x)$ son analíticas para ese punto, vale decir

$$f_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \qquad \text{y} \qquad f_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

se aplica el Método de Frobenius. Pero antes de proceder a ilustrar este caso en al cual ambas raíces coinciden, veamos, un poco de dónde surge la forma general de la solución (15). Para ello reacomodemos la ecuación diferencial (21) de la forma

$$x^2\ y''+x\ f_1(x)\,y'+f_2(x)\ \ y=\left\{x^2\ \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+x\ f_1(x)\ \ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+f_2(x)\right\}y\equiv\mathcal{L}\{y\}=0$$

donde $\mathcal{L}\{\bullet\}$ está concebido como un operador lineal. Es ilustrador mostrar de dónde sale la forma curiosa de la solución de la ecuación diferencial (15). Para ello, recordamos que

$$\mathcal{L}\{y\}\equiv= x^m\{a_0\ EI(m)\}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\ EI(m+n)+\sum_{k=0}^{n-1}a_k\ \ [(m+k)\,b_{n-k}+c_{n-k}]\right\}x^{m+n}$$

si anulamos los coeficientes de x^{m+n} entonces

$$a_n\ EI(m+n)+\sum_{k=0}^{n-1}a_k\ \ [(m+k)\,b_{n-k}+c_{n-k}]=0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad a_n=-\frac{\sum_{k=0}^{n-1}a_k\ \ [(m+k)\,b_{n-k}+c_{n-k}]}{EI(m+n)}$$

considerando $EI(m+n)\neq 0$ por lo tanto, para los a_n seleccionados (que anulen el coeficiente x^{m+n}) y considerando el caso $m_1=m_2$

$$\mathcal{L}\{y\}(m,x)=\{a_0\ EI(m)\}\,x^m=a_0\,(m-m_1)^2\ \ x^m$$

Nótese que estamos considerando $\mathcal{L}\{y\}(m,x)$ como una función de m, y x. Por lo cual evaluando en $m=m_1$

$$\mathcal{L}\{y\}(m,x)|_{m=m_1}=\ a_0\,(m-m_1)^2\ \ x^m\Big|_{m=m_1}=0$$

pero además podemos intentar derivar respecto a la constante m

$$\frac{\partial\{\mathcal{L}\{y\}(m,x)\}}{\partial m}=\frac{\partial}{\partial m}\left\{x^2\ \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+x\ f_1(x)\ \ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+f_2(x)\right\}y=\left\{x^2\ \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+x\ f_1(x)\ \ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+f_2(x)\right\}\frac{\partial y}{\partial m}$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial y}{\partial m}\right\}(m,x)=\frac{\partial}{\partial m}\left(a_0\,(m-m_1)^2\ \ x^m\right)=a_0\left[(m-m_1)^2\ \ x^m\ln x+2\,(m-m_1)\ \ x^m\right]$$

y comprobamos que también se anula al evaluarla en $m=m_1$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial y}{\partial m}\right\}(m,x)\Big|_{m=m_1}=\ a_0\left[(m-m_1)^2\ \ x^m\ln x+2\,(m-m_1)\ \ x^m\right]\Big|_{m=m_1}=0$$

por lo tanto $\left\{\frac{\partial y}{\partial m}\right\}(m,x)\Big|_{m=m_1}$ también es solución, con lo cual la segunda toma la forma

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial y}{\partial m}\right\}(m,x)\Bigg|_{m=m_1} = \frac{\partial}{\partial m}\left\{\|x\|^m\left[a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(m)\,x^n\right]\right\}\Bigg|_{m=m_1}$$

$$= \left(x^{m_1}\ln x\right)\left[a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(m_1)\,x^n\right] + x^{m_1}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial a_n(m)}{\partial m}\Bigg|_{m=m_1}x^n\right]$$

y la solución general tendrá la forma

$$y(x) = C_1\underbrace{\|x\|^{m_1}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(m_1)\,x^n\right]}_{y_1(x)}$$

$$+\,C_2\underbrace{\left\{\underbrace{\|x\|^{m_1}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(m_1)\,x^n\right]}_{y_1(x)}\ln x+\|x\|^{m_1}\left[\sum_{n=0}^{\infty}b_n(m_1)\,x^n\right]\right\}}_{y_2(x)}$$

Analicemos, como ejemplo un caso particular de la ecuación de Bessel[2]

$$x^2\,y''+x\,y'+\left(x^2+\nu^2\right)\,y=0$$

Una vez más, la ecuación viene parametrizada por ν y dependiendo de su valor tendremos una familia de soluciones. Consideremos el caso $\nu=0$

$$x^2\,y''+x\,y'+x^2\,y=0$$

la ecuación indicadora $EI(m)=m(m-1)+b_0m+c_0=0$ nos queda como

$$m=0\Longleftarrow m(m-1)+m=0\qquad\Longleftarrow\left\{\begin{array}{l} b_0=1\Longleftarrow f_1(x)=1\\[2ex] \left.\left\{\begin{array}{l} c_0=0\\[2ex] c_1=0\\[2ex] c_2=1\end{array}\right.\right\}\Longleftarrow f_2(x)=x^2\end{array}\right.$$

[2] **Fredrich Wilhel Bessel** (1784-1846). Astrónomo y matemático alemán. Aportó notables contribuciones a la astronomía posicional, la geodesia y la mecánica celeste. Particularmente, se dedicó a aumentar la exactitud de las mediciones de la posición y el movimiento de los astros. La precisión de sus mediciones hizo posible que determinara pequeñas irregularidades en los movimientos de Urano lo condujo a predecir la existencia de Neptuno. Análogos razonamientos lo llevaron a especular sobre la presencia de estrellas compañeras en Sirio y Procyon. A partir de datos registrados en el siglo XVII, calculó la órbita del cometa Halley

los demás coeficientes $b_1 = b_2 = b_3 = \cdots = b_n = 0$ y $c_3 = c_4 = \cdots = c_n = 0$. Con lo cual $EI(n) = n(n-1) + n = n^2$, Por lo tanto, la relación de recurrencia se obtiene del coeficiente de x^{m+n}

$$a_n = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} a_k \ \left[(m+k)\, b_{n-k} + c_{n-k}\right]}{EI\,(m+n)} \qquad \text{dado que} \left\{ \begin{array}{l} b_1 \neq 0 \Rightarrow n-k=1 \Rightarrow k=n-1 \\ \\ c_2 \neq 0 \Rightarrow n-k=2 \Rightarrow k=n-2 \end{array} \right.$$

$$a_n(m) = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} a_k(m) \ \left[(m+k)\, b_{n-k} + c_{n-k}\right]}{(m+n)(m+n-1)+(m+n)} = \frac{a_{n-1}(m) \ (m+n-1) + a_{n-2}(m)}{(m+n)^2}$$

tomando $m = 0$, se tiene

$$a_n(0) = -\frac{\sum_{k=0}^{n-1} a_k \ (0)\left[k b_{n-k} + c_{n-k}\right]}{n^2} \qquad \text{con} \left\{ \begin{array}{l} b_1 \neq 0 \Rightarrow n-k=1 \Rightarrow k=n-1 \\ \\ c_2 \neq 0 \Rightarrow n-k=2 \Rightarrow k=n-2 \end{array} \right.$$

con lo cual

$$a_n(0) = -\frac{a_{n-2} \ (0)\left[c_2\right] + a_{n-1} \ (0)\left[(n-1)\, b_1\right]}{n^2} = -\frac{a_{n-2}(0) + a_{n-1}(0) \ (n-1)}{n^2} \qquad \text{para } n \geq 2$$

Otra vez, al anular el coeficiente para x^{m+1} (ecuación (5)) se obtiene $a_1\left[0(0+1) + 1\cdot(0+1) + 0\right] + a_0\left[0 \cdot 0 + 0\right] = 0 \Rightarrow a_1 = 0$. Con lo cual es claro que se anulan todos los coeficientes impares, y así

$$a_{2n}(0) = -\frac{a_{2n-2}(0)}{(2n)^2} \qquad \text{para } n = 1, 2, 3, \cdots$$

con lo cual

$$\begin{array}{lllll}
n=1 & \Longrightarrow & a_2(0) = -\dfrac{1}{4} a_0(0) & \Longrightarrow & a_2(0) = -\frac{1}{4} a_0(0) \\[2ex]
n=2 & \Longrightarrow & a_4(0) = -\dfrac{1}{(2\cdot 2)^2} a_2(0) = \dfrac{1}{(2\cdot 2)^2\, 2^2} a_0(0) & \Longrightarrow & a_4(0) = \dfrac{1}{(2\cdot 2)^2\, 2^2} a_0(0) \\[2ex]
n=3 & \Longrightarrow & a_6(0) = -\dfrac{1}{(2\cdot 3)^2} a_4(0) = -\dfrac{1}{(2\cdot 3)^2}\left[\dfrac{1}{(2\cdot 2)^2\, 2^2} a_0(0)\right] & \Longrightarrow & a_6(0) = \dfrac{-1}{(2\cdot 3)^2\, 2^3} a_0(0) \\
\vdots & & & & \vdots \\
n=l & \Longrightarrow & a_{2l}(0) = -\dfrac{a_{2l-2}(0)}{(2l)^2} = \dfrac{(-1)^l}{2^{2l}\,(l!)^2} a_0(0) & \Longrightarrow & a_{2l}(0) = \dfrac{(-1)^l}{2^{2l}\,(l!)^2} a_0(0)
\end{array}$$

por lo tanto la primera de las soluciones será

$$y_1(x) = a_0 \underbrace{\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}\,(n!)^2} x^{2n}\right]}_{J_0(x)}$$

Donde $J_0(x)$ se conoce como la función de Bessel de primera especie de orden cero.

Para calcular la segunda solución de la ecuación de Bessel se sustituye

$$y_2(x) = J_0(x)\ln x + \sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n \qquad \text{en la ecuación } x^2\ y'' + x\ y' + x^2\ y = 0$$

para ello se requieren sus derivadas

$$y_2(x) = J_0(x)\ln x + \sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n \qquad \Rightarrow y_2'(x) = J_0'(x)\ln x + \frac{J_0(x)}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n(0)\, n x^{n-1} \qquad \text{y}$$

$$\Downarrow$$

$$y_2''(x) = J_0''(x)\ln x + 2\frac{J_0'(x)}{x} - \frac{J_0(x)}{x^2} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n n(n-1)\, x^{n-2}$$

entonces

$$0 = x^2\ \left[J_0''(x)\ln x + 2\frac{J_0'(x)}{x} - \frac{J_0(x)}{x^2} + \sum_{n=2}^{\infty} B_n n(n-1)\, x^{n-2}\right] +$$

$$+\, x\ \left[J_0'(x)\ln x + \frac{J_0(x)}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n n x^{n-1}\right] + x^2\ \left[J_0(x)\ln x + \sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n\right]$$

con lo cual

$$0 = \Bigg(\underbrace{x^2\ J_0''(x) + x\ J_0'(x) + Jx^2\ {}_0(x)}_{=0}\Bigg)\ln x + 2\ J_0'(x)\ \ x + \sum_{n=2}^{\infty} B_n n(n-1)\, x^n + \sum_{n=1}^{\infty} B_n n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} B_n x^{n+2}$$

y finalmente

$$B_1 x + 2^2 B_2 x^2 + \sum_{n=3}^{\infty}\left(B_n n^2 + B_{n-2}\right) x^n = -2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\, 2n}{2^{2n}\,(n!)^2} x^{2n}$$

es claro que para los coeficientes impares se obtiene $b_1 = b_3 = b_5 = \cdots = b_{2n+1} \cdots = 0$ ya que

$$B_1 x + 2^2 B_2 x^2 + \left(3^2 B_3 + B_1\right) x^3 + \left(4^2 B_4 + B_2\right) x^4 + \left(5^2 B_5 + B_3\right) x^5 + \cdots = -2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\, 2n}{2^{2n}\,(n!)^2} x^{2n}$$

mientras que para las potencias pares tendremos la relación de recurrencia

$$B_{2n} = \frac{1}{(2n)^2}\left[\frac{(-1)^{n+1}\ n}{2^{2(n-1)}\,(n!)^2} - b_{2n-2}\right]$$

entonces

$$
\begin{aligned}
B_2 &= 2\frac{1}{2^2\,(1!)^2} \\
B_4 &= \frac{1}{(2\cdot 2)^2}\left(-\frac{4}{2^2\,(2!)^2} - 2\frac{1}{2^2\,(1!)^2}\right) = -\frac{1}{4^2 2^2}\left(1+\frac{1}{2}\right) \\
B_6 &= \frac{1}{(6)^2}\left[\frac{3}{2^4\,(3!)^2} - b_4\right] = \frac{1}{6^2}\left[\frac{3}{2^4\,(3!)^2} + \frac{1}{4^2 2^2}\left(1+\frac{1}{2}\right)\right] = \frac{1}{6^2 4^2 2^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) \\
&\vdots \\
B_{2k} &= \frac{(-1)^{k+1}}{2^{2k}\,(k!)^2}\left(\underbrace{\frac{1}{k}+\frac{1}{k-1}+\frac{1}{k-2}+\cdots+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1}_{H_k}\right) = \frac{(-1)^{k+1}}{2^{2k}\,(k!)^2}H_k
\end{aligned}
$$

Así la segunda solución puede tomar la forma de

$$y_2(x) = J_0(x)\ln x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n}\,(n!)^2}H_n\ x^{2n}$$

y por lo tanto la solución general tendrá la forma

$$y(x) = A_1\ J_0(x) + A_2\ \left[J_0(x)\ln x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n}\,(n!)^2}H_n\ x^{2n}\right]$$

es costumbre en Física reacomodar la segunda solución de la forma

$$y_2(x) \equiv Y_0(x) = \frac{2}{\pi}\left[\left(\gamma + \ln\left(\frac{x}{2}\right)\right)J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n}\,(n!)^2}H_n\ x^{2n}\right]$$

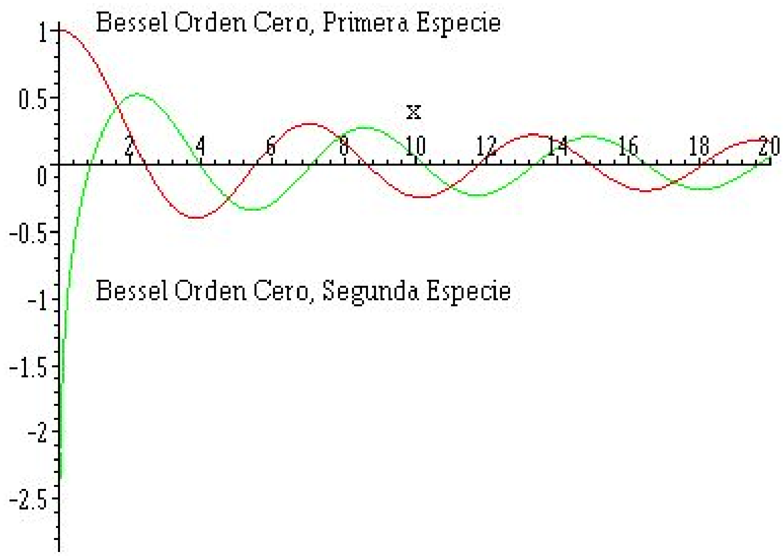
donde γ se conoce como la constante de Euler-Mascheroni[3] y tiene un valor

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-2}+\cdots+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1-\ln(n)\right) \cong 0{,}5772$$

y así, finalmente

$$y(x) = C_1\ J_0(x) + C_2\ Y_0(x)$$

[3]**Lorenzo Mascheroni** (1750-1800) Monje Italiano, nacido en Bergamo, Lombardo-Veneto. Profesor de Algebra y Geometría en la Universidad de Pavia y luego Rector de la misma. Además de poeta, se destaco por sus contribuciones al Cálculo y a la Mecánica.



Comportamiento de las funciones de Bessel de orden cero. De primera especie $J_0(x)$ y de segunda especie$Y_0(x)$

Nótese que tanto la función de Bessel de orden cero, de primera especie, $J_0(x)$, como la función de Bessel de orden cero, de segunda especie, $Y_0(x)$,tienen un comportamiento oscilatorio cuando $x \to \infty$, que $J_0(0) = 1$, mientras que $Y_0(x)$ se comporta como $\frac{2}{\pi} \ln x$ cuando $x \to 0$.

1.3. $m_1 \neq m_2 \wedge m_1 - m_2 = N$ con N entero.

En general, la ecuación indicadora para este caso, $m_1 - m_2 = N \Rightarrow m_1 = N + m_2$, con $m_1 > m_2$. Este caso nos lleva a la ecuación (11)

$$0 = x^m \{a_0 \; EI(m)\} + \sum_{n=1}^{N-1} \left\{ a_n \; EI(m+n) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \; \left[(m+k) b_{n-k} + c_{n-k}\right] \right\} x^{m+n} \tag{22}$$

$$+ \left\{ a_N \; EI(m+N) + \sum_{k=0}^{N-1} a_k \; \left[(m+k) b_{N-k} + c_{N-k}\right] \right\} x^{m+N} + \tag{23}$$

$$+ \sum_{n=N+1}^{\infty} \left\{ a_n \; EI(m+n) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \; \left[(m+k) b_{n-k} + c_{n-k}\right] \right\} x^{m+n} \tag{24}$$

donde esta m es la menor de las raíces y $m+N$ la mayor. Anulando el término $\{a_0 \; EI(m)\}$ coeficiente de x^m nos lleva a la ecuación indicadora:

$$EI(m+N) = (m+N)(m+N-1) + b_0(m+N) + c_0 = EI(m) = (m)(m-1) + b_0(m) + c_0 = 0.$$

por lo tanto $EI\,(m+N)=0$ anula al coeficiente del término a_n para $n=N$, esto es la ecuación (10), consecuentemente eso significa que se derivan dos casos

- $EI\,(m+N)=0 \wedge \sum_{k=0}^{N-1} a_k\ \left[(m+N+k)\,b_{n-k}+c_{n-k}\right]=0$
  En este caso la solución en serie de Frobenius, partiendo de la raíz mayor de la ecuación indicadora, $m+N$, quedará en términos de a_0 y no será linealmente independiente a la solución provista por la raíz menor, por consiguiente la solución proveniente de esta raíz menor, m, será la solución general. Esto quiere decir que en (16) la constante $f=0$ y por consiguiente la solución será

$$y(x)=a_0\ \underbrace{\|x\|^m\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\,(m)\,x^n\right]}_{y_1(x)}+a_N\ \underbrace{\|x\|^m\left[\sum_{n=0}^{\infty}a_n\,(m+N)\,x^n\right]}_{y_2(x)} \tag{25}$$

- $EI\,(m+N)=0 \wedge \sum_{k=0}^{N-1} a_k\ \left[(m+N+k)\,b_{n-k}+c_{n-k}\right]\neq 0$
  En este caso la raíz mayor de la ecuación indicadora $m+N$ determinará una de las soluciones, la constante $f\neq 0$ y la solución general tendrá la forma de

$$y(x)=C_1\ \underbrace{\|x\|^{m_1}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\,(m_1)\,x^n\right]}_{y_1(x)}$$

$$+\,C_2\underbrace{\left\{f\ \underbrace{\|x\|^{m_1}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\,(m_1)\,x^n\right]}_{y_1(x)}\ln x+\|x\|^{m_2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}a_n\,(m_2)\,x^n\right]\right\}}_{y_2(x)}$$

La ecuación de Bessel de orden fraccionario puede ilustrar el primero de estos casos, resolvámosla

$$x^2\ y''+x\ y'+\left(x^2-\frac{1}{4}\right)\ y=0$$

una vez más, le expansión en serie de Frobenius de $y\,(x)$ nos lleva a una ecuación indicadora del tipo

$$\left.\begin{array}{c} m=\dfrac{1}{2} \\ \\ m=\dfrac{-1}{2}\end{array}\right\}\Longleftarrow m\,(m-1)+m-\frac{1}{4}=0 \qquad \Longleftarrow \left\{\begin{array}{c} b_0=1\Longleftarrow f_1\,(x)=1 \\ \\ \left.\left\{\begin{array}{c} c_0=-\dfrac{1}{4} \\ \\ c_1=0 \\ \\ c_2=1\end{array}\right.\right\}\Longleftarrow f_2\,(x)=x^2-\dfrac{1}{4}\end{array}\right.$$

los demás coeficientes $b_1 = b_2 = b_3 = \cdots = b_n = 0$ y $c_3 = c_4 = \cdots = c_n = 0$. Dado que $N = 1$ se tiene que la ecuación (10)

$$\left\{ a_1 \underbrace{\left[(m+1)(m+1-1) + b_0 (m+1) + c_0\right]}_{EI(m+N)} + a_0 \left[b_1 (m+1-1) + c_1\right] + \cdots \right\} = 0 \qquad (26)$$

$$\left\{ a_1 \underbrace{\left[\left(\left(-\frac{1}{2}\right)+1\right)\left(\left(-\frac{1}{2}\right)\right) + \left(\left(-\frac{1}{2}\right)+1\right) - \frac{1}{4}\right]}_{EI\left(\left(-\frac{1}{2}\right)+1\right)} + a_0 [0] \right\} = 0 \Rightarrow a_1 [0] + a_0 [0] = 0 \qquad (27)$$

con lo cual cualquier valor de a_1 y a_0 estarán permitidos. La relación de recurrencia proviene de anular el coeficiente de x^{m+n}, para $m = -\frac{1}{2}$. Vale decir

$$a_n \; EI(m+n) + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \; \left[(m+k) b_{n-k} + c_{n-k}\right] = 0 \Rightarrow \qquad (28)$$

$$a_n \left[\left(\left(-\frac{1}{2}\right)+n\right)\left(\left(-\frac{1}{2}\right)+n-1\right) + \left(\left(-\frac{1}{2}\right)+n\right) - \frac{1}{4}\right] + a_{n-1}[0] + a_{n-2}[1] = 0 \qquad (29)$$

$$a_n \left(n^2 - n\right) = -a_{n-2} \qquad (30)$$

los coeficientes serán

$$\begin{array}{ll}
n=2 \Longrightarrow \quad a_2 = -\frac{1}{2}a_0 & n=3 \Longrightarrow \quad a_3 = -\frac{1}{6}a_1 \\
n=4 \Longrightarrow \quad a_4 = -\frac{1}{12}a_2 = \frac{1}{24}a_0 & n=5 \Longrightarrow \quad a_5 = -\frac{1}{20}a_3 = \frac{1}{120}a_1 \\
n=6 \Longrightarrow \quad a_4 = -\frac{1}{30}a_4 = -\frac{1}{720}a_0 & n=7 \Longrightarrow \quad a_7 == -\frac{1}{42}a_5 = -\frac{1}{5040}a_1 \\
\vdots & \vdots
\end{array}$$

Por lo cual, la solución general será

$$y(x) = a_0 \; x^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 + \cdots\right) + a_1 \; x^{-\frac{1}{2}} \left(-\frac{1}{6}x + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \cdots\right)$$

Para considerar el segundo caso, $EI\,(m+N) = 0 \wedge \sum_{k=0}^{N-1} a_k \; [(m+N+k)\, b_{n-k} + c_{n-k}] \neq 0$ analicemos la ecuación diferencial

$$x^2 \; y'' + x\,(2-x) \; y' + \left(2 - x^2\right) \; y = 0$$

una vez más, la expansión en serie de Frobenius de $y\,(x)$ nos lleva a una ecuación indicadora del tipo

$$\left.\begin{array}{l} m=2 \\ \\ m=1 \end{array}\right\} \Longleftarrow m\,(m-1) - 2m + 2 = 0 \qquad \Longleftarrow \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{c} b_0 = -2 \\ \\ b_1 = 1 \end{array} \right\} \Longleftarrow f_1\,(x) = -2 + x \\ \\ \left\{ \begin{array}{c} c_0 = 2 \\ \\ c_1 = 0 \\ \\ c_2 = 1 \end{array} \right\} \Longleftarrow f_2\,(x) = x^2 + 2 \end{array} \right.$$

los demás coeficientes $b_2 = b_3 = \cdots = b_n = 0$ y $c_3 = c_4 = \cdots = c_n = 0$. Dado que $N = 1$ se tiene que la ecuación (10) para $m = 1$

$$a_1\,[(m+1)\,m - 2\,(m+1) + 2] + a_0\,[m] = a_1\,[2 - 4 + 2] + a_0\,[2] = a_1\,[0] + a_0\,[1] = 0 \tag{31}$$

y no conduce a nada por cuanto $a_0 = 0$, mientras que, para $m = 2$ se obtiene

$$a_1\,[(m+1)\,m - 2\,(m+1) + 2] + a_0\,[m] = a_1\,[3\cdot 2 - 2\cdot 3 + 2] + a_0\,[1] = a_1\,[1] + a_0\,[1] = 0 \tag{32}$$

por lo cual la relación de recurrencia para $m = 2$ nos queda

$$a_n \; EI\,(m+n) + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \; [(m+k)\,b_{n-k} + c_{n-k}] = 0 \Rightarrow \tag{33}$$

$$a_n\,[(2+n)\,(2+n-1) - 2\,(2+n) + 2] + a_{n-1}\,[1+n] + a_{n-2}\,[1] = 0 \tag{34}$$

$$a_n\left(n^2 + n\right) + a_{n-1}\,(n+1) = -a_{n-2} \tag{35}$$

los coeficientes serán

$$\begin{array}{lll} n = 2 \Longrightarrow \quad 6a_2 = -3a_1 - a_0 = 3a_0 - a_0 & \Longrightarrow & a_2 = \dfrac{1}{3} a_0 \\ n = 3 \Longrightarrow \quad 12a_3 = -4a_2 - a_1 = -\dfrac{4}{3}a_0 + a_0 & \Longrightarrow & a_3 = -\dfrac{1}{36} a_0 \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

Por lo cual, la solución general será

$$y_1(x) = a_0 \; x^2 \left(1 - x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{36}x^3 + \cdots \right)$$

y la segunda solución linealmente independiente será

$$y_2(x) = u\,(x) - B_1 y_1(x) \ln x \tag{36}$$

y queda como ejercicio demostrar la relación de recurrencia para los coeficientes B_n de la serie que describe

$$u\,(x) = x \left(\sum_{i=0}^{\infty} B_i x^i \right) \tag{37}$$