Métodos Matemáticos 2,
Tarea 2
Serie de funciones y Transformada de Fourier.
Fecha de entrega 4 noviembre 2008

1. Los Polinomios Asociados de Laguerre, vienen definidos por

$$L_n^m(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{(n+m)!}{k!(n-k)!(k+m)!} x^k \quad \Leftrightarrow \quad L_n^m(x) = (-1)^m \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m} L_{n+m}(x)$$

   siendo los $L_k(x)$ los polinomios de Laguerre de siempre

   a) A partir de la primera de las definiciones anteriores compruebe la fórmula de Rodrigues para los Polinomios asociados de Laguerre

$$L_n^m(x) = \frac{e^x x^{-m}}{n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \left(x^{m+n} e^{-x} \right)$$

   b) A partir de la segunda defininción pruebe las siguientes relaciones de recurrencia

   - $$(n+1)L_{n+1}^m(x) = (2n+m+1-x)L_n^m(x) - (n+m)L_{n-1}^m(x)$$
   - $$x \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} L_n^m(x) = nL_n^m(x) - (n+m)L_{n-1}^m(x)$$

2. Use Maple para calcular los pesos y las abscisas para $N = 10$, es decir para una aproximación de 10 puntos de Gauss-Legendre y con ellos evalue las integrales

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \; x^{2n} \qquad \text{para } n = 1, 2, 3, \cdots 20.$$

   y

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \; e^{-ax} \qquad \text{para } 1 \leq x \leq 50$$

   En cada caso determine el error cometido. Cambie la precisión de operación de Maple (`Digits`) y el número de puntos y compruebe como la precisión aumenta cuando n se acerca a n.

3. Considere la siguiente integral

$$I = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \mathrm{d}t \, \frac{\mathrm{sen}t}{t}$$

   a) Calcule su valor por cuadratura de Gauss en término de Polinomios de Legendre con 12 cifras significativas

   b) Verifique su resultado por el siguiente método.

   - Expanda el integrando en series de potencias
   - Integre término a término
   - Evalue la serie hasta la precisión deseada

4. Considere la siguiente función
$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x \leq 0 \\ x & -0 \leq x < \pi \end{cases}$$
   - Determine la expresión de su expansión en series de Fourier
   - Calcule el valor de $\frac{\pi^2}{8}$ con 12 cifras significativas
   - Integre la serie y confirme su valor

5. Encuentre la serie compleja de Fourier para una función, $y(x) = \cosh x$, periódica con $T = 2\pi$ y definida en el rango $-\pi \leq x \leq \pi$. Luego al evaluar $x = 0$ pruebe que
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\sinh x} - 1\right)$$

6. Encuentre la transformada de Fourier para la función $f(t) = \exp(-|t|)$ para luego
   a) mostrar que
$$\frac{\pi}{2}\exp(-|t|) = \int_0^{\infty} \mathrm{d}\omega \, \frac{\cos \omega t}{1+\omega^2}$$
   b) Muestre que para esta función y su transformada (y para todas) se cumple la igualdad de Parseval
$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t \, |f(t)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega \, |f(\omega)|^2$$

7. Dados $N = 2, T = 2\pi$ y $f(t_k) = \operatorname{sen} t_k$ encuentre
   a) $F(\omega_m)$, para $m = 0, 1, 2, 3$
   b) reconstruya $f(t_k)$ a partir de $F(\omega_m)$ y muestre la replicación para ω_1 y ω_3
   c) Aumente el número de puntos $N = 4$, repita los dos puntos anteriores y estudie los cambios en la replicación.