Métodos Matemáticos 2,
Tarea 1
Series por Todos Lados.
Fecha de Entrega 10 Octubre 2008

1. A cuánto asciende la suma de los número pares desde 1000 hasta el 2000

2. Encuentre las expresión para las sumas parciales S_N de los primeros N términos para las siguientes series
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-2)^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{3^n}$$
En cada caso determine si la serie es convergente, divergente u oscilatoria.

3. Pruebe que
$$\cos\theta + \cos(\theta+\alpha) + \cdots + \cos(\theta + n\alpha) = \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(n+1)\alpha}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}\alpha} \cos\left(\theta + \frac{1}{2}n\alpha\right)$$

4. Determine el entorno de valores de $x \in \mathbb{R}$ para el cual convergen las siguientes series.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{sen} x)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^x \quad \sum_{n=1}^{\infty} e^{nx}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} (\ln n)^x.$$

5. Un interferómetro de Fabry-Pérot [1] consiste en dos placas paralelas (semi) reflectoras. El rayo de luz entra y se refleja entre las placas y, para cada reflexión existe una trasmisión parcial de al señal que emerge del interferómetro. Encuentre la intensidad $|B|^2$ de la onda emergente si su amplitud puede ser escrita como
$$B = A(1-r)\sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{in\phi} \quad \text{con } r \text{ y } \phi \text{ cantidades reales}$$

6. Evalue
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^3}\left(\operatorname{cosec} x - \frac{1}{x} - \frac{x}{6}\right)\right)$$

7. Utilizando la expansión de Taylor hasta orden 5 encuentre el valor aproximado para $(17)^{1/4}$ y $(26)^{1/5}$

8. El desplazamiento en el eje x, de una partícula de masa en reposo m_0 sometida a una fuerza gravitacional constante $m_0 g$ puede expresarse como
$$x = \frac{c^2}{g}\left[\sqrt{1 + \left(g\frac{t}{c}\right)^2} - 1\right] \quad \text{donde se incluyen efectos relativistas}$$
Encuentre el desplazamiento expresado como una serie de potencias en t y compárela con la expresión clasica $x = \frac{1}{2}gt^2$

[1] ver en http://en.wikipedia.org/wiki/Fabry-Perot_interferometer

9. En la teoría cuántica, un sistema de osciladores, cada uno con una frecuencia fundamental ν tiene una energía promedio
$$\bar{E} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n\nu h e^{-nx}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}}$$
donde $x = \frac{h\nu}{kT}$ siendo h la constante de Planck y k la de Boltzmann. Pruebe que
   - ambas series convergen.
   - si $T \gg 1 \Rightarrow \bar{E} \approx kT$
   - si $T \ll 1 \quad \Rightarrow \bar{E} \approx h\nu e^{-x}$

10. En análisis numérico se convierten las derivadas en sumas de diferencias (se conoce como métodos de diferencias finitas) Deduzca el error que se comete al aproximar
$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\psi(x) \approx \frac{1}{h^2}\left(\psi(x+h) - 2\psi(x) + \psi(x-h)\right)$$

11. Utilizando Maple considere la siguiente serie
$$S = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{n^2}{3-n^2}$$
   a) Grafique el valor de la suma para $j = 5, 7, 10, 20, 11$
   b) Encuentre el valor de la suma cuando $j \to \infty$

12. Utilizando MapleV
   a) grafique $f(x) = \frac{1}{3}\left(\text{sen}\,(x) + \cos(x)\right)$, alrededor de $x = 0$
   b) en la misma gráfica incluya graficas para la aproximación de Taylor de esa funci'on, para: segundo orden, cuarto orden y séptimo orden.
   c) Para decidir cuan aproximada es su aproximación es medir el error
$$\epsilon \approx \|f(x) - f_{Taylor}(x)\|$$
   ¿ Cuál es el entorno de valores de x para el cuál al aumentar el grado del polinomio de aproximación el error disminuye ?

.