Funciones Especiales 2

1. Algunas funciones Especiales

1.1. Función Gamma e Integrales de Probabilidad

Es la generalización del factorial $n!$ el cual sólo está definido para enteros, mientras que $\Gamma(z)$ está definida para toda variable compleja z con parte real positiva.

$\Gamma(z)$ se define indistintamente como:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} t^{z-1} \mathrm{d}t \equiv (z-1)! \equiv \prod (z-1) \qquad \mathrm{Re}\, z > 0$$

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \cdots \cdot n}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)} n^z$$

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{z}{n}\right) \mathrm{e}^{-\frac{z}{n}}$$

donde n es un entero positivo y

$$\gamma = 0{,}577215664901\cdots$$

se conoce como la constante de Euler-Mascheroni:

También es frecuente encontrar $\Gamma(z)$ con algunas variantes cosméticas:

$$\Gamma(z) = 2\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2} t^{2z-1} \mathrm{d}t = \int_0^1 \left[\ln\left(\frac{1}{t}\right)\right]^{z-1} \mathrm{d}t = k^z \int_0^\infty \mathrm{e}^{-kt} t^{z-1} \mathrm{d}t$$

Para probar la equivalencia de las dos primeras definiciones inventamos las siguiente función de dos variables

$$F(z,n) = \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} \mathrm{d}t \qquad \mathrm{Re}\, z > 0$$

y como es conocido que

$$\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \equiv \mathrm{e}^{-t}$$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} F(z,n) = F(z,\infty) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} t^{z-1} \mathrm{d}t \equiv \Gamma(z)$$

Con lo cual queda demostrada la primera de propuestas de Euler.

Para construir la segunda partimos de la misma función $F(z,n)$ y un cambio estratégico de variable $u = \frac{t}{n}$.

$$F(z,n) = n^z \int_0^n (1-u)^n u^{z-1} \mathrm{d}u \qquad \mathrm{Re}\, z > 0$$

Un par de integraciones por partes nos llevan a comprobar

$$
\begin{aligned}
F(z,n) &= n^z \left\{ (1-u)^n \left. \frac{u^z}{z} \right|_0^1 + \frac{n}{z} \int_0^1 (1-u)^{n-1} u^z \mathrm{d}u \right\} \\
&= n^z \left\{ (1-u)^{n-2} u^{z+1} \left. \frac{n(n-1)}{z(z+1)} \right|_0^1 + \frac{n(n-1)}{z(z+1)} \int_0^1 (1-u)^{n-2} u^{z+1} \mathrm{d}u \right\}
\end{aligned}
$$

que el primer término se anula siempre. Repitiendo el proceso n veces

$$
\begin{aligned}
F(z,n) &= n^z \left\{ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{z(z+1)(z+2)(z+3)\cdots(z+n-1)} \right\} \int_0^1 u^{z+n-1} \mathrm{d}u \\
&= n^z \left\{ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{z(z+1)(z+2)(z+3)\cdots(z+n)} \right\}
\end{aligned}
$$

Una vez más, haciendo

$$
\lim_{n\to\infty} F(z,n) = F(z,\infty) = \lim_{n\to\infty} n^z \left\{ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{z(z+1)(z+2)(z+3)\cdots(z+n)} \right\} \equiv \Gamma(z)
$$

Se completa la equivalencia para la primera y segunda definiciones de Euler.

En particular, de la primera de las definiciones se tiene por integración directa

$$
\begin{aligned}
\Gamma(1) &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t = 1 \\
\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} t^{-1/2} \mathrm{d}t = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-u^2} \mathrm{d}u = \sqrt{\pi}
\end{aligned}
$$

mientras que de la segunda, si $z = n = 1, 2, 3, \cdots$, se obtiene

$$
\begin{aligned}
\Gamma(n+1) &= n! \\
\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) &= \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots(2n-1)}{2^n} \sqrt{\pi}
\end{aligned}
$$

Finalmente la tercera de las definiciones de la función $\Gamma(z)$ viene expresada en término de un producto infinito (Weierstrass). Este puede demostrarse partiendo de la segunda definición de Euler

$$
\begin{aligned}
\Gamma(z) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)} n^z \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{z} \prod_{m=1}^{n} \left(\frac{m}{m+z}\right) n^z = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{z} \prod_{m=1}^{n} \left(1+\frac{z}{m}\right)^{-1} n^z
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$
\frac{1}{\Gamma(z)} = z \lim_{n\to\infty} \prod_{m=1}^{n} \left(1+\frac{z}{m}\right) \mathrm{e}^{-z\ln n}
$$

Ahora bien, multiplicando y dividiendo por

$$\prod_{m=1}^{n} \mathrm{e}^{z/m} = \mathrm{e}^{z\left(\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m}\right)}$$

nos queda

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z\left\{\lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{z\left(\left(\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m}\right) - \ln n\right)}\right\}\left\{\lim_{n\to\infty} \prod_{m=1}^{n}\left(1+\frac{z}{m}\right)\mathrm{e}^{-z/m}\right\}$$

Donde, la serie exponente del primero de los términos converge a un valor constante y cual ha quedado bautizado como la constante de *Euler-Mascheroni*

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left\{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\frac{1}{n}-\ln n\right\} = \lim_{n\to\infty}\left\{\left(\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}\right)-\ln n\right\}$$

$$\gamma = 0{,}5772156649015328606065112\cdots$$

Con lo cual queda demostrada la tercera de las propuestas para expresar la Función Gamma

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)\mathrm{e}^{-\dfrac{z}{n}}$$

Es fácil comprobar las siguientes propiedades

$$\Gamma(z+1) = z\ \Gamma(z)$$

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \int_0^{\infty}\frac{x^{z-1}\mathrm{d}x}{(1+x)} = \frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi z}$$

$$2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\Gamma(2z)$$

La primera de ellas (la relación de recurrencia) es trivial y se obtiene integrando por partes la definición integral de Euler.

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-t}t^{z}\mathrm{d}t = z\ \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\Big|_0^{\infty} + z\ \int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t = z\Gamma(z)$$

El primer sumando de la integración por partes se anula siempre. Esta propiedad es válida $\forall z$ con $z \neq 0, -1, -2, \cdots$.

La segunda de las propiedades (fórmula de reflexión) se comprueba también partiendo de definición integral de Euler con el siguiente cambio de variable $t = u^2$.

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = 2\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-u^2}u^{2z-1}\mathrm{d}u\ 2\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-v^2}v^{1-2z}\mathrm{d}v$$

$$= 4\iint_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\left(u^2+v^2\right)}\left(\frac{u}{v}\right)^{2z-1}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

si ahora hacemos $u = \rho \cos\varphi$ y $v = \rho \operatorname{sen}\varphi$, la integral anterior queda como

$$\begin{aligned}\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) &= 4\int_0^\infty \rho \mathrm{e}^{-\rho^2}\ \mathrm{d}\rho\ \int_0^{\pi/2} \cot^{2z-1}\varphi \mathrm{d}\varphi \\ &= 4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\cot^{2z-1}\varphi\mathrm{d}\varphi\end{aligned}$$

Finalmente, si

$$\varphi = \operatorname{arccot}\sqrt{x}; \qquad \mathrm{d}\varphi = \frac{-\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}\,(1+x)}$$

nos queda

$$\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \int_0^\infty \frac{x^{z-1}\mathrm{d}x}{(1+x)} = \frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi z}$$

Es inmediato volver a comprobar

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Del mismo modo, si utilizamos además la relación de recurrencia encontramos

$$\Gamma(z)\,\Gamma(-z) = \frac{\pi}{-z\operatorname{sen}\pi z}$$

La *fórmula de duplicación* y puede comprobarse partiendo de la definición del límite de Euler, así

$$\frac{2^{2z-1}\Gamma(z)\,\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2z)} = \sqrt{\pi}$$

Hay que hacer notar que en el numerador sustituimos directamente las expresiones para del límite de Euler y en la del denominador, adicionalmente sustituimos n por $2n$

$$\Gamma(2z) = \lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\dots\cdot n}{2z\,(2z+1)\cdots(2z+n)}n^{2z} = \lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\dots\cdot 2n}{2z\,(2z+1)\cdots(2z+2n)}\,(2n)^{2z}$$

por lo cual se tiene la siguiente expresión dentro del argumento del límite

$$\frac{2^{2z-1}\left(\dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\dots\cdot n}{z\,(z+1)\,(z+2)\cdots(z+n)}n^z\right)\left(\dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\dots\cdot n}{\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(z+\frac{3}{2}\right)\cdots\left(z+\frac{1}{2}+n\right)}n^{z+\frac{1}{2}}\right)}{\left(\dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\dots\cdot 2n}{2z\,(2z+1)\,(2z+2)\cdots(2z+2n)}\,(2n)^{2z}\right)}$$

la cual se reacomoda como

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2z-1}\,(n!)^2\,2z\,(2z+1)\,(2z+2)\cdots(2z+2n)}{(2n)!\ z\left(z+\frac{1}{2}\right)(z+1)\left(z+\frac{3}{2}\right)(z+2)\cdots\left(z+\frac{1}{2}+n\right)(z+n)}\cdot\frac{n^{2z+\frac{1}{2}}}{(2n)^{2z}}$$

y

$$\lim_{n\to\infty}\frac{z\left(z+\frac{1}{2}\right)(z+1)\left(z+\frac{3}{2}\right)(z+2)\cdots\left(z+\frac{n}{2}\right)\left(2^{n-1}\right)}{z\left(z+\frac{1}{2}\right)(z+1)\left(z+\frac{3}{2}\right)(z+2)\cdots\left(z+\frac{1}{2}+n\right)(z+n)}\cdot\frac{2^{2z-1}\,(n!)^2}{(2n)!}\cdot\frac{n^{z+\frac{1}{2}}}{2^{2z}n^{2z}}$$

Entonces

$$\frac{2^{2z-1}\Gamma\left(z\right)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(2z\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(2^{n-2}\right)\left(n!\right)^{2}\sqrt{n}}{(2n)!}$$

por lo cual se deduce que el valor de lado izquierdo de la ecuación es independiente del valor de z por lo tanto es el mismo valor para cualquier z y lo evaluamos para $z=\frac{1}{2}$

$$\frac{2^{2z-1}\Gamma\left(z\right)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(2z\right)}=\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

con lo cual queda comprobada la fórmula de duplicación.

Otras propiedades que van quedar como curiosidad y sin demostración son:

$$\Gamma\left(nz\right)=\left(2\pi\right)^{(1-n)/2}n^{nz-\frac{1}{2}}\prod_{k=0}^{n-1}\left(z+\frac{k}{n}\right)$$

$$\binom{z}{w}=\frac{z!}{w!(z-w)!}=\frac{\Gamma\left(z+1\right)}{\Gamma\left(w+1\right)\Gamma\left(z-w+1\right)}$$

A partir de $\Gamma\left(z\right)$ se definen otras funciones especiales, las cuales se expresan conjuntamente con sus propiedades como

1.2. La Funciones Digamma y Poligamma

,

Para evitar tratar con derivadas de los factoriales es costumbre trabajar con sus derivadas logarítmicas. A partir de la segunda definición

$$\begin{aligned}\Gamma\left(z+1\right)=z!&=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot2\cdot3\cdot\dots\cdot n}{\left(z+1\right)\left(z+2\right)\cdots\left(z+n\right)}n^{z}\\ \ln\left(z!\right)&=\ln\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot2\cdot3\cdot\dots\cdot n}{\left(z+1\right)\left(z+2\right)\cdots\left(z+n\right)}n^{z}\right)\\ &=\lim_{n\to\infty}\left(\ln\left(n!\right)+z\ln n-\ln\left(z+1\right)-\ln\left(z+2\right)-\cdots-\ln\left(z+n\right)\right)\end{aligned}$$

ahora derivando,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\ln\left(z!\right)\equiv\mathbf{F}(z)=\lim_{n\to\infty}\left(\ln n-\frac{1}{(z+1)}-\frac{1}{(z+2)}-\cdots-\frac{1}{(z+n)}\right)$$

y finalmente acomodando, para llegar a la definición más conocida

$$\mathbf{F}(z)=-\gamma-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(z+n)}-\frac{1}{n}\right)$$

También se le conoce como función Psi

$$\psi(z)=\frac{\Gamma'\left(z\right)}{\Gamma\left(z\right)}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\ln\left(\Gamma\left(z\right)\right)\equiv\mathbf{F}(z-1)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\ln\left((z-1)!\right)$$

con las siguientes propiedades

$$\psi(z+1) = \frac{1}{z} + \psi(z)$$
$$\psi(z-1) - \psi(z) = \pi \cot \pi z$$
$$\psi(z) + \psi\left(z + \frac{1}{2}\right) + 2\ln 2 = 2\psi(2z)$$

De donde se pueden deducir

$$\psi(1) = \Gamma'(1) = \gamma$$

La función $\psi(z)$ puede ser expresada en términos de integrales definidas, para ello notamos que

$$\Gamma'(z) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} t^{z-1} \ln t \; \mathrm{d}t$$

y sustituyendo la identidad de Frullani

$$\ln t = \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-xt}}{x} \; \mathrm{d}x$$

tendremos

$$\begin{aligned}
\Gamma'(z) &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} t^{z-1} \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-xt}}{x} \; \mathrm{d}x \; \mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x} \int_0^\infty \left(\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-xt}\right) \mathrm{e}^{-t} t^{z-1} \mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x} \mathrm{e}^{-x} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} t^{z-1} \mathrm{d}t - \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t(x+1)} t^{z-1} \mathrm{d}t \\
&= \Gamma(z) \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x} \left[\mathrm{e}^{-x} - (x+1)^{-z}\right]
\end{aligned}$$

ya que $\Gamma(z) = k^z \int_0^\infty \mathrm{e}^{-kt} t^{z-1} \mathrm{d}t$ y por lo tanto

$$\psi(z) = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x} \left[\mathrm{e}^{-x} - (x+1)^{-z}\right]$$

También daremos (sin demostración) otras expresiones

$$\psi(z) = \int_0^\infty \left(\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t} - \frac{\mathrm{e}^{-tz}}{1 - \mathrm{e}^{-t}}\right) \mathrm{d}t$$
$$\psi(z) = -\gamma + \int_0^1 \frac{1 - x^{z-1}}{1 - x} \mathrm{d}x$$

La Función Poligamma se obtiene derivando en forma repetida la Función Digamma

$$\psi^{(m)}(z+1) = \mathbf{F}^{(m)}(z) = \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}z^m} \mathbf{F}(z) = (-1)^{m+1} m! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^{m+1}} \qquad m = 1, 2, 3 \cdots$$

y cuya serie puede ser expresada en términos de la función Zeta de Riemman

$$\zeta(m) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^m}$$

como

$$\mathbf{F}^{(m)}(0) = -1)^{m+1} m! \zeta(m+1)$$

de esta forma es posible desarrollar en serie de Maclaurin

$$\ln(n!) = -\gamma + \frac{z^2}{2}\zeta(2) - \frac{z^3}{3}\zeta(3) + \cdots + (-1)^n \frac{z^n}{n}\zeta(n) + \cdots$$

1.3. La Aproximación de Stirling

El comportamiento asintótico de las funciones especiales será tratado en una clase aparte. Pero la importancia de la Aproximación de Stirling obliga a que se trate en este punto. Supongamos que consideramos el caso $z \equiv x \in \Re$. Por lo cual estamos interesados en el caso $x \gg 1$. Partimos de

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x}\Gamma(x+1) = \frac{1}{x}\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t} t^x \mathrm{d}t = \frac{1}{x}\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t + x\ln t}\mathrm{d}t$$

haciendo $t = xu$ tenemos que

$$\Gamma(x) = x^x \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x(u-\ln u)}\mathrm{d}u$$

Ahora bien, el integrando tendrá su máximo en $u = 1$ donde la exponencial tiene su mínimo y es entorno a ese punto que desarrollará en series de Taylor

$$u - \ln u = 1 + \frac{1}{2}(u-1)^2 - \frac{1}{3}(u-1)^3 + \frac{1}{4}(u-1)^4 + \cdots$$

por lo cual

$$\Gamma(x) = x^x \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x(u-\ln u)}\mathrm{d}u \approx x^x \int_0^{\infty} \mathrm{d}u\ \mathrm{e}^{-x\left(1+\frac{1}{2}(u-1)^2 - \frac{1}{3}(u-1)^3 + \cdots\right)}\mathrm{d}u$$

Otro cambio de variable $v = \sqrt{x}(u-1)$ nos lleva

$$\Gamma(x) \approx \frac{x^x \mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}} \int_{-\sqrt{x}}^{\infty} \mathrm{d}v \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}v^2} \exp\left(\frac{1}{3\sqrt{x}}v^3 - \frac{1}{4x}v^4 + \frac{1}{5x^{\frac{3}{2}}}v^5 - \cdots\right)$$

Para valores $x \gg 1$ se expande, en series de Taylor los exponenciales que contengan términos $\frac{1}{\sqrt{x}}$

$$\Gamma(x) \approx \frac{x^x \mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}v \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}v^2} \left\{1 + \left(\frac{1}{3\sqrt{x}}v^3 - \frac{1}{4x}v^4 + \frac{1}{5x^{\frac{3}{2}}}v^5 - \cdots\right) + \right.$$
$$+ \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{3\sqrt{x}}v^3 - \frac{1}{4x}v^4 + \frac{1}{5x^{\frac{3}{2}}}v^5 - \cdots\right)^2 +$$
$$\left. + \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{3\sqrt{x}}v^3 - \frac{1}{4x}v^4 + \frac{1}{5x^{\frac{3}{2}}}v^5 - \cdots\right)^3 + \cdots \right\}$$

Finalmente, utilizando que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}v \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}v^2} v^n = \begin{cases} \sqrt{2\pi} & n = 0 \\ \sqrt{2\pi} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (n-1) & n = 2k \\ 0 & n = 2k-1 \end{cases}$$

e integrando término a término, tendremos que

$$\Gamma(x) \approx \sqrt{\frac{2\pi}{x}} x^x \mathrm{e}^{-x} \left\{ 1 + \frac{1}{12x} + \frac{1}{288\ x^2} + \cdots \right\}$$

1.4. La función Beta

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} \, \mathrm{d}t \qquad \operatorname{Re} x > 0 \ \wedge \ \operatorname{Re} y > 0$$

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x) \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

1.4.1. La Función Integral de Probabilidad

La función Integral de Probabilidad para una variable compleja arbitraria z como

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t$$

Obviamente $\Phi(0) = 0$ y $\Phi(\infty) = 1$. A partir de esta función se define la **Función Error y su complemento**

$$\operatorname{erf}(z) = \int_0^z \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Phi(z)$$

$$\operatorname{erf} c(z) = \int_z^z \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[1 - \Phi(z) \right]$$

Función Gamma Incompleta $\gamma(z, \alpha)$ **y**
Función Gamma Complementaria $\Gamma(z, \alpha)$

$$\gamma(z, \alpha) = \int_0^\alpha \mathrm{e}^{-t} t^{z-1} \mathrm{d}t$$

$$\Gamma(z, \alpha) = \int_\alpha^\infty \mathrm{e}^{-t} t^{z-1} \mathrm{d}t$$

las cuales claramente cumplen con

$$\gamma(z,\alpha)+\Gamma(z,\alpha)=\Gamma(z)$$

y resumen

$$\gamma(z+1,\alpha)=z\gamma(z,\alpha)-\alpha^z\mathrm{e}^{-\alpha}$$
$$\Gamma(z+1,\alpha)=z\Gamma(z,\alpha)+\alpha^z\mathrm{e}^{-\alpha}$$