

Métodos Matemáticos 2

Aplicaciones de Ecuaciones Diferenciales de Orden Superior.

L. A. Núñez*

*Centro de Astrofísica Teórica,
Departamento de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad de Los Andes, Mérida 5101, Venezuela*

*y
Centro Nacional de Cálculo Científico
Universidad de Los Andes (CECALCULA),
Corporación Parque Tecnológico de Mérida,
Mérida 5101, Venezuela*

Mérida, Septiembre 2003. Versión α

Índice

1. Mecánica y Electricidad	2
2. Oscilaciones libres no amortiguadas	2
3. Oscilaciones Libres Amortiguadas	3
4. Oscilaciones Forzadas	6
4.1. Oscilaciones Forzadas no amortiguadas	6
4.1.1. Amplitud modulada $\varpi \neq \omega_0$	6
4.1.2. Resonancia $\varpi = \omega_0$	7
4.2. Oscilaciones Forzadas amortiguadas	8
5. Movimiento alrededor de un punto de equilibrio	10
6. Péndulo Simple con desplazamiento finito.	12
6.0.1. Disgresión Elíptica	21
6.0.2. ¿ Cuán buena es la aproximación lineal ?	23
6.1. El Péndulo Físico: Integración Numérica	24

*e-mail: nunez@ula.ve

1. Mecánica y Electricidad

Una de las más famosas ecuaciones diferenciales, lineales, ordinaria con coeficientes constantes es

$$\alpha \ddot{u} + \beta \dot{u} + \gamma u \equiv \alpha \frac{d^2u}{dt^2} + \beta \frac{du}{dt} + \gamma u = \Lambda(t)$$

La cual utiliza para describir sistemas mecánicos y toma la forma

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \eta \frac{dx}{dt} + kx = F(t) \quad \text{donde} \quad \begin{cases} x & \Rightarrow \text{Desplazamiento} \\ \frac{dx}{dt} & \Rightarrow \text{Velocidad} \\ m & \Rightarrow \text{masa} \\ \eta & \Rightarrow \text{Constante de Amortiguamiento} \\ k & \Rightarrow \text{Constante Elástica} \\ F(t) & \Rightarrow \text{Fuerza Aplicada} \end{cases}$$

y circuitos eléctricos

$$L \frac{d^2Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = E(t) \quad \text{donde} \quad \begin{cases} Q & \Rightarrow \text{Carga Eléctrica} \\ \frac{dQ}{dt} = I & \Rightarrow \text{Intensidad de Corriente} \\ L & \Rightarrow \text{Inductancia} \\ R & \Rightarrow \text{Resistencia} \\ C & \Rightarrow \text{Capacitancia} \\ E(t) & \Rightarrow \text{Fuerza Electromotriz} \end{cases}$$

Analicemos la ecuación que describe sistemas mecánicos y dejamos la que describe sistemas eléctricos para un análisis posterior. El primero de los casos a analizar será el de las oscilaciones libres, vale decir $F(t) = 0$, lo cual en el lenguaje de las ecuaciones diferenciales se traduce a ecuaciones diferenciales homogéneas. En contraste, si $F(t) \neq 0$, es decir, el caso inhomogéneo, estaremos describiendo oscilaciones forzadas.

2. Oscilaciones libres no amortiguadas

Analicemos pues del caso del oscilador armónico libre, i.e.

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t) \quad \text{con} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

ω_0 se denomina la frecuencia natural de oscilación y C_1 y C_2 las constantes de integración que se determinan de las condiciones iniciales. Es claro que

$$\text{si} \quad \begin{cases} C_1 = A \cos \delta \\ C_2 = A \sin \delta \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t) \quad \Leftrightarrow \quad x(t) = A \cos(\omega_0 t + \delta)$$

con R la amplitud y δ en ángulo de fase. Obviamente, el período del movimiento será

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Ejemplo Como un ejemplo analicemos el caso de un sistema en el cual $m = 0,1$ Kg. y $k = 0,4$ N/m. En este caso la frecuencia angular $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 2$ rad/sg. La ecuación diferencial que describe este movimiento será

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 0 \quad \wedge \quad \begin{cases} x(0) = 1; & \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = 0; & \Rightarrow x(t) = \cos(2t) \\ x(0) = 4; & \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = 0 & \Rightarrow x(t) = 4 \cos(2t) \\ x(0) = -2; & \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = 0 & \Rightarrow x(t) = -2 \cos(2t) \end{cases}$$

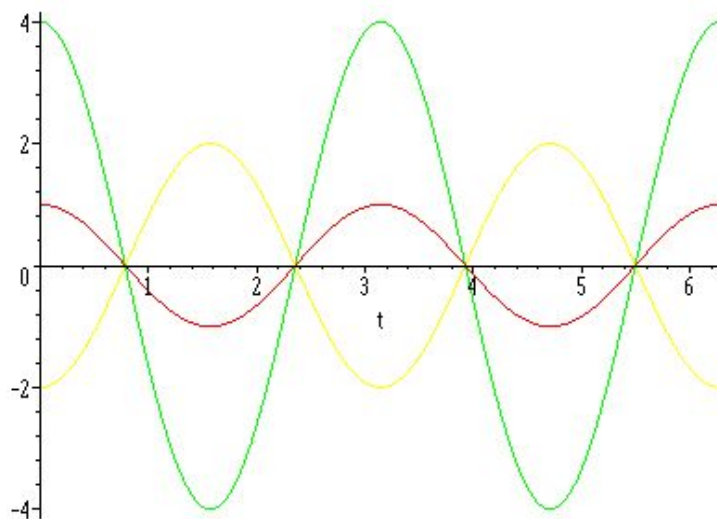


Figura 1: Oscilador armónico libre. Cambios en la posición inicial no afectan la frecuencia natural.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 0 \quad \wedge \quad \begin{cases} x(0) = 0; & \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = 1; & \Rightarrow x(t) = \frac{1}{2} \text{sen}(2t) \\ x(0) = 0; & \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = 4; & \Rightarrow x(t) = 2 \text{sen}(2t) \\ x(0) = 0; & \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = -2 & \Rightarrow x(t) = -\text{sen}(2t) \end{cases}$$

3. Oscilaciones Libres Amortiguadas

Consideremos que en el movimiento actúa una fuerza de amortiguación proporcional a la velocidad, por lo cual el movimiento viene descrito por

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \eta \frac{dx}{dt} + kx = \frac{d^2x}{dt^2} + 2\mu \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

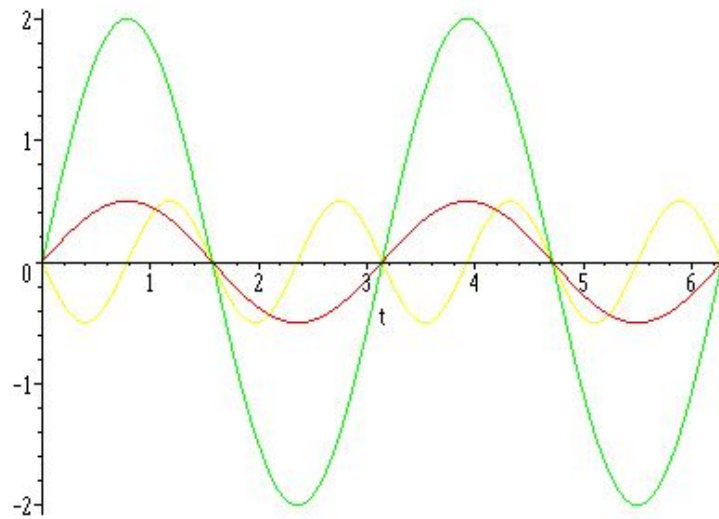


Figura 2: Oscilador Armónico Libre. Cambios de velocidad inicial no afectan la frecuencia natural

la cual constituye una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden. Las raíces del polinomio característico asociado serán

$$r = \frac{-\eta \pm \sqrt{\eta^2 - 4km}}{2m} = -\frac{\eta}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{\eta}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2}$$

por lo tanto la solución será

$$x(t) = C_1 e^{-(\mu + \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2})t} + C_2 e^{-(\mu - \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2})t}$$

de donde se deducen los siguientes casos

$$x(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \quad \Leftrightarrow \quad \mu^2 - \omega_0^2 > 0 \quad \text{Sobreamortiguado}$$

$$x(t) = (C_1 + C_2 t) e^{\mu t} \quad \Leftrightarrow \quad \mu^2 - \omega_0^2 = 0 \quad \text{Crítico}$$

$$x(t) = e^{-\mu t} \left\{ C_1 \cos \left[\left(\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2} \right) t \right] + C_2 \sin \left[\left(\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2} \right) t \right] \right\} \quad \Leftrightarrow \quad \mu^2 - \omega_0^2 < 0 \quad \text{Subamortiguado}$$

Ejemplo Como un ejemplo analicemos el mismo caso del sistema anterior en el cual $m = 0,1$ Kg. y $k = 0,4$ N/m, sólo que ahora la constante de amortiguamiento será $\eta = 0,60, 0,40$ y $0,15$ En todos los caso la frecuencia angular $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 2$ rad/sg. y la cantidad subradical $(\mu^2 - \omega_0^2)$ corresponderá a los tres casos anteriormente mencionados. Las ecuaciones diferenciales que describen este movimiento

serán

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 6 \frac{dx}{dt} + 4x = 0 \quad \wedge \quad \left\{ \begin{array}{l} x(0) = 0 \\ \frac{dx}{dt} \Big|_{t=0} = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow x(t) = \left(\frac{1}{2} + \frac{7}{2\sqrt{5}}\right) e^{(\sqrt{5}-3)t} + \left(\frac{1}{2} - \frac{7}{2\sqrt{5}}\right) e^{-(3+\sqrt{5})t}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4 \frac{dx}{dt} + 4x = 0 \quad \wedge \quad \left\{ \begin{array}{l} x(0) = 0 \\ \frac{dx}{dt} \Big|_{t=0} = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow x(t) = (1 + 6t) e^{-2t}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + 4x = 0 \quad \wedge \quad \left\{ \begin{array}{l} x(0) = 0 \\ \frac{dx}{dt} \Big|_{t=0} = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow x(t) = e^{-\frac{1}{2}t} \left[\frac{9}{\sqrt{15}} \operatorname{sen} \left(\frac{\sqrt{15}}{2}t \right) + \cos \left(\frac{\sqrt{15}}{2}t \right) \right]$$

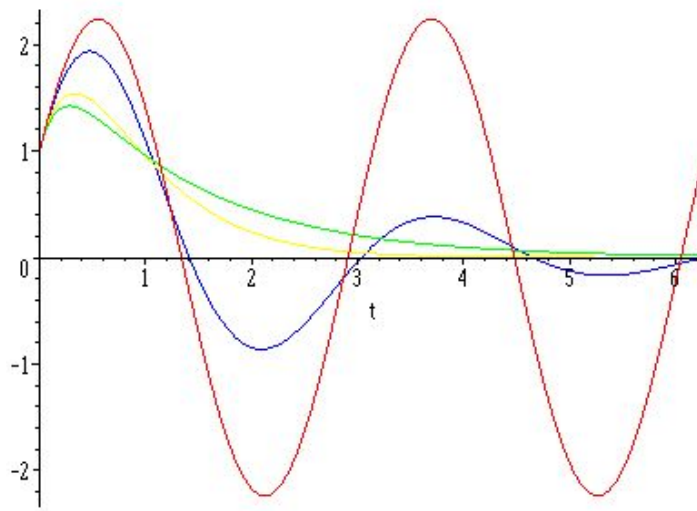


Figura 3: Oscilaciones libres amortiguadas y no amortiguadas. Nótese que el período es mayor para el caso subamortiguado

Si en los casos anteriores cambiamos el signo de la velocidad inicial, i.e. $\frac{dx}{dt} \Big|_{t=0} = -4$ m/s, tendremos la siguiente representación gráfica.

$$x(0) = 1; \quad \frac{dx}{dt} \Big|_{t=0} = -4; \quad \Rightarrow \quad x(t) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{5}}\right) e^{(\sqrt{5}-3)t} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{5}}\right) e^{-(3+\sqrt{5})t}$$

$$x(0) = 1; \quad \frac{dx}{dt} \Big|_{t=0} = -4; \quad \Rightarrow \quad x(t) = (1 + 2t) e^{-2t}$$

$$x(0) = 1; \quad \frac{dx}{dt} \Big|_{t=0} = -4 \quad \Rightarrow \quad x(t) = e^{-\frac{1}{2}t} \left[\frac{-7}{\sqrt{15}} \operatorname{sen} \left(\frac{\sqrt{15}}{2}t \right) + \cos \left(\frac{\sqrt{15}}{2}t \right) \right]$$

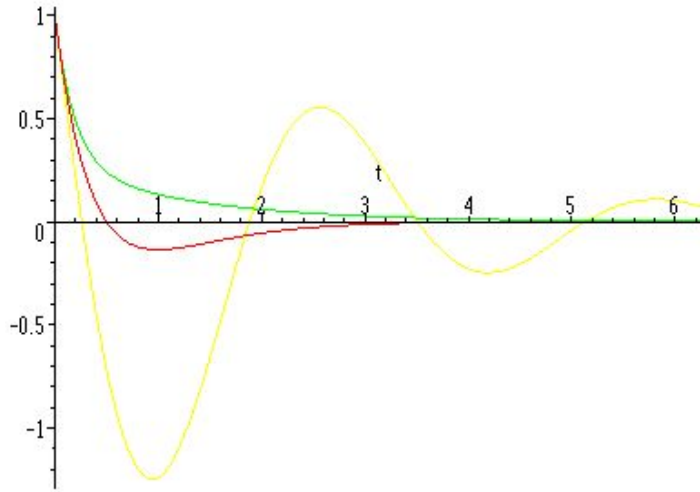


Figura 4: Oscilaciones Libres amortiguadas con cambio de signo en la velocidad inicial

En todos los casos dado que $r_1, r_2 < 0$ se tiene que $x(t \rightarrow \infty) \rightarrow 0$. El movimiento subamortiguado es periódico y el período viene descrito por

$$T_{am} = \frac{\frac{2\pi}{\omega_0}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\mu}{\omega_0}\right)^2}} = \frac{T}{\sqrt{1 - \left(\frac{\mu}{\omega_0}\right)^2}} \quad \text{si} \quad \left(\frac{\mu}{\omega_0}\right)^2 \ll 1 \quad \Rightarrow \quad T_{am} \approx T \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\mu}{\omega_0}\right)^2\right)$$

el cual siempre será mayor que el período de oscilación natural del sistema.

4. Oscilaciones Forzadas

Supongamos ahora que existe una fuerza aplicada al sistema tal que

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\mu \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\varpi t)$$

4.1. Oscilaciones Forzadas no amortiguadas

En este caso $\mu = 0$ y por lo tanto

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\varpi t)$$

4.1.1. Amplitud modulada $\varpi \neq \omega_0$

y tendrá como solución

$$x(t) = \underbrace{C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t)}_{\text{homogénea}} + \underbrace{\frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \varpi^2)} \cos(\varpi t)}_{\text{inhomogénea}} = A \cos(\omega_0 t + \delta) + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \varpi^2)} \cos(\varpi t)$$

con lo cual es la suma de dos movimientos armónicos con distintas frecuencias y amplitudes. Si el cuerpo parte del reposo, esto es: $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ entonces

$$\left. \begin{array}{l} C_1 = \frac{-F_0}{m(\omega_0^2 - \varpi^2)} \\ C_2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \varpi^2)} [\cos(\varpi t) - \cos(\omega_0 t)]$$

dado que

$$\begin{aligned} \cos(\omega_0 t) &= \cos \left[\left\{ \left(\frac{\omega_0 - \varpi}{2} \right) + \left(\frac{\omega_0 + \varpi}{2} \right) \right\} t \right] \\ \cos(\omega_0 t) &= \cos \left(\frac{\omega_0 - \varpi}{2} \right) \cos \left(\frac{\omega_0 + \varpi}{2} \right) - \operatorname{sen} \left(\frac{\omega_0 - \varpi}{2} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{\omega_0 + \varpi}{2} \right) \\ \cos(\varpi t) &= \cos \left[\left\{ \left(\frac{\omega_0 - \varpi}{2} \right) - \left(\frac{\omega_0 + \varpi}{2} \right) \right\} t \right] \\ \cos(\varpi t) &= \cos \left(\frac{\omega_0 - \varpi}{2} \right) \cos \left(\frac{\omega_0 + \varpi}{2} \right) + \operatorname{sen} \left(\frac{\omega_0 - \varpi}{2} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{\omega_0 + \varpi}{2} \right) \\ x(t) &= \underbrace{\frac{2F_0}{m(\omega_0^2 - \varpi^2)}}_{\text{Envolvente}} \left[\operatorname{sen} \left(\frac{\omega_0 - \varpi}{2} t \right) \right] \left[\operatorname{sen} \left(\frac{\omega_0 + \varpi}{2} t \right) \right] \end{aligned}$$

Ejemplo El mismo sistema anterior en el cual $m = 0,1$ Kg. y $k = 0,4$ N/m, cuando parte del reposo desde el origen de coordenadas y existe una fuerza de excitación $F = 0,5 \cos(3t)$. Por lo tanto la ecuación diferencial que describe el movimiento sera

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 4x = 5 \cos(3t) \quad \left\{ \begin{array}{l} x(0) = 0 \\ \frac{dx}{dt} \Big|_{t=0} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x(t) = \underbrace{\cos(2t)}_{\text{homogénea}} - \underbrace{\cos(3t)}_{\text{inhomogénea}} \equiv \underbrace{2 \operatorname{sen} \left(\frac{1}{2} t \right) \operatorname{sen} \left(\frac{5}{2} t \right)}_{\text{envolvente}}$$

4.1.2. Resonancia $\varpi = \omega_0$

En el caso que la frecuencia de la fuerza de excitación coincida con la frecuencia natural del sistema, se tiene

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = F_0 \cos(\omega_0 t) \quad \Rightarrow \quad x(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \operatorname{sen}(\omega_0 t) + \underbrace{\frac{F_0}{2m\omega_0} t}_{\text{envolvente}} \operatorname{sen}(\omega_0 t)$$

Ejemplo El sistema anterior ($m = 0,1$ Kg. y $k = 0,4$ N/m), cuando parte del reposo desde el origen de coordenadas y existe una fuerza de excitación $F = 0,5 \cos(2t)$. Por lo tanto la ecuación diferencial que describe el movimiento sera

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 4x = 5 \cos(2t) \quad \wedge \quad \left\{ \begin{array}{l} x(0) = 0 \\ \frac{dx}{dt} \Big|_{t=0} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x(t) = \frac{5t}{4} \operatorname{sen}(2t)$$

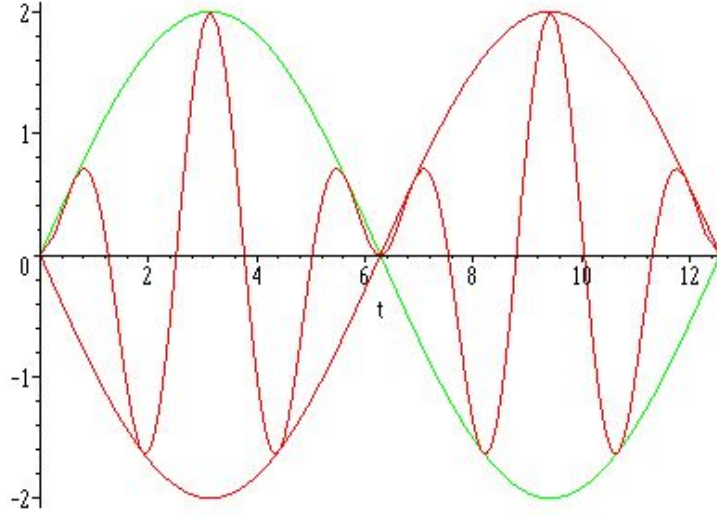


Figura 5: Oscilador armónico forzado. Nótese la envuelta de la función

4.2. Oscilaciones Forzadas amortiguadas

En este caso $\mu \neq 0$ y por lo tanto

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\mu \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\varpi t)$$

la cual tendrá como solución

$$x(t) = C_1 e^{-(\mu + \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2})t} + C_2 e^{-(\mu - \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2})t} + \frac{F_0}{m} \left(\frac{(\omega_0^2 - \varpi^2) \cos(\varpi t) + 2\mu\varpi \sin(\varpi t)}{(\omega_0^2 - \varpi^2)^2 + (2\mu\varpi)^2} \right)$$

una vez más se puede convertir en

$$x(t) = \underbrace{C_1 e^{-(\mu + \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2})t} + C_2 e^{-(\mu - \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2})t}}_{\text{solución homogénea} \equiv \text{régimen transitorio}} + \underbrace{\frac{F_0}{m} \frac{\cos(\varpi t - \zeta)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \varpi^2)^2 + (2\mu\varpi)^2}}}_{\text{solución inhomogénea} \equiv \text{régimen estacionario}}$$

donde

$$\cos(\zeta) = \frac{(\omega_0^2 - \varpi^2)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \varpi^2)^2 + (2\mu\varpi)^2}} \quad \text{y} \quad \sin(\zeta) = \frac{2\mu\varpi}{\sqrt{(\omega_0^2 - \varpi^2)^2 + (2\mu\varpi)^2}}$$

Es claro que el término homogéneo en todos sus casos (sobreamortiguado, crítico y subamortiguado) tiende a cero, por ello se considera un término transitorio, no así el término inhomogéneo que permanece oscilando. En términos Físico se puede decir que el término transitorio representa la disipación de la energía inicial que se le provee al sistema a través de la posición y la velocidad inicial de lanzamiento. Esta energía inicial se expresa a través de las condiciones iniciales se disipa. Si no existiera disipación

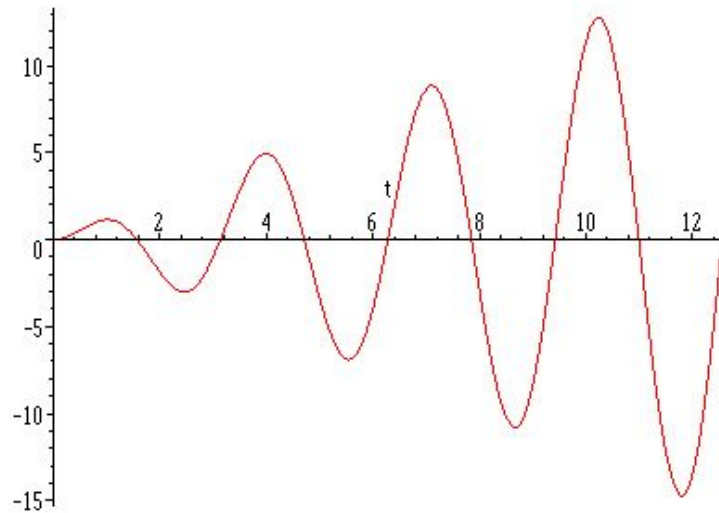


Figura 6: Oscilador armónico forzado con $\varpi = \omega_0^2$ Nótese el fenómeno de resonancia

esta energía inicial permanecería por siempre en el sistema. Finalmente el término inhomogéneo, a través de la fuerza de excitación, impone el movimiento al sistema. Nótese además que el termino inhomogéneo nunca se hace infinito, ni siquiera para el caso para el cual tiene un máximo y es aquel en el cual la frecuencia de excitación coincide con la frecuencia natural del sistema.

Ejemplo En un circuito RLC, cuyos componentes son $L = 1$ henry, $R = 40$ ohmios y $C = \frac{1}{40000}$ faradios, se le aplica un tensión de $V = 24$ voltios. Determine el comportamiento de la carga y la intensidad de corriente en el circuito.

La ecuación diferencial que describe el comportamiento del sistema

$$L \frac{d^2Q(t)}{dt^2} + R \frac{dQ(t)}{dt} + \frac{1}{C} Q = E(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2Q(t)}{dt^2} + 40 \frac{dQ(t)}{dt} + 40000 Q(t) = \frac{1}{2}$$

$$L \frac{d^2I(t)}{dt^2} + R \frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C} I(t) = \frac{dE(t)}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2I(t)}{dt^2} + 40 \frac{dI(t)}{dt} + 40000 I(t) = 0$$

tomando en cuenta las condiciones iniciales tendremos como solución

$$\left. \begin{array}{l} Q(0) = 10^{-4} \\ I(0) = \left. \frac{dQ}{dt} \right|_{t=0} = 10^{-2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Q(t) = \frac{1}{8000} + e^{-20t} \left[\frac{47\sqrt{11}}{2640000} \sin(\sqrt{11}60t) + \frac{7}{8000} \cos(\sqrt{11}60t) \right] \\ I(t) = \frac{dQ}{dt} = e^{-20t} \left[\frac{1}{100} \cos(\sqrt{11}60t) - \frac{37\sqrt{11}}{6600} \sin(\sqrt{11}60t) \right] \end{array} \right.$$

Si en vez de un tensión constante de 0,5 V. la fuente de tensión es sinusoidal de la forma $E(t) =$

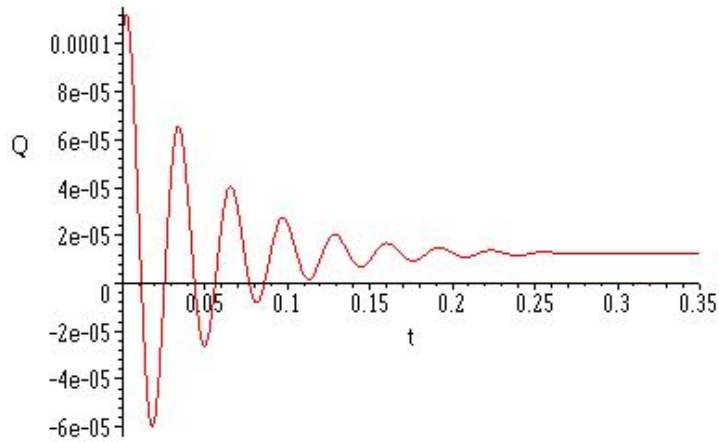


Figura 7: Carga en función del tiempo en un circuito RLC sometido a un voltage constante. Nótese que el sistema alcanza el régimen estacionario cercano a los 0,3 sg

$\frac{1}{2} \cos(180t)$ voltios las ecuaciones se transforman en

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + 40 \frac{dQ}{dt} + 40000 Q = \frac{1}{2} \cos(180t) \quad \text{con} \quad Q(0) = 10^{-4} \quad \wedge \quad I(0) = \left. \frac{dQ}{dt} \right|_{t=0} = 10^{-2}$$

$$\frac{d^2I}{dt^2} + 40 \frac{dI}{dt} + 40000 I = -90 \sin(180t)$$

con sus correspondientes soluciones a las condiciones iniciales del sistema

$$Q(t) = \frac{1}{1000} \left\{ e^{-20t} \left[\frac{293\sqrt{11}}{30140} \sin(60\sqrt{11}t) + \frac{91}{685} \cos(60\sqrt{11}t) \right] - \frac{9}{274} \cos(180t) + \frac{19}{548} \sin(180t) \right\}$$

$$I(t) = \frac{1}{100} \left\{ e^{-20t} \left[\frac{103}{274} \cos(60\sqrt{11}t) - \frac{2461\sqrt{11}}{3014} \sin(60\sqrt{11}t) \right] + \frac{81}{137} \sin(180t) + \frac{171}{274} \cos(180t) \right\}$$

Por analogía con el caso mecánico procedemos a identificar cantidades

$$\left. \begin{array}{l} 2\mu = \frac{R}{L} \\ \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \end{array} \right\} \Rightarrow A = \frac{V_0}{L\sqrt{\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{R}{L}\omega\right)^2}} = \frac{1}{2\sqrt{\omega^4 - 78400\omega^2 + 1600000000}}$$

con ello se puede ver la funcionalidad de la amplitud con la frecuencia excitatriz

5. Movimiento alrededor de un punto de equilibrio

La fuerza elástica $F = -k x$ más allá de ser el caso más simple, representa la primera aproximación al movimiento alrededor de un punto de equilibrio estable. Si recordamos que para una fuerza que

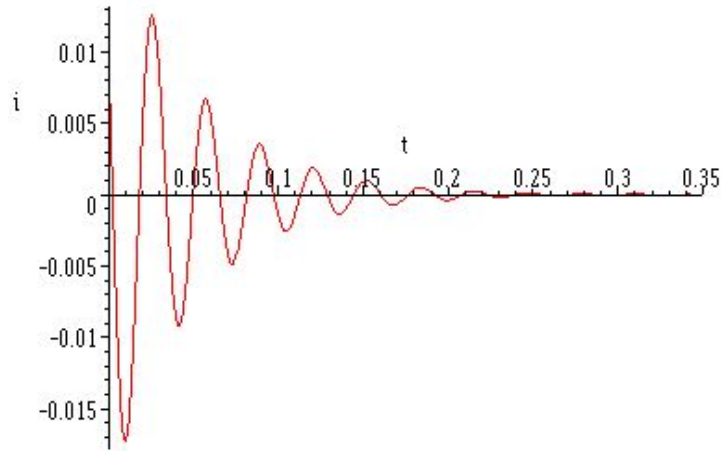


Figura 8: Intensidad en un circuito RLC sometido a un voltage constante.

derive de un potencial

$$F = -\frac{dV}{dx} \Rightarrow F = -kx = -\frac{d\left(\frac{1}{2}kx^2\right)}{dx}$$

mas aun, un punto de equilibrio estable se define aquel en el cual no existen fuerzas externas, vale decir

$$F|_{x=x_0} = 0 \Rightarrow -\frac{dV}{dx}\Big|_{x=x_0} = 0$$

por lo cual, dado un potencial de una fuerza arbitraria siempre podemos expandirlo en series de Taylor alrededor de un punto de equilibrio $x = x_0$

$$V(x) = v(x_0) + \underbrace{(x - x_0) \frac{dV}{dx}\Big|_{x=x_0}}_{=0} + \frac{1}{2!} (x - x_0)^2 \frac{d^2V}{dx^2}\Big|_{x=x_0} + \frac{1}{3!} (x - x_0)^3 \frac{d^3V}{dx^3}\Big|_{x=x_0} \dots$$

Así, en general, alrededor de un punto de equilibrio $x = x_0$ la primera aproximación de una función potencial sera $V(x) \approx \frac{1}{2!} (x - x_0)^2 \frac{d^2V}{dx^2}\Big|_{x=x_0} \approx \frac{1}{2}k(x - x_0)^2$. Así, un potencial de la forma

$$V(x) = \frac{1}{6}x^6 - 2x^5 + \frac{35}{4}x^4 - \frac{50}{3}x^3 + 12x^2$$

Solución: $x^5 - 10x^4 + 35x^3 - 50x^2 + 24x$ Solución: que genera una fuerza

$$F = -\frac{dV(x)}{dx} = -(x^5 - 10x^4 + 35x^3 - 50x^2 + 24x)$$

tendrá dos puntos de equilibrio $x = 0$ y $x = 4$. En torno a $x = 0$ se podrá aproximar con un potencial parabólico

$$\tilde{V}(x) = \frac{1}{2!} (x - x_0)^2 \frac{d^2V(x)}{dx^2}\Big|_{x=x_0} = 12x^2$$

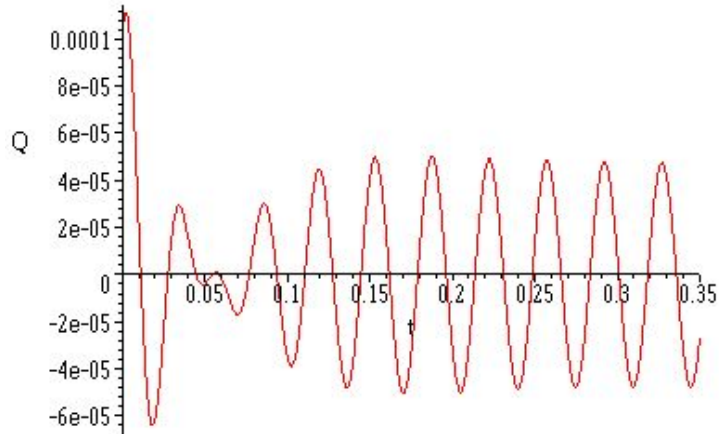


Figura 9: Carga en función del tiempo en un circuito RLC sometido a un voltage sinusoidal $V(t) = \frac{1}{2} \cos(180t)$. Nótese el régimen transitorio ($0 \leq t \lesssim 0,17$) y estacionario ($t \gtrsim 0,17$).

tal y como se observa gráficamente

6. Péndulo Simple con desplazamiento finito.

El caso típico de esta aproximación lo constituye el péndulo simple: una masa m , empotrada a una varilla, de masa despreciable y de longitud L . La varilla se desplaza un ángulo θ de la vertical y se suelta. La Figura (13) muestra el diagrama de cuerpo libre del Péndulo Físico. Desde la ancestral física general, aún en secundaria, era proverbial resolver este problema suponiendo ángulos pequeños. En esas tempranas épocas de nuestro conocimiento de Física era limitado y más limitado aún era nuestra capacidad para resolver ecuaciones diferenciales. A este “problema” se le conoce con el péndulo físico. Como siempre, aproximar es un arte y exploremos este arte. Como norma general tendremos que se debe aproximar al final. Pero no siempre. Si suponemos un cuerpo de masa constante, m , las ecuaciones diferenciales que describen el movimiento no pueden ser otras que aquellas que provengan de las ecuaciones de Newton

$$\sum_{\text{externas}} \overrightarrow{F(r(t), v(t), t)} = \frac{d \overrightarrow{mv(t)}}{dt} = m \overrightarrow{a(t)} = m (a_r \hat{\mathbf{u}}_r + a_\theta \hat{\mathbf{u}}_\theta), \quad (1)$$

Es bueno recordar que hay que expresar la aceleración en un sistema de coordenadas móviles ($\hat{\mathbf{u}}_r, \hat{\mathbf{u}}_\theta$). Esto es

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}}_r &= \cos(\theta) \hat{\mathbf{i}} + \sin(\theta) \hat{\mathbf{j}} \implies \frac{d\hat{\mathbf{u}}_r}{dt} = (-\sin(\theta) \hat{\mathbf{i}} + \cos(\theta) \hat{\mathbf{j}}) \frac{d\theta(t)}{dt} = \frac{d\theta(t)}{dt} \hat{\mathbf{u}}_\theta = \dot{\theta}(t) \hat{\mathbf{u}}_\theta \\ \hat{\mathbf{u}}_\theta &= -\sin(\theta) \hat{\mathbf{i}} + \cos(\theta) \hat{\mathbf{j}} \implies \frac{d\hat{\mathbf{u}}_\theta}{dt} = -(\cos(\theta) \hat{\mathbf{i}} + \sin(\theta) \hat{\mathbf{j}}) \frac{d\theta(t)}{dt} = -\frac{d\theta(t)}{dt} \hat{\mathbf{u}}_r = -\dot{\theta}(t) \hat{\mathbf{u}}_r \end{aligned}$$

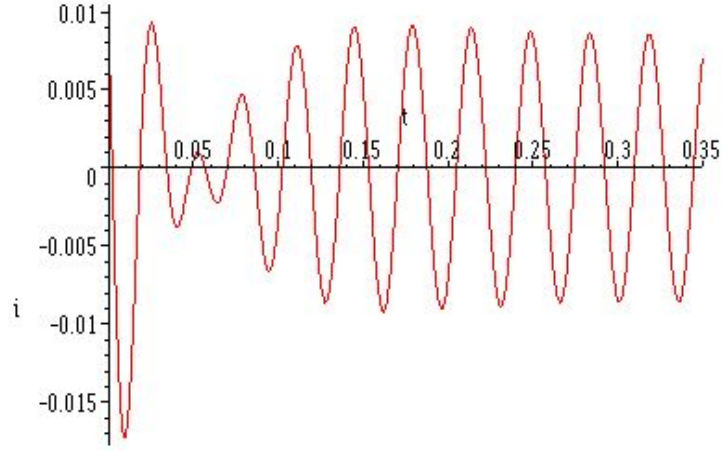


Figura 10: Intensidad de corriente en un circuito RLC sometido a un voltage sinusoidal $V(t) = \frac{1}{2} \cos(180t)$

con lo cual

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) = r(t) \hat{\mathbf{u}}_r & \implies \vec{v}(t) = \frac{d(r(t) \hat{\mathbf{u}}_r)}{dt} = \dot{r}(t) \hat{\mathbf{u}}_r + r(t) \dot{\theta}(t) \hat{\mathbf{u}}_\theta \\ & \text{y} \\ \vec{a}(t) = \frac{d(\dot{r}(t) \hat{\mathbf{u}}_r + r(t) \dot{\theta}(t) \hat{\mathbf{u}}_\theta)}{dt} & = (\ddot{r}(t) - r(t) \dot{\theta}^2(t)) \hat{\mathbf{u}}_r + (2\dot{r}(t) \dot{\theta}(t) + r(t) \ddot{\theta}(t)) \hat{\mathbf{u}}_\theta \end{aligned}$$

es claro que si $r(t) = L = cte \implies \dot{r}(t) = \ddot{r}(t) = \vec{v}(t) = \vec{a}(t) = 0$

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) = L \hat{\mathbf{u}}_r & \implies \vec{v}(t) = \frac{d(L \hat{\mathbf{u}}_r)}{dt} = L \dot{\theta}(t) \hat{\mathbf{u}}_\theta \\ & \text{y} \\ \vec{a}(t) = \frac{d(L \dot{\theta}(t) \hat{\mathbf{u}}_\theta)}{dt} & = \left(-L (\dot{\theta}(t))^2 \right) \hat{\mathbf{u}}_r + \left(L \ddot{\theta}(t) \right) \hat{\mathbf{u}}_\theta \end{aligned}$$

Así, y para este caso particular, las ecuaciones de Newton quedan como

$$m \vec{a} = \vec{T} + m \vec{g} \implies \begin{cases} m a_r \equiv -mL\dot{\theta}^2(t) = -T + mg \cos(\theta) \\ m a_\theta = mL\ddot{\theta}(t) = -mg \sin(\theta). \end{cases} \quad (2)$$

El caso que todos nos aprendimos de memoria, proviene de la suposición $\theta \approx \sin(\theta) \ll 1$ que implica:

$$m \vec{a} = \vec{T} + m \vec{g} \implies \begin{cases} mL\dot{\theta}^2(t) = -T + mg \\ mL\ddot{\theta}(t) = -mg\theta. \end{cases} \quad (3)$$

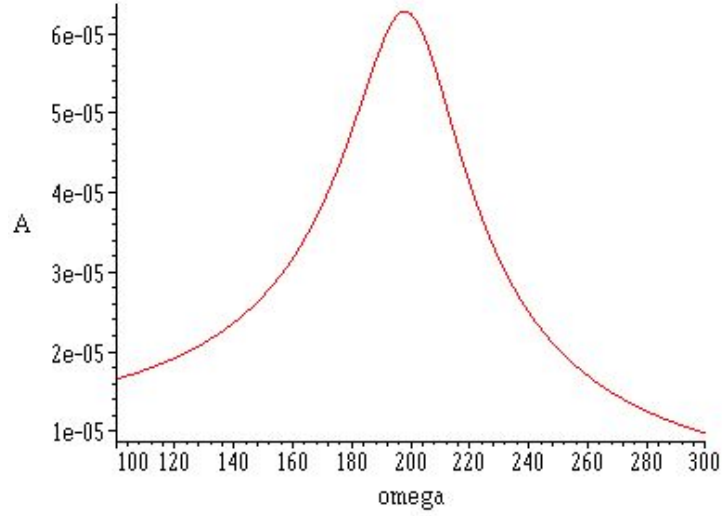


Figura 11: Amplitud como función de la frecuencia excitatriz. Nótese el máximo de la amplitud cuando el sistema entra en resonancia, i.e. $\varpi = \omega_0$

con lo cual, ahora, en este curso, sabemos que lo podemos integrar inmediatamente. Si suponemos que parte del reposo: $\dot{\theta}(0) = 0$ y $\theta(0) = \theta_0$

$$L\ddot{\theta}(t) = -g\theta(t) \implies \theta(t) = C1 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right) + C2 \operatorname{cos}\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right) \implies \theta(t) = \theta_0 \operatorname{cos}\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right)$$

y el período puede ser integrado

$$\dot{\theta}(t)\ddot{\theta}(t) = -\frac{g}{L}\theta(t)\dot{\theta}(t) \implies E_{total} \propto cte = \dot{\theta}(t)^2 + 2\frac{g}{L}\theta(t)^2 \implies \dot{\theta}(t) = \sqrt{\frac{g}{L}(\theta_0^2 - \theta^2)} \quad (4)$$

que no es otra cosa que la energía total del sistema. Por lo tanto sabemos que en el instante inicial, si soltamos la masa desde un ángulo θ_0 , la energía total es puramente potencial. Es decir

$$E_{total} = E_{potencial} = mgL(1 - \operatorname{cos}(\theta_0)) = 2mgL \operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{2}\theta_0\right) \quad (5)$$

por otro lado, de la ecuación (4) podemos obtener el período de oscilación para el Péndulo Físico linealizado:

$$\omega = \dot{\theta}(t) = \sqrt{\frac{g}{L}(\theta_0^2 - \theta^2)} \implies T = \frac{1}{\sqrt{\frac{g}{L}}} \arctan\left(\frac{\theta}{\sqrt{\theta_0^2 - \theta^2}}\right)$$

Este caso también se conoce con el nombre de oscilador armónico simple o péndulo físico linealizado. Igualmente podemos analizar el caso de general del péndulo amortiguado forzado linealizado. Vale decir, una masa, m , atada a una varilla sin masa de longitud L , y que oscila, inmersa en un fluido que la frena

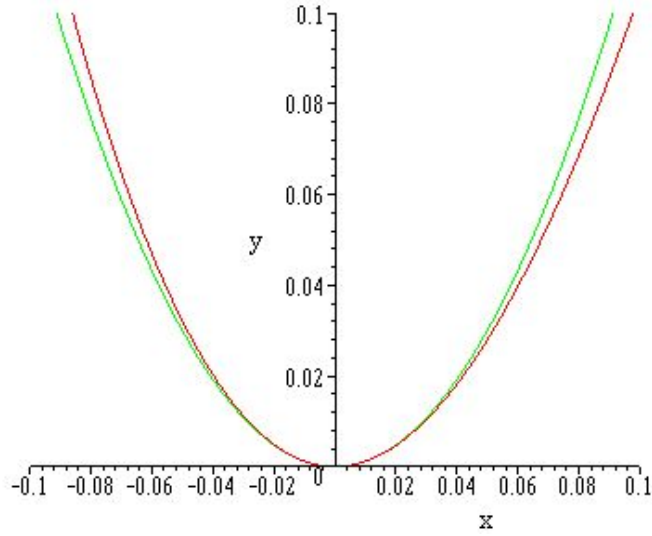


Figura 12: Aproximación por una parábola en torno a $x = 0$

el movimiento de la masa con una fuerza, $-\eta \vec{v}(t)$ y que adicionalmente está excitada por una fuerza exterior $F(t) = F_0 \cos(\varpi t)$. Recordamos que en este caso la ecuación en la dirección tangente ($\hat{\mathbf{u}}_\theta$), es

$$mL \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \eta \frac{d\theta(t)}{dt} + mg \theta(t) = F_0 \cos(\varpi t) \implies \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + 2\mu \frac{d\theta(t)}{dt} + \omega_0^2 \theta(t) = \frac{F_0}{mL} \cos(\varpi t)$$

donde, por costumbre, hemos rebautizado las constantes tales que $\mu = \frac{\eta}{2mL}$ y $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$.

Por lo tanto, su solución tendrá la forma

$$\theta(t) = \underbrace{C_1 e^{-(\mu + \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2})t} + C_2 e^{-(\mu - \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2})t}}_{\text{solución homogénea} \equiv \text{régimen transitorio}} + \underbrace{\frac{F_0}{mL} \frac{\cos(\varpi t - \zeta)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \varpi^2)^2 + (2\mu\varpi)^2}}}_{\text{solución inhomogénea} \equiv \text{régimen estacionario}}$$

donde

$$\cos(\zeta) = \frac{(\omega_0^2 - \varpi^2)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \varpi^2)^2 + (2\mu\varpi)^2}} \quad \text{y} \quad \text{sen}(\zeta) = \frac{2\mu\varpi}{\sqrt{(\omega_0^2 - \varpi^2)^2 + (2\mu\varpi)^2}}$$

Hemos aprendido que dependiendo del valor de los coeficientes de la ecuación característica del Péndulo Físico amortiguado libre ($F_0 = 0$) se derivan tres casos posibles:

- Subamortiguado: $\mu^2 - \omega_0^2 < 0$
- Sobreamortiguado: $\mu^2 - \omega_0^2 > 0$
- Crítico $\mu^2 - \omega_0^2 = 0$

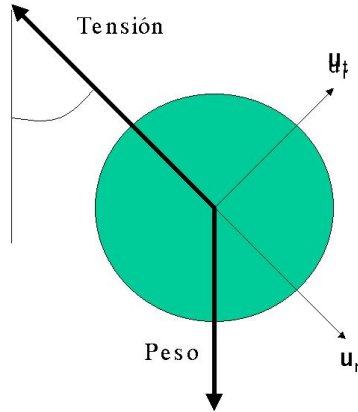


Figura 13: Diagrama de Cuerpo Libre, del Péndulo Físico

En el caso del Péndulo Físico amortiguado forzado ($F_0 \neq 0$) la física se hace mucho más rica y pueden ocurrir fenómenos de resonancia cuando $(\omega_0^2 - \varpi^2)^2 + (2\mu\varpi)^2 \rightarrow 0$.

Es interesante considerar los gráficos tanto de la evolución del sistema en el espacio directo: $\theta(t)$ vs t ; como la evolución del sistema en el espacio de fases $\omega = \dot{\theta}(t)$ vs $\theta(t)$. Las figuras (16) y (18) muestran la primera de estas evoluciones, es decir, la evolución del ángulo en el espacio directo. Las figuras (17) y (19) muestran la evolución del sistema en el espacio de fases. Es claro de la ecuación (4), en la cual aparece $\omega = \dot{\theta}(t) = \dot{\theta}(\theta(t))$, que las curvas en el diagrama de fase tanto para el caso libre (figura (15)) como para los de los casos amortiguados (figuras (17) y (19)) corresponden a curvas de misma energía. En el caso del Péndulo Físico linealizado libre, corresponden a curvas de energía constante. en los otros casos el sistema va disipando energía debido al coeficiente de amortiguación.

Nótese que la disipación obliga al sistema a evolucionar al punto de equilibrio siguiendo trayectorias espirales en el espacio de fases. Claramente más rápidamente en el caso sobreamortiguado que en el subamortiguado. También sabemos que para el caso crítico ($\mu^2 - \omega_0^2 = 0$) el tiempo de evolución del sistema hasta llegar al punto de equilibrio será menor que en cualquiera de los casos sobreamortiguados. Dejamos al lector la comprobación de esta última afirmación.

Hemos aprendido que dependiendo del valor de los coeficientes de la ecuación característica del Péndulo Físico amortiguado libre ($F_0 = 0$) se derivan tres casos posibles:

Ahora bien, la situación que nos interesa simular es la del péndulo físico para los casos en los cuales los ángulos de oscilación no necesariamente sean pequeños.

Denominaremos péndulo libre al caso en el cual no recurriremos a ninguna aproximación respecto al ángulo de oscilación. Recordemos que para este caso partimos de la ecuación (2) en la dirección tangente. Es decir

$$L\ddot{\theta}(t) = -g \operatorname{sen}(\theta) \implies \dot{\theta}(t)\ddot{\theta}(t) = -\frac{g}{L} \operatorname{sen}(\theta(t))\dot{\theta}(t) \implies E_{total} \propto cte = \left(\frac{\dot{\theta}(t)^2}{2} - \frac{g}{L} \cos \theta(t) \right)$$

Oscilador Armonico Simple, Evolucion temporal

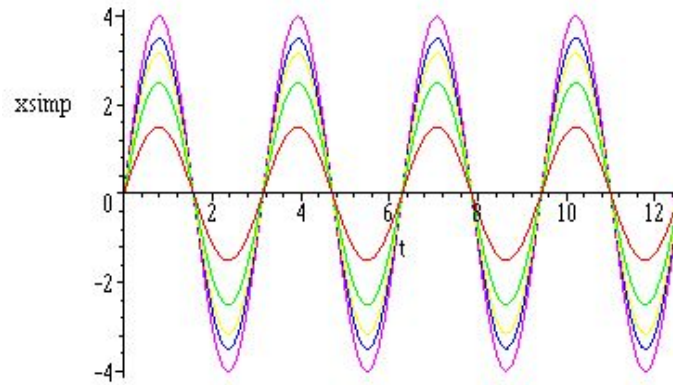


Figura 14: Evolución $\theta(t)$ vs t del Péndulo Físico libre, para distintos valores de la velocidad inicial $V_0 = 3, 5, \sqrt{40}, 7, 8$.

Oscilador Armonico Simple, Diagrama de Fase

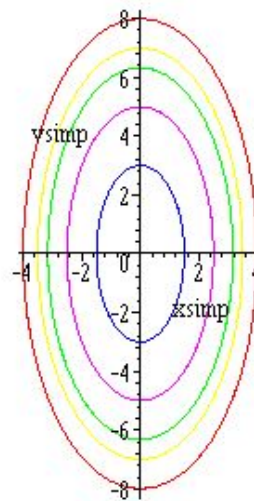


Figura 15: Diagrama de Fase para el Oscilador Armónico Simple. Nótese que el punto de equilibrio es el origen de coordenadas.

Oscilador Armonico Amortiguado, Evolucion temporal

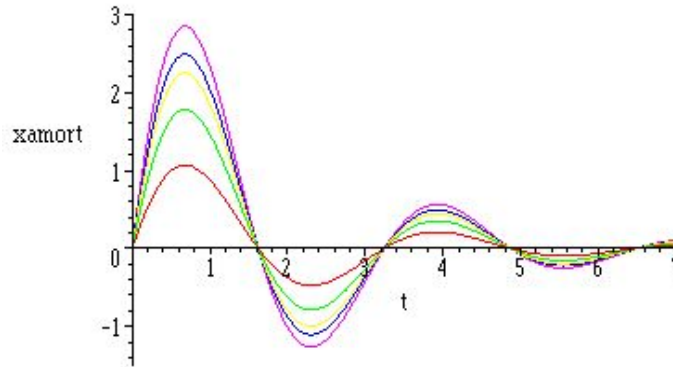


Figura 16: Evolución $\theta(t)$ vs t del Péndulo Simple, Subamortiguado ($\frac{g}{L} = 4; \mu = 0,5$) libre, para distintos valores de la velocidad inicial $V_0 = 3, 5, \sqrt{40}, 7, 8$.

Oscilador Armonico Subamortiguado, Diagrama de Fase

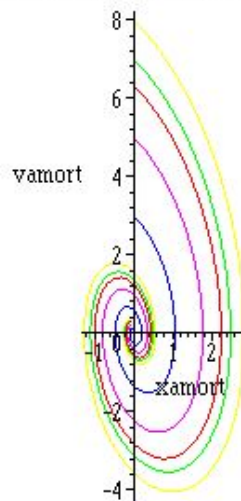


Figura 17: Evolución $\dot{\theta}(t)$ vs $\theta(t)$ del Péndulo Físico Subamortiguado libre ($\frac{g}{L} = 4; \mu = 0,5$) en el Espacio de Fases para distintos valores de la velocidad inicial $V_0 = 3, 5, \sqrt{40}, 7, 8$. Nótese que la disipación lleva irremediamente al sistema al punto de equilibrio, vale decir al origen de coordenadas del espacio de fases.

Oscilador Armonico Sobreamortiguado, Evolucion temporal

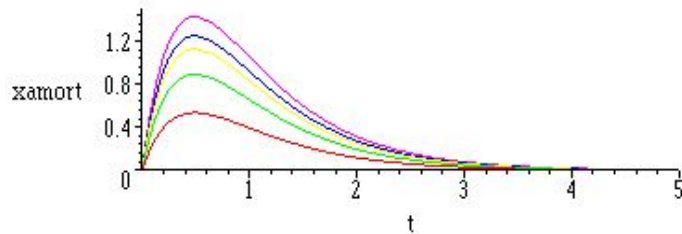


Figura 18: Evolución $\theta(t)$ vs t del Péndulo Físico Sobreamortiguado ($\frac{g}{L} = 4; \mu = 3, 5$) libre, para distintos valores de la velocidad inicial $V_0 = 3, 5, \sqrt{40}, 7, 8$.

Oscilador Armonico Sobreamortiguado, Diagrama de Fase

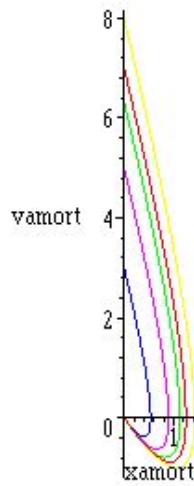


Figura 19: Físico Sobreamortiguado libre ($\frac{g}{L} = 4; \mu = 3, 5$) en el Espacio de Fases para distintos valores de la velocidad inicial $V_0 = 3, 5, \sqrt{40}, 7, 8$. Nótese que la disipación lleva irremediamente al sistema al punto de equilibrio, vale decir al origen de coordenadas del espacio de fases.

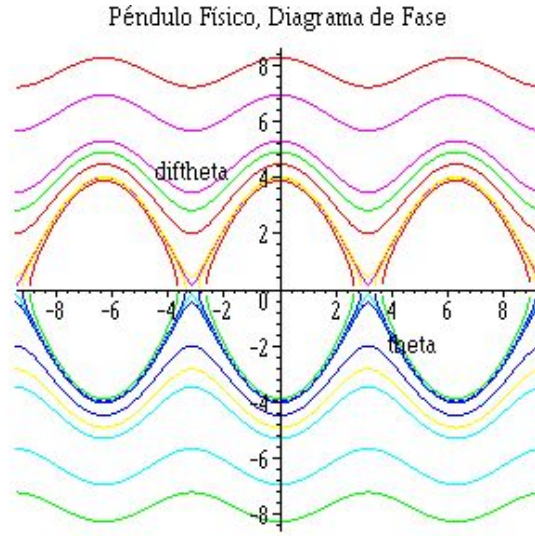


Figura 20: Diagrama de Fase para el Péndulo Físico.

Al igual que en la ecuación en la dirección tangente linealizada (4), nos encontramos con la Energía total del sistema. Con lo cual Es fácil despejar $\dot{\theta}(t) = \dot{\theta}(\theta(t))$ y construir los diagramas de fases del sistema. Otra vez, las líneas del diagrama de fase serán líneas de la misma energía. Así podemos graficar

$$\dot{\theta}(t) = \pm \sqrt{C + \frac{2g}{L} \cos(\theta(t))} \quad (6)$$

para distintos valores de la constante $C = 4, 01; 4, 1; 6; 8; 10; 20$ y para el caso $\frac{g}{L} = 4$. La Figura (20) representa el diagrama de fase para estos casos. Las curvas cerradas (aquellas que tienen los valores de ángulos y velocidades acotadas) representan oscilaciones del sistema, mientras que las curvas abiertas (aquellas en las cuales las velocidades están acotadas pero no así el valor del ángulo) representan que el sistema rota. Nótese que el sistema presenta puntos de equilibrio inestable para $\theta(t) \approx \pm n\pi$ con $n = 0, 1, 2$. Lo cual era de esperarse por cuanto corresponde al ángulo en el cual el sistema *varilla-masa* se encuentran verticalmente dispuestos y el peso y la tensión son colineales y se anulan momentáneamente.

Otro enfoque, quizá más intuitivo para resolver este problema, pudo haber sido el análisis energético. Para ello sabemos que, por ser un sistema conservativo, la energía total viene definida por

$$E_{total} = \underbrace{\frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}(t)^2}_{\text{Energía Cinética}} + \underbrace{mgL(1 - \cos(\theta(t)))}_{\text{Energía Potencial}} \equiv \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}(t)^2 + 2mgL \text{sen}^2\left(\frac{\theta(t)}{2}\right)$$

por consiguiente

$$\dot{\theta}(t) = \pm \sqrt{\frac{2E_{total}}{mL^2} - \frac{4g}{L} \text{sen}^2\left(\frac{\theta(t)}{2}\right)} \equiv \pm 2\sqrt{\frac{g}{L} \left[\text{sen}^2\left(\frac{\theta_{\text{máx}}}{2}\right) - \text{sen}^2\left(\frac{\theta(t)}{2}\right) \right]} \quad (7)$$

donde hemos sustituido $E_{total} = 2mL \text{sen}^2\left(\frac{\theta_{\text{máx}}}{2}\right)$ con $\theta_{\text{máx}}$ el ángulo máximo que alcanza el Péndulo Físico, por cuanto en ese punto la energía total es puramente potencial. Nótese que ese ángulo no necesariamente es el ángulo inicial, debido a que la velocidad inicial puede ser distinta de cero.

La ecuación (7) es claramente integrable por separación de variables y conduce a encontrar la expresión para el período:

$$t = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{L}{g}} \int_{\theta_0}^{\theta(t)} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{g}{L} \left[\text{sen}^2\left(\frac{\theta_{\text{máx}}}{2}\right) - \text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]}} \quad \text{con } -\pi \leq \theta(t) \leq \pi \quad \text{y } \theta_0 = \theta(0)$$

La integral anterior, puede ser transformada en otra que aparece en las tablas integrales, si hacemos $\text{sen } \beta = \frac{\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\theta_{\text{máx}}}{2}\right)}$, con lo cual

$$t = \sqrt{\frac{L}{g}} \int_{\zeta(0)}^{\zeta(t)} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - \text{sen}^2\left(\frac{\theta_{\text{máx}}}{2}\right) \text{sen}^2 \beta}} \quad \text{donde } \begin{cases} \text{sen } \beta = \frac{\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\theta_{\text{máx}}}{2}\right)} \\ \zeta(t) = \arcsin \left[\frac{\text{sen}\left(\frac{\theta(t)}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\theta_{\text{máx}}}{2}\right)} \right] \end{cases} \quad (8)$$

Es claro que el recorrido entre $\zeta(0) = 0 \implies \theta = 0$ a $\theta = \theta_{\text{máx}} \implies \zeta(t) = \frac{\pi}{2}$ representa un cuarto del período, por consiguiente el período total del Péndulo Físico será:

$$T = 4 \sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - \text{sen}^2\left(\frac{\theta_{\text{máx}}}{2}\right) \text{sen}^2 \beta}}$$

6.0.1. Disgresión Elíptica

En este punto haremos una disgresión respecto a las integrales elípticas, su clasificación y algunas de sus propiedades. En general encontrarán en la bibliografía que las integrales elípticas se dividen en

- *Integrales Elípticas de Primera Especie*

$$F(\varphi \setminus \alpha) = \int_0^{\varphi} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - \text{sen}^2 \alpha \text{sen}^2 \beta}} \iff F(x \setminus m) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-mt^2)}} \quad \text{con } 0 \leq m \leq 1$$

las cuales, para el caso particular $\varphi = \frac{\pi}{2}$ o $x = 1$, se puede reacomodar como una *Integral Elíptica de Primera Especie Completa*

$$K(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - m \text{sen}^2 \beta}} \equiv \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-mt^2)}} \quad \text{con } 0 \leq m \leq 1 \quad (9)$$

■ *Integrales Elípticas de Segunda Especie*

$$E(\varphi|\alpha) = \int_0^\varphi \sqrt{1 - \text{sen}^2 \alpha \text{sen}^2 \beta} d\beta \iff E(x|m) = \int_0^x \sqrt{\frac{(1 - mt^2)}{(1 - t^2)}} dt \quad \text{con } 0 \leq m \leq 1$$

y si $\varphi = \frac{\pi}{2}$ o $x = 1$, entonces se obtiene una *Integral Elíptica de Segunda Especie Completa*

$$E(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - m \text{sen}^2 \beta} d\beta \equiv \int_0^1 \sqrt{\frac{(1 - mt^2)}{(1 - t^2)}} dt \quad \text{con } 0 \leq m \leq 1$$

Adicionalmente, y también sin perder generalidad, dado que $0 \leq m \leq 1$, el denominador de la integral elíptica $K(m)$ de la ecuación (9) y equivalentemente de la ecuación (8) puede ser expandido en series de potencias. Con lo cual

$$\frac{1}{\sqrt{1 - m \text{sen}^2 \beta}} = 1 + \frac{1}{2} \text{sen}^2 \beta m + \left(\frac{3}{8} \text{sen}^4 \beta\right) m^2 + \left(\frac{5}{16} \text{sen}^6 \beta\right) m^3 + \left(\frac{35}{128} \text{sen}^8 \beta\right) m^4 + \dots$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1 - m \text{sen}^2 \beta}} &= \frac{1}{2} \pi \left[1 + \left[\left(\frac{1}{2}\right) \text{sen}^2 \beta \right] m + \left[\left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right) \text{sen}^4 \beta \right] m^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left[\left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right) \text{sen}^6 \beta \right] m^3 + O(m^4) \right] \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - m \text{sen}^2 \beta}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} m^n \text{sen}^{2n} \beta$$

y siendo una serie uniformemente convergente puede ser integrada término a término como

$$K(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - m \text{sen}^2 \beta}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\beta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} m^n \text{sen}^{2n} \beta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} m^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^{2n} \beta d\beta$$

$$K(m) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} m^n \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2} \right] = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 m^n$$

Del mismo modo se obtiene para las integrales elípticas completas de segunda especie que

$$E(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - m \text{sen}^2 \beta} d\beta = \frac{\pi}{2} \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 \frac{m^n}{2n-1} \right]$$

Finalmente podemos mencionar la relación de “recurrencia” de Legendre para las Integrales Elípticas completas. Ella es

$$E(m) K(1-m) + E(1-m) K(m) - K(m) K(1-m) = \frac{\pi}{2}$$

Las integrales elípticas de primera y segunda especie, incompletas y completa deben resolverse numéricamente y tradicionalmente están tabuladas en algunas tablas integrales ¹. En nuestros días también pueden ser resueltas numéricamente utilizando comandos de manipuladores simbólicos².

6.0.2. ¿ Cuán buena es la aproximación lineal ?

Utilizando la expansión en serie de la Integral Elíptica completa de primera especie (8) del péndulo físico, tendremos que se cumple

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_{\text{máx}}}{2}\right) \operatorname{sen}^2 \beta}} = 4\sqrt{\frac{L}{g}} F\left(\frac{\pi}{2} \mid \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_{\text{máx}}}{2}\right)\right) \implies$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 \left(\operatorname{sen}\left(\frac{\theta_{\text{máx}}}{2}\right) \right)^{2n}$$

más aún, dado que $\operatorname{sen}\left(\frac{\theta_{\text{máx}}}{2}\right) = \frac{1}{2}\theta_{\text{máx}} - \frac{1}{48}\theta_{\text{máx}}^3 + \frac{1}{3840}\theta_{\text{máx}}^5 + O(\theta_{\text{máx}}^7)$ y que $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ tendremos

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 \left(\frac{1}{2}\theta_{\text{máx}} - \frac{1}{48}\theta_{\text{máx}}^3 + \frac{1}{3840}\theta_{\text{máx}}^5 + O(\theta_{\text{máx}}^7) \right)^{2n} \implies$$

$$T \approx T_0 \left(1 + \frac{1}{16}\theta_{\text{máx}}^2 + \frac{11}{3072}\theta_{\text{máx}}^4 \right)$$

y si realizamos un estimado de las correcciones al problema lineal que conlleva esta expansión veremos que aún para ángulos $\theta_{\text{máx}} = \frac{\pi}{4}$ las correcciones son del orden de un pírlico 4%, con lo cual la aproximación lineal resulta bien razonable. Para ángulos $\theta_{\text{máx}} \gtrsim 1$ las correcciones comienzan a ser significativas y todo este esfuerzo de integración empieza a tener sentido. La siguiente tabla da una idea más clara de este cambio en el período del péndulo y los errores relativos porcentuales respecto al período del péndulo físico linealizado $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$, cuando se considerarán distintos valores del ángulo máximo, $\theta_{\text{máx}}$

$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2,83845$	$\theta_{\text{máx}} = \frac{\pi}{12}$	$\theta_{\text{máx}} = \frac{\pi}{6}$	$\theta_{\text{máx}} = \frac{\pi}{4}$	$\theta_{\text{máx}} = \frac{\pi}{3}$	$\theta_{\text{máx}} = \frac{\pi}{2}$	$\theta_{\text{máx}} = \frac{2\pi}{3}$
T	2,85066	2,88786	2,95191	3,04617	3,35034	3,89685
$\epsilon = 100 \frac{ T - T_0 }{T}$	0,42821	1,71109	3,84368	6,81916	15,2786	37,1283

¹Abramowitz, M. y Stegun I.A (1964) *Handbook of Mathematical Functions* Dover, New York

²En el caso de MAPLEV se puede proceder directamente evaluando numéricamente la integral (8) a través del comando `evalf(int(...))` o mediante la función de biblioteca `EllipticF(z,k)` donde $z = \beta$ es al argumento del seno y $k = \operatorname{sen}\left(\frac{\theta_0}{2}\right)$ el parámetro (consulte la ayuda de MAPLE para más detalles).

6.1. El Péndulo Físico: Integración Numérica

Tal y como indicamos en la primera sección de este proyecto, procedemos a convertir una ecuación de segundo orden en un sistema de ecuaciones diferenciales de dos ecuaciones diferenciales de primer orden. Así, del mismo modo que en la ecuación (??) podremos escribir:

$$\ddot{\theta}(t) = -\omega_0 \text{sen}(\theta) \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \frac{d\theta(t)}{dt} = \varphi(t) \\ \frac{d\varphi(t)}{dt} = -\omega_0 \text{sen}(\theta(t)) \end{cases}$$

con lo cual podemos adimensionalizar de dos varias formas, dependiendo de las condiciones iniciales del movimiento. Si adicionalmente hemos adimensionalizado con $\tilde{t} = \frac{t}{t_{final}}$ por lo que $0 \leq \tilde{t} \leq 1$ y $\frac{1}{t_{final}} \frac{d(\cdot)}{d\tilde{t}} = \frac{d(\cdot)}{dt}$ y, adicionalmente: $\tilde{\varphi} = \frac{\varphi}{\varphi_0}$, con $\varphi_0 = \left. \frac{d\theta(t)}{dt} \right|_{t=0} \neq 0$. De este modo el sistema queda escrito

$$\begin{aligned} \frac{d\theta(t)}{dt} = \varphi(t) &\quad \Longrightarrow \quad \frac{d\theta(\tilde{t})}{d\tilde{t}} = \varphi_0 t_{final} \tilde{\varphi}(\tilde{t}) &\quad \Longrightarrow \quad \frac{d\theta(\tilde{t})}{d\tilde{t}} = \Lambda \tilde{\varphi}(\tilde{t}) \\ \frac{d\varphi(t)}{dt} = -\omega_0 \text{sen}(\theta(t)) &\quad \Longrightarrow \quad \frac{d\tilde{\varphi}(\tilde{t})}{d\tilde{t}} = -\frac{\omega_0^2 t_{final}}{\varphi_0} \text{sen}(\theta(\tilde{t})) &\quad \Longrightarrow \quad \frac{d\tilde{\varphi}(\tilde{t})}{d\tilde{t}} = -\Gamma \text{sen}(\theta(\tilde{t})) \end{aligned}$$

Nótese que las cantidades $\tilde{\varphi}(\tilde{t}), \theta(\tilde{t}), \tilde{t}, \Gamma$ y Λ son adimensionales. Acto seguido procedemos a integrar numéricamente el sistema de ecuaciones³.

La figura (21) ilustra la evolución del ángulo $\theta(t)$ vs t , con $0 \leq t \leq 10$ del Péndulo Físico, para distintos valores de la velocidad angular inicial: $\frac{d\theta(t)}{dt} = \dot{\theta}(t) = \varphi(t) = 3,5, 3,9, 4, 4,1, 4,5$. Mientras que la figura (22) (y también la figura (20)) representan la evolución del sistema en el espacio de fases. $\theta(t)$ vs $\frac{d\theta(t)}{dt} = \varphi(t)$. Las curvas cerradas en esta gráfica corresponden a las curvas oscilantes de la figura (21). Dado que el sistema parte de $\theta_0 = \theta(t=0)$ y seleccionamos el nivel de energía potencial igual a cero allí, cada una de estas curvas representan un valor de la energía cinética inicial. El caso $E_c = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}_0^2 = mg2L$ corresponde a la separatriz, vale decir, la órbita que separa las curvas cerradas de las abiertas. Es claro que en este caso el móvil “subirá” y alcanzará un equilibrio inestable en la posición vertical. En la figura (21) este caso viene ilustrado por la curva que se convierte en horizontal $0,25 \leq \tilde{t} \leq 0,5$, luego a partir de $\tilde{t} \approx 0,5$, la inexactitud del cálculo numérico genera perturbaciones que en teoría no debieran existir.

$$E_c = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}_0^2 = mg2L$$

³En MAPLEV podemos integrar el sistema de dos maneras distintas. La primera haciendo uso del comando `dsolve({sysED,CI}, numeric, vars, options)` donde `sysED` es el sistema de ecuaciones diferenciales, `CI` sus condiciones iniciales. Si necesitáramos un análisis gráfico es mucho más útil el paquete `DEtools`.

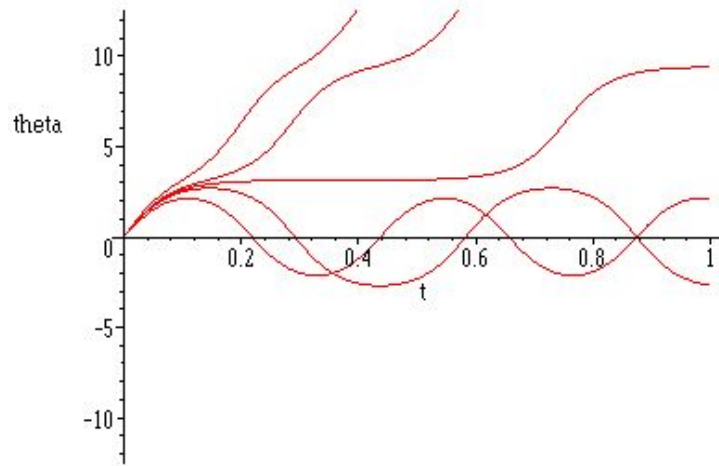


Figura 21: Integración numérica $(\theta(\tilde{t}) \text{ vs } \tilde{t})$, con $0 \leq \tilde{t} \leq 10$ del Péndulo Físico, para distintos valores de la velocidad angular inicial: $\frac{d\theta(t)}{dt} = \varphi(t) = 3,5, 3,9, 4, 4,1, 4,5$.

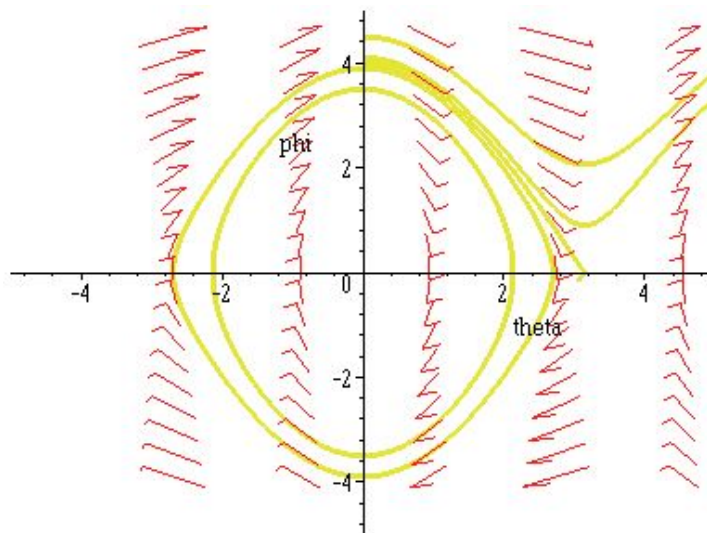


Figura 22: Digrama de Fase para el Péndulo Físico