Bessel de Revisita

1. Revisitando a Bessel

La Ecuación de Bessel es

$$x^2 y'' + x y' + \left(x^2 - k^2\right) y = 0; \qquad k \in \Re$$

obviamente $x = 0$ es una singularidad regular, por lo tanto el método de Frobenius nos permite afirmar que si $x = x_0$ corresponde a un polo regular de la ecuación

$$x^2 y'' + x\tilde{P}\left(x\right) y' + \tilde{Q}\left(x\right) y = 0;$$

la solución vendrá expresada de la forma

$$y(x) = \left(x - x_0\right)^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(x - x_0\right)^n$$

con r real y determinado a través de las raíces de la ecuación indicadora

$$r^2 + \left(\tilde{P}(x_0) - 1\right) r + \tilde{Q}(x_0) = 0$$

y donde $\tilde{P}\left(x\right)$ y $\tilde{Q}\left(x\right)$ son funciones analíticas en el entorno de $x = x_0$ y por lo tanto

$$\tilde{P}(x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \left(x - x_0\right)^n \quad \wedge \quad \tilde{Q}(x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(x - x_0\right)^n$$

Para la Ecuación de Bessel

$$\tilde{P}\left(x\right) = 1 \Rightarrow b_0 = 1 \quad \wedge \quad \tilde{Q}(x) = \left(x^2 - k^2\right) \Rightarrow c_0 = -k^2; \quad c_2 = 1$$

los demás coeficientes b's y c's se anulan. La ecuación indicadora y sus raíces quedan como

$$m\left(m - 1\right) + m - k^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad m^2 = k^2 \quad \Rightarrow \quad r_{1,2} = \pm k$$

Donde, para $r = k$ proponemos

$$y_1(x) = x^k \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Al hacer las cuentas

$$\left(x^2 - k^2\right) y_1(x) = x^k \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n - x^k \sum_{n=0}^{\infty} k^2 \; a_n x^n$$

$$x y_1'(x) = x^k \sum_{n=0}^{\infty} \left(k + p\right) a_n x^n$$

$$x^2 y_1''(x) = x^k \sum_{n=0}^{\infty} \left(k + p\right)\left(k + p - 1\right) a_n x^n$$

la ecuación de Bessel queda como

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(k+n)(k+n-1)+(k+n)-k^2\right]a_nx^n+\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^n=0$$

$$(2n+1)\,a_1x+\sum_{n=2}^{\infty}\left[k\,(2n+k)\,a_k+a_{n-2}\right]x^n=0$$

y por consiguiente obtenemos la relación de recurrencia

$$a_n=-\frac{a_{n-2}}{n\,(2k+n)}$$

donde es claro que $a_1=0$. Adicionalmente, si suponemos

$$a_0=\frac{1}{2^k\ \Gamma(k+1)}$$

tendremos

$$\begin{aligned}
a_1 &= a_3=a_5=\cdots=0\\
a_2 &= -\frac{a_0}{2\,(2k+2)}\\
a_4 &= \frac{a_0}{2\cdot 4\,(2k+2)\,(2k+4)}\\
&\ \vdots\\
a_{2n} &= (-1)^n\ \frac{a_0}{2^{2n}\ n!\,(k+1)\,(k+2)\cdots(k+n)}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la primera de las soluciones será

$$J_k(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(n+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+k}$$

la *Función de Bessel, de orden k de primera especie.*

Si $k=0$ entonces

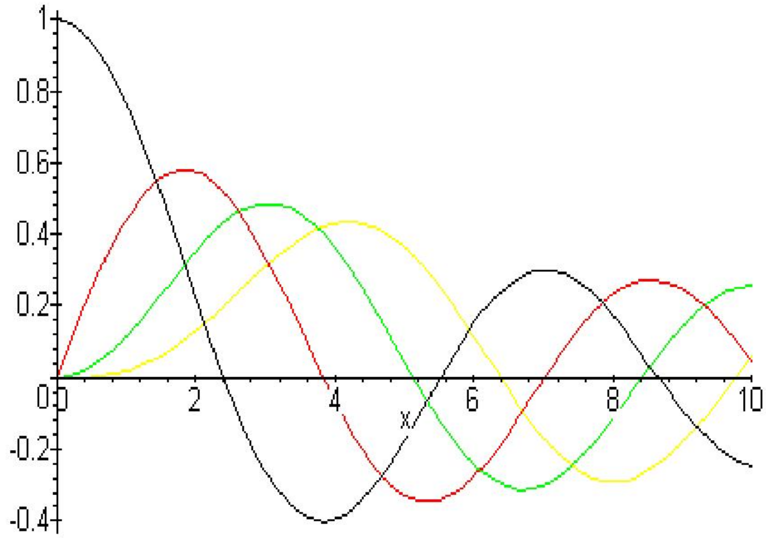
$$J_0(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

Para el caso particular de $k=m$ entero positivo la función de Bessel de primera especie toma la forma de

$$J_m(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\ \ (n+m)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+m}$$

Para encontrar la segunda solución linealmente independiente de la ecuación de Bessel el método de Frobenius propone tres casos dependiendo el valor de k

$$\left\{\begin{array}{l}
r_1-r_2\neq entero\Rightarrow\ \ k\neq entero\\
r_1=r_2=r\Rightarrow\ \ k=0\\
r_1-r_2=entero\Rightarrow\ \ k=entero
\end{array}\right.$$



Caso 1: $r_1 - r_2 \neq entero \Rightarrow \; k \neq entero.$
La solución general será de la forma

$$y(x) = C_1 J_k(x) + C_2 J_{-k}(x)$$

donde

$$J_{-k}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(n-k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-k} \qquad x > 0$$

Para $x < 0$ se debe reemplazar x^{-k} por $\|x\|^{-k}$. Nótese que esta última expresión también es válida para k semientero, i.e. $k = n + \frac{1}{2}$.
Caso 2: $r_1 = r_2 = r \Rightarrow \; k = 0.$
La solución general será de la forma

$$K_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n x^n + J_0(x)\; \ln x$$

y los coeficientes $\tilde{a}_n$ se encuentran mediante el tradicional método de sustituirlos en la ecuación de Bessel para $k = 0$

$$xy'' + y' + xy = 0;$$

De donde se obtiene

$$
\begin{aligned}
xK_0(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n x^{n+1} + xJ_0(x)\ \ln x = \sum_{n=3}^{\infty} \tilde{a}_{n-2} x^{n-1} + xJ_0(x)\ \ln x \\
K_0'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} n\tilde{a}_n x^{n-1} + (J_0(x)\ \ln x)' = \sum_{n=1}^{\infty} n\tilde{a}_n x^{n-1} + J_0'(x)\ \ln x + \frac{J_0(x)}{x} \\
xK_0''(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\,\tilde{a}_n x^{n-1} + xJ_0''(x)\ \ln x + 2J_0'(x) - \frac{J_0(x)}{x}
\end{aligned}
$$

y por lo tanto

$$
\tilde{a}_1 + 4\tilde{a}_2 x + \sum_{n=3}^{\infty} \left[n^2\tilde{a}_n + \tilde{a}_{n-2}\right] x^{n-1} + \left[\underbrace{xJ_0'' + J_0' + xJ_0}_{=\ 0}\right] \ln x + 2J_0'(x) = 0
$$

Acomodando y derivando la expresión para J_0 tendremos

$$
\tilde{a}_1 + 4\tilde{a}_2 x + \sum_{n=3}^{\infty} \left[n^2\tilde{a}_n + \tilde{a}_{n-2}\right] x^{n-1} = -2J_0'(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{2^{2n-1}} \frac{(-1)^{n+1}}{(n!)^2} x^{2n-1}
$$

Ahora multiplicando la expresión por x y separando las sumatorias en sus términos pares e impares, tendremos

$$
\begin{aligned}
\tilde{a}_1 x + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(2n+1)^2\,\tilde{a}_{2n+1} + \tilde{a}_{2n-1}\right] x^{2n+1} &= 0 \\
\sum_{n=2}^{\infty} \left[(2n)^2\,\tilde{a}_{2n} + \tilde{a}_{2n-2}\right] x^{2n} + 4\tilde{a}_2 x^2 &= x^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n}{2^{2n}\,(n!)^2} x^{2n}
\end{aligned}
$$

Por lo cual $\tilde{a}_1 = \tilde{a}_3 = \tilde{a}_5 = \cdots = 0$ mientras que

$$
4\tilde{a}_2 = 1; \qquad (2n)^2\,\tilde{a}_{2n} + \tilde{a}_{2n-2} = (-1)^{n+1} \frac{2n}{2^{2n}\,(n!)^2} \qquad n > 1
$$

De esta forma los coeficientes quedan como:

$$
\begin{aligned}
\tilde{a}_2 &= \frac{1}{2^2} \\
\tilde{a}_4 &= -\frac{1}{2^2 \cdot 4^2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2^4 \cdot (2!)^2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) \\
&\ \vdots \\
\tilde{a}_{2n} &= \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n}\ \ (n!)^2}\left\{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{k}\right\}
\end{aligned}
$$

La expresión para la solución general de la ecuación de Bessel para $k = 0$ será

$$K_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n!)^2} \left\{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{k}\right\} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} + J_0(x)\ \ln x$$

En Física, es costumbre expresar esta solución de una forma equivalente pero ligeramente diferente:

$$Y_0(x) = -\frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left\{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k}\right\} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} + \frac{2}{\pi} J_0(x)\ \left[\ln \frac{x}{2} + \gamma\right]$$

donde, una vez más, $\gamma = 0{,}577215664901 \cdots$ es la constante de Euler-Mascheroni.
Caso 3: $r_1 - r_2 = entero \Rightarrow\ k = entero.$
La solución general será de la forma

$$K_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n x^{k+n} + C J_n(x)\ \ln x$$

Procediendo de forma equivalente a la situación anterior tenemos que la solución general podrá expresarse (luego de una laboriosa faena) como

$$K_k(x) = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{k-1} \frac{(k-n-1)!}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-k} - \frac{H_k}{2k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{k} - \\ - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \left[H_n + H_{n+k}\right]}{n!\,(k+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+k} + J_k(x)\ \ln x$$

Y finalmente la *Función de Bessel de orden k de segunda especie* o *Función de Neumann*

$$Y_k(x) = -\frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{k-1} \frac{(k-n-1)!}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-k} - \frac{H_k}{\pi k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{k} - \\ - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \left[H_n + H_{n+k}\right]}{n!\,(k+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+k} + \frac{2}{\pi} J_k(x)\ \left[\ln \frac{x}{2} + \gamma\right]$$

En ambos casos

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

Más aún

$$Y_k(x) = \frac{2}{\pi} J_k(x)\ \ln \frac{x}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{k-1} \frac{(k-n-1)!}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-k} \\ - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(k+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+k} \left[\psi(n+1) + \psi(n+k+1)\right]$$

donde $\psi(n) = \dfrac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)}$ es la función Digamma con

$$\psi(n+1) = -\gamma + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$
$$\psi(1) = -\gamma$$

También es costumbre definir la función de Bessel de segunda especie en terminos de las de primera especie

$$N_k(x) = Y_k(x) = \frac{J_k(x)\cos k\pi - J_{-k}(x)}{\operatorname{sen} k\pi}$$

Nótese que para $k = m$ entero, aparentemente no esta definida. Pero, aplicando la regla de L'Hospital

$$\begin{aligned}
N_m(x) &= \left.\frac{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\left[J_k(x)\cos k\pi - J_{-k}(x)\right]}{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\left[\operatorname{sen} k\pi\right]}\right|_{k=m} \\
&= \left.\frac{-\pi J_n(x)\operatorname{sen} n\pi + \left\{\cos n\pi \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}J_k(x) - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}J_{-k}(x)\right\}}{\pi\cos n\pi}\right|_{k=m} \\
&= \frac{1}{\pi}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}J_k(x) - (-1)^n\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}J_{-k}(x)\right\}_{k=m}
\end{aligned}$$

De este modo, la soluciónes generales para la ecuación de Bessel, se expresan según el caso en

$$Z_k(x) = C_1 J_k(x) + C_2 J_{-k}(x); \qquad k \neq \textit{entero}$$
$$\tilde{Z}_k(x) = C_1 J_k(x) + C_2 Y_k(x); \qquad k = 0 \quad \vee \quad \textit{entero}$$

La funciones $Z_k(x)$ y $\tilde{Z}_k(x)$ se denominan *Funciones Cilíndricas de orden* k

Propiedades de las Funciones de Bessel

1.1. Otras Formas de la Ecuación de Bessel

Haciendo los cambios de variables correspondientes llegamos a

$$u''(x) + \frac{1-2\alpha}{x}u'(x) + \left[\left(\beta\nu\ x^{\nu-1}\right)^2 + \frac{\alpha^2 - k^2\nu^2}{x^2}\right]u(x) = 0$$

donde

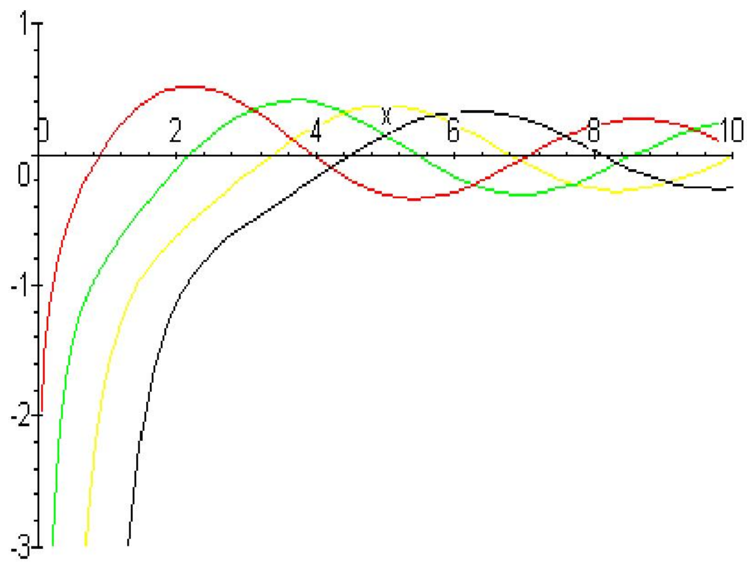
$$u(x) = x^{\alpha} Z_k(\beta x^{\nu})$$

o también

$$u''(x) + \alpha x^{\nu}\ u(x) = 0$$

con

$$u(x) = \sqrt{x} Z_{\frac{1}{\nu+2}}\left(\frac{2\sqrt{\alpha}}{\nu+2}x^{1+\frac{\nu}{2}}\right)$$



1.2. Relaciones de Recurrencia:

Las funciones de Bessel tienen las siguientes relaciones de recurrencia

$$\begin{aligned} xJ_{k+1}(x) - 2k\ J_k(x) + xJ_{k-1}(x) &= 0 \\ J_{k+1}(x) + 2J'_k(x) - J_{k-1}(x) &= 0 \end{aligned}$$

Para demostrar estas relaciones partimos por demostrar la siguiente identidad

$$\begin{aligned} \left[x^k J_k(x)\right]' &= x^k J_{k-1}(x) \\ \left[x^{-k} J_k(x)\right]' &= -x^{-k} J_{k+1}(x) \end{aligned}$$

De la expresión para $J_k(x)$ se obtiene

$$\begin{aligned} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+2k}\right]' &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, 2\,(n+k)\, x^{2n+2k-1}}{2^{2n+k}\Gamma(n+1)\,\Gamma(n+k+1)} \\ &= x^k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^{2n+(k-1)}}{2^{2n+(k-1)}\Gamma(n+1)\,\Gamma(n+k)} \\ &= x^k J_{k-1}(x) \end{aligned}$$

Unos cambios apropiados nos llevan a demostrar las segunda de las relaciones y al desarrollar las derivadas

$$\left[x^k J_k(x)\right]' = kx^{k-1} J_k(x) + x^k J_k'(x) = x^k J_{k-1}(x)$$
$$\left[x^{-k} J_k(x)\right]' = -kx^{-k-1} J_k(x) + x^{-k} J_k'(x) = -x^{-k} J_{k+1}(x)$$

Por lo cual

$$kJ_k(x) + xJ_k'(x) = xJ_{k-1}(x)$$
$$-kJ_k(x) + xJ_k'(x) = -xJ_{k+1}(x)$$

Al sumar y restar miembro a miembro obtenemos las relaciones de recurrencia. Es obvia la importancia que adquieren $J_1(x)$ y $J_0(x)$ para generar el resto de las funciones de Bessel.

1.3. Funciones de Bessel y Funciones Elementales

Las funciones de Bessel de órden semientero, $k = \frac{1}{2}$ se expresa como

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{x}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\,\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

pero como

$$\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right) = \left\{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\cdots\frac{2n+1}{2}\right\} = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}{2^n}$$

se encuentra que

$$\begin{aligned} J_{1/2}(x) &= \sqrt{\frac{x}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n\; n!\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)} x^{2n} \\ &= \frac{x}{\sqrt{2x}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}\left\{1 - \frac{x^2}{2\cdot 3} + \frac{x^4}{2\cdot 4\cdot 3\cdot 5} - \frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 3\cdot 5\cdot 7} + \cdots\right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2x}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}\left\{1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right\} = \frac{1}{\sqrt{2x}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \operatorname{sen} x \end{aligned}$$

Finalmente, y otra vez invocando a las propiedades de la función Gamma: $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \operatorname{sen} x$$

Equivalentemente se puede demostrar que

$$J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$$

y ahora utilizando las relaciones de recurrencia tendremos que

$$\begin{aligned} J_{3/2}(x) &= -J_{-1/2}(x) + \frac{1}{x} J_{1/2}(x) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\frac{\operatorname{sen} x}{x} - \cos x \right] \end{aligned}$$

Así mismo

$$\begin{aligned} J_{5/2}(x) &= -J_{1/2}(x) + \frac{3}{x} J_{3/2}(x) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\frac{3 \operatorname{sen} x}{x^2} - \frac{3 \cos x}{x} - \operatorname{sen} x \right] \end{aligned}$$

En general

$$\begin{aligned} J_{n+\frac{1}{2}}(x) &= (-1)^n \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{n+\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}^n}{(x\mathrm{d}x)^n} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} \right) \qquad n = 1, 2, 3, \cdots \\ J_{n+\frac{1}{2}}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{n+\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}^n}{(x\mathrm{d}x)^n} \left(\frac{\cos x}{x} \right) \qquad n = -1, -2, -3, \cdots \end{aligned}$$

Las funciones de Bessel de órden semientero son las únicas funciones de Bessel que pueden ser expresadas en términos de funciones elementales.

1.4. Reflexión:

Las funciones de Bessel cumplen con

$$J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x)$$

Para el caso $k = m$ entero positivo la Función de Bessel de primera especie toma la forma de

$$J_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \; (n+m)!} \left(\frac{x}{2} \right)^{2n+m}$$

Si $k = -m$ es un entero negativo los primeros m términos de la serie anterior se anulan ya que $\Gamma(n) \to \infty$ para $n = -1, -2, -3, \cdots$ y la serie se arma como

$$\begin{aligned} J_{-m}(x) &= \sum_{n=m}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \; (n-m)!} \left(\frac{x}{2} \right)^{2n+m} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{l+m}}{(l+m)! \; l!} \left(\frac{x}{2} \right)^{2l+m} \\ J_{-m}(x) &= (-1)^m J_m(x) \end{aligned}$$

1.5. Función Generatriz

La función generatriz para las Funciones de Bessel es

$$\mathcal{B}(x,t) = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}$$

desarrollando las dos series para las exponenciales

$$\mathrm{e}^{\dfrac{xt}{2}} = 1 + \frac{x}{2}t + \frac{x}{2^2 2!}t^2 + \cdots + \frac{x^n}{2^n n!}t^n + \cdots$$
$$\mathrm{e}^{\dfrac{x}{2t}} = 1 - \frac{x}{2}t^{-1} + \frac{x}{2^2 2!}t^{-2} + \cdots + \frac{(-1)^n x^n}{2^n n!}t^{-n} + \cdots$$

Por lo tanto multiplicando ambas series

$$\mathcal{B}(x,t) = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} = \left\{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n n!}t^n\right\}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2^n n!}t^{-n}\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\ t^n$$

1.6. Representación Integral para las Funciones de Bessel

En la expresión anterior para la función generatriz se realiza el siguiente cambio de varible $t = \mathrm{e}^{i\theta}$ de este modo

$$\mathrm{e}^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} = \mathrm{e}^{ix \operatorname{sen}\theta} = \cos(x \operatorname{sen}\theta) + i \operatorname{sen}(x \operatorname{sen}\theta)$$

y por lo tanto

$$\cos(x \operatorname{sen}\theta) + i \operatorname{sen}(x \operatorname{sen}\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\ \left[\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)\right]$$

igualando partes reales e imaginarias y recordando que $J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x)$, para anular los términos impares en la serie de la parte real y los pares en la de la parte imaginaria, podemos escribir

$$\cos(x \operatorname{sen}\theta) = J_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x)\cos(2n\theta)$$
$$\operatorname{sen}(x \operatorname{sen}\theta) = 2\sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1}(x)\operatorname{sen}([2n+1]\,\theta)$$

Multiplicando miembro a miembro en la primera de ellas por $\cos(2k\theta)$ (y por $\cos([2k+1]\,\theta)$) y la segunda por $\operatorname{sen}([2k+1]\,\theta)$ (y por $\operatorname{sen}(2k\theta)$). Integrando (en $0 \leq \theta \leq \pi$), también miembro a miembro y término por término en las series, se obtienen

$$\begin{aligned}
J_{2n}(x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos\left(x \operatorname{sen}\theta\right)\cos\left(2n\theta\right)\ \mathrm{d}\theta \\
0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos\left(x \operatorname{sen}\theta\right)\cos\left(\left[2n+1\right]\theta\right)\ \mathrm{d}\theta \\
J_{2n+1}(x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \operatorname{sen}\left(x \operatorname{sen}\theta\right)\operatorname{sen}\left(\left[2n+1\right]\theta\right)\ \mathrm{d}\theta \\
0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \operatorname{sen}\left(x \operatorname{sen}\theta\right)\operatorname{sen}\left(2n\theta\right)\ \mathrm{d}\theta
\end{aligned}$$

Sumando miembro a miembro primera con cuarta y segunda con tercera tendremos la expresión integral para las funciones de Bessel

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos\left(\cos\left(n\theta\right) - x\operatorname{sen}\theta\right)\ \mathrm{d}\theta$$

ya que todos sabemos que

$$\cos\left(n\theta - x\operatorname{sen}\theta\right) = \cos\left(2n\theta\right)\cos\left(x\operatorname{sen}\theta\right) + \operatorname{sen}\left(2n\theta\right)\operatorname{sen}\left(x\operatorname{sen}\theta\right)$$

1.7. Ortogonalidad de las Funciones de Bessel

1.7.1. Ortogonalidad:

Haciendo el caso particular de $\alpha = 0$ y $\nu = 1$ en la primera de las expresiones equivalentes para la ecuación de Bessel, tendremos

$$u''(x) + \frac{1}{x}u'(x) + \left[\beta^2 - \frac{k^2}{x^2}\right]u(x) = 0$$

donde

$$u(x) = J_k(\beta x)$$

multiplicando por x la ecuacion diferencial puede ser reescrita como

$$\left[xJ_k'(\beta x)\right]' + \left[\beta^2 x - \frac{k^2}{x}\right]J_k(\beta x) = 0$$

suponiendo k real y positivo, planteamos la ecuación para dos índices diferentes β_1 y β_2 por lo tanto quedan como

$$\begin{aligned}
\left[xJ_k'(\beta_1 x)\right]' + \left[\beta_1^2 x - \frac{k^2}{x}\right]J_k(\beta_1 x) = 0 \\
\left[xJ_k'(\beta_2 x)\right]' + \left[\beta_2^2 x - \frac{k^2}{x}\right]J_k(\beta_2 x) = 0
\end{aligned}$$

Multiplicando apropiadamente por $J_k(\beta_1 x)$ y $J_k(\beta_2 x)$, Integrando y restando miembro a miembro tendremos que

$$\begin{aligned}
\left(\beta_2^2-\beta_1^2\right)\int_0^1 xJ_k(\beta_1 x)J_k(\beta_2 x)\mathrm{d}x &= \int_0^1 \left\{J_k(\beta_2 x)\left[xJ_k'(\beta_1 x)\right]'-J_k(\beta_1 x)\left[xJ_k'(\beta_2 x)\right]'\right\}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left[J_k(\beta_2 x)xJ_k'(\beta_1 x)-J_k(\beta_1 x)xJ_k'(\beta_2 x)\right]'\mathrm{d}x \\
&= J_k(\beta_2 x)xJ_k'(\beta_1 x)-J_k(\beta_1 x)xJ_k'(\beta_2 x)\Big|_{x=0}^{x=1}
\end{aligned}$$

para β_i las raíces de los polinomios de Bessel, i.e. $J_k(\beta_i)=0$ podemos deducir que las funciones de Bessel son ortogonales

$$\left(\beta_i^2-\beta_j^2\right)\int_0^1 xJ_k(\beta_i x)J_k(\beta_j x)\mathrm{d}x \propto \delta_{ij}$$

Más aún partiendo de la ecuación de Bessel original se puede llegar a

$$\|J_k(\beta x)\|^2 = \frac{1}{2}\left[J_k'(\beta)\right]^2+\frac{\beta^2-k^2}{2\beta^2}\left[J_k(\beta)\right]^2$$