Integrales de Fourier

Otro grupo de integrales que pueden ser evaluadas mediante el Teorema de Residuos son las integrales de Fourier. Integrales que involucran funciones racionales, $f(x)$, que satisfacen las condiciones expuestas anteriormente y funciones senos y consenos. Integrales del tipo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ f(x) \left\{ \begin{array}{c} \cos mx \\ \mathrm{sen}\ mx \end{array} \right\} \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ f(x) e^{imx} \rightarrow \oint_C \mathrm{d}z\ f(z) e^{imz} = 2i\pi \sum_{j=1}^{m} \mathrm{Res} \left| f(z) e^{imz} \right|_{z=z_{0j}} \tag{1}$$

Con $m > 0$ y los polos correspondientes a los residuos que se muestran en el lado derecho, están ubicados en el semiplano complejo con $y > 0$. Es claro que el circuito seleccionado es Γ que muestra el cuadrante II de la figura **??**.

Equivalentemente, igualando partes reales e imaginarias

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ f(x) \cos mx &= -2\pi \sum_{j=1}^{m} \mathrm{Im}\ \mathrm{Res} \left| f(z) e^{imz} \right|_{z=z_{0j}} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ f(x) \mathrm{sen}\ mx &= 2\pi \sum_{j=1}^{m} \mathrm{Re}\ \mathrm{Res} \left| f(z) e^{imz} \right|_{z=z_{0j}} . \end{aligned}$$

Otra vez, el circuito C se separa en una semicircunferencia Γ y el eje real.

Para demostrar que para evaluar las integrales de Fourier (**??**) se requiere la suma de los residuos nos convencemos que la integral a lo largo de la semicircunferencia se anula. Esto es fácil si comprobamos que $y > 0$ y $m > 0$, entonces si $z = x + iy$ tendremos que

$$|e^{imz}| = |e^{imx}||e^{-my}| = e^{-my} < 1 \quad \Rightarrow |f(z)e^{imz}| = |f(z)| \leq |f(z)|\ |e^{imz}|$$

con lo cual redujimos al de una función racional.

Ejemplo: Comprobemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x\ \cos mx}{x^2 + k^2} = \frac{\pi}{k} e^{-km} \qquad \text{y} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x\ \mathrm{sen}\ mx}{x^2 + k^2} = 0$$

es fácil ver que el polo simple de la continuación analítica de $f(x)$ es $z_0 = ik$ y su residuo será

$$f(z) = \frac{e^{imz}}{z^2 + k^2} \quad \Rightarrow z_0 = ik \quad \Rightarrow \mathrm{Res}\ \left. \frac{e^{imz}}{z^2 + k^2} \right|_{z=ik} = \left. \frac{e^{imz}}{2z} \right|_{z=ik} = \frac{e^{-mk}}{2ik}$$

y por lo tanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \frac{e^{imx}}{x^2 + k^2} = 2i\pi \frac{e^{-mk}}{2ik} = \frac{\pi}{k} e^{-mk}$$

Ejemplo: Evalue

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \frac{x \operatorname{sen} \pi x}{x^2+2x+5}$$

Partimos de la continuación analítica de

$$f(x) \to f(z) = \frac{z e^{iz\pi}}{z^2+2z+5} \quad \Rightarrow z_{\pm 0} = -1 \pm 2i \quad \Rightarrow \oint_C \mathrm{d}z \frac{z e^{iz\pi}}{z^2+2z+5} = \operatorname{Res} \left. \frac{z e^{iz\pi}}{z^2+2z+5} \right|_{z=-1+2i}$$

ya que ese es el único polo encerrado por la circulación Γ. Calculando el residuo tendremos

$$\operatorname{Res} \left. \frac{z e^{iz\pi}}{z^2+2z+5} \right|_{z=-1+2i} = \lim_{z \to -1+2i} \left((z+1-2i) \frac{z e^{iz\pi}}{z^2+2z+5} \right) = (-1+2i) \frac{e^{-\pi(2+i)}}{4i}$$

con lo cual

$$\oint_C \mathrm{d}z \frac{z e^{iz\pi}}{z^2+2z+5} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \frac{x \cos \pi x}{x^2+2x+5} + i \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \frac{x \operatorname{sen} \pi x}{x^2+2x+5} = 2i\pi(-1+2i) \frac{e^{-\pi(2+i)}}{4i} = \frac{\pi}{2}(1-2i) e^{-2\pi}$$

igualando parte real e imaginaria tendremos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \frac{x \cos \pi x}{x^2+2x+5} = \frac{\pi}{2} e^{-2\pi} \qquad \text{y} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \frac{x \operatorname{sen} \pi x}{x^2+2x+5} = -\pi e^{-2\pi}$$

Ejercicios: Compruebe que

$$\text{Para } m > 0 \quad \int_0^{\infty} \mathrm{d}x \frac{\cos mx}{(x^2+1)^2} = \frac{\pi e^{-m}(1+m)}{4} \qquad \text{y} \qquad \int_0^{\infty} \mathrm{d}x \frac{\cos 2\pi x}{x^4+x^2+1} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} e^{-\pi/\sqrt{3}}$$

0.1. Otras Integrales Impropias

Existen integrales definidas para las cuales el integrando se hace infinito para un determinado punto en el rango de integración. Esto es, en general

$$\lim_{x \to x_0} |f(x)| \to \infty \quad \Rightarrow \int_a^b \mathrm{d}x\ f(x) = \lim_{\zeta \to 0} \int_a^{x_0-\zeta} \mathrm{d}x\ f(x) + \lim_{\xi \to 0} \int_{x_0+\xi}^b \mathrm{d}x\ f(x)$$

donde ζ y ξ tienden a cero de forma independiene, es decir, ambos límites se efectuan independientemente. Ahora bien, puede darse el caso que uno o ambos límites no existan pero si existe

$$\lim_{\epsilon \to 0} \left(\int_a^{x_0-\epsilon} \mathrm{d}x\ f(x) + \lim_{\xi \to 0} \int_{x_0+\epsilon}^b \mathrm{d}x\ f(x) \right) \quad \Leftrightarrow \quad V.P. \int_a^b \mathrm{d}x\ f(x)$$

Diremos entonces que existe el *Valor Principal de Cauchy* para esa integral. La estrategia en estos casos será diseñar un circuito tal que evite los polos de la extensiíon analítica de la función. Normalmente se establece este recorrido rodeando los polos con arcos de circunferencia cuyos radios luego tenderán a cero. Veamos con un ejemplo esta estrategia de circunsnavegación.

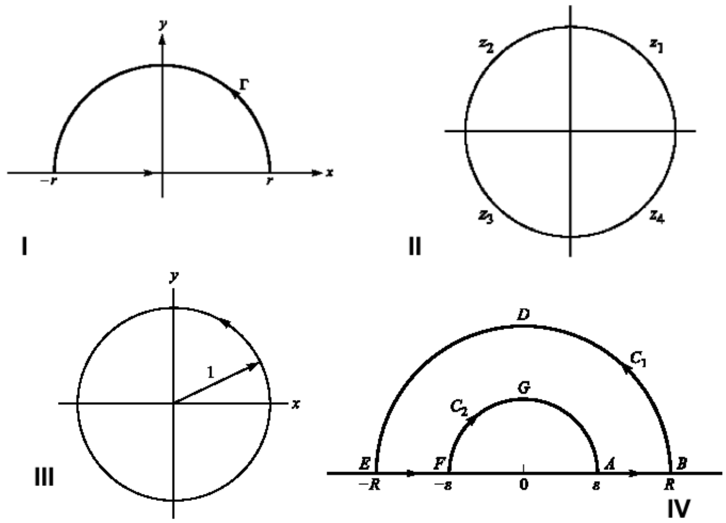

Figura 1: Circuitos y evaluación de integrales reales, impropias

Ejemplo: Consideremos que queremos evaluar la siguiente integral

$$\int_0^\infty \mathrm{d}x \, \frac{\operatorname{sen} x}{x} \quad \leftrightarrow \quad \lim_{x\to -0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

Si bien el límite está definido, cuando hacemos la extensión analítica[1] $f(x) = \operatorname{sen} x/x \to f(z) = e^{iz}/z$ la función compleja presenta un polo simple en $z = 0$, con lo cual la integral compleja presenta un polo en la región de integración. Esto es

$$\int_0^\infty \mathrm{d}x \, \frac{\operatorname{sen} x}{x} \quad \to \oint_C \mathrm{d}z \, \frac{e^{iz}}{z} = \int_{-R}^{-\epsilon} \mathrm{d}x \, \frac{e^{ix}}{x} + \int_{C_2} \mathrm{d}z \, \frac{e^{iz}}{z} + \int_{\epsilon}^{R} \mathrm{d}x \, \frac{e^{ix}}{x} + \int_{C_1} \mathrm{d}z \, \frac{e^{iz}}{z} = 0$$

donde hemos construido un circuito que rodea el polo $z = 0$ (cuadrante IV de la figura **??**.). Es claro que $\oint_C \mathrm{d}z \, \frac{e^{iz}}{z} = 0$ porque la región no contiene ningún polo.

Ahora mostraremos que $\int_{C_1} \mathrm{d}z \, \frac{e^{iz}}{z} \to 0$, cuando $R \to \infty$. Para ello, convertimos

$$z \ = \ Re^{i\theta} \ \Rightarrow \ \mathrm{d}z/z \ = \ i\mathrm{d}\theta \,,$$

[1] Nótese que la extensión analítica ha sido $f(x) = \operatorname{sen} x/x \to f(z) = e^{iz}/z$ y no $f(x) = \operatorname{sen} x/x \to f(z) = \operatorname{sen} z/z$ La razón de esta selección se fundamenta en el comportamiento patológico (oscilante) de la función seno en infinito.

entonces

$$\left|\int_{C_1} \mathrm{d}z\ \frac{e^{iz}}{z}\right| = \left|\int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta\ i e^{iz}\right| \leq \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta\ |e^{iz}| = \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta\ \underbrace{|e^{iR\cos\theta}|}_{1}|e^{-R\mathrm{sen}\,\theta}| = \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta\ e^{-R\mathrm{sen}\,\theta}$$

con lo cual

$$\mathcal{I}_1 = \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta\ |e^{iz}| = \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta\ e^{-R\mathrm{sen}\,\theta} = 2\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta\ e^{-R\mathrm{sen}\,\theta} = 2\left[\int_0^{\zeta} \mathrm{d}\theta\ \underbrace{e^{-R\mathrm{sen}\,\theta}}_{I_1} + \int_{\zeta}^{\pi/2} \mathrm{d}\theta\ \underbrace{e^{-R\mathrm{sen}\,\theta}}_{I_2}\right]$$

para $0 \leq \zeta \leq \pi/2$.

Es claro que $e^{-R\mathrm{sen}\,\theta}$ es una función decreciente en θ y como estamos tratando de demostrar que la integral a lo largo del circuito se anula $\mathcal{I}_1 \to 0$, podremos considerar los máximos valores para I_1 y I_2 en el entorno de integración y fijarlos como constantes, al hacer esto tendremos lo máximos valores que podrán tomar las integrales respectivas. Los máximos valores para I_1 y I_2, son, 1 y $e^{-R\zeta}$.

Entonces,

$$\mathcal{I}_1 = \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta\ |e^{iz}| \leq 2\left[\int_0^{\zeta} \mathrm{d}\theta + e^{-R\mathrm{sen}\,\zeta}\int_{\zeta}^{\pi/2} \mathrm{d}\theta\right] = 2\left[\zeta + e^{-R\mathrm{sen}\,\zeta}\left(\frac{\pi}{2} - \zeta\right)\right] < 2\zeta + \pi e^{-R\mathrm{sen}\,\zeta}$$

Al considerar que $\zeta \to 0$ y $R \to \infty$ comprobamos que $\mathcal{I}_1 \to 0$.

Seguidamente nos toca demostrar que $\mathcal{I}_2 = \int_{C_2} \mathrm{d}z\ \frac{e^{iz}}{z} \to 0$ cuando $\epsilon \to 0$. Para este caso $z = \epsilon e^{i\theta}$ y como siempre, $\mathrm{d}z/z\ =\ i\mathrm{d}\theta$, entonces la integral

$$\mathcal{I}_2 = \int_{C_2} \mathrm{d}z\ \frac{e^{iz}}{z} = \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta\ i e^{i\epsilon \exp(i\theta)} \quad \Rightarrow \lim_{\epsilon\to 0} \mathcal{I}_2 = \lim_{\epsilon\to 0}\int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta\ i e^{i\epsilon\exp(i\theta)} = i\pi$$

Esto implica que

$$\oint_C \mathrm{d}z\ \frac{e^{iz}}{z} = \int_{-R}^{-\epsilon} \mathrm{d}x\ \frac{e^{ix}}{x} + i\pi + \int_{\epsilon}^{R} \mathrm{d}x\ \frac{e^{ix}}{x} = 0 \quad \underbrace{\Rightarrow}_{x\to -x} \quad \int_{\epsilon}^{R} \mathrm{d}x\ \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x} + i\pi = 0$$

con lo cual es claro que

$$\int_{\epsilon}^{R} \mathrm{d}x\ \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x} = -i\pi \quad \Rightarrow 2i\int_{\epsilon}^{R} \mathrm{d}x\ \frac{\mathrm{sen}\ x}{x} = -i\pi \quad \Rightarrow \int_0^{\infty} \mathrm{d}x\ \frac{\mathrm{sen}\ x}{x} = \frac{\pi}{2}$$

donde hemos hecho los límites $R \to \infty$ y $\epsilon \to 0$.

Ejercicios: Comprobar las evaluaciones para las siguientes integrales

1. $$\int_0^\infty \mathrm{d}x \,\mathrm{sen}\, x^2 = \int_0^\infty \mathrm{d}x \,\cos\, x^2 = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}$$

2. $$\int_0^\infty \mathrm{d}x \,\frac{\ln x}{x^4+1} = -\frac{\pi^2\sqrt{2}}{16}; \qquad \int_0^\infty \mathrm{d}x \,\frac{(\ln x)^2}{x^4+1} = \frac{3\pi^3\sqrt{2}}{16}$$

3. $$\int_0^\infty \mathrm{d}x \,\frac{x^{-p}}{x^2+2x\cos\alpha+1} = \left(\frac{\pi}{\mathrm{sen}\; p\pi}\right)\left(\frac{\mathrm{sen}\; p\alpha}{\mathrm{sen}\;\alpha}\right)$$