Clase 1
Ecuaciones Diferenciales:
Motivación y Conceptos Preliminares

L. A. Núñez*
Centro de Astrofísica Teórica,
Departamento de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad de Los Andes, Mérida 5101, Venezuela
y
Centro Nacional de Cálculo Científico
Universidad de Los Andes (CeCalCULA),
Corporación Parque Tecnológico de Mérida,
Mérida 5101, Venezuela

Mérida, Septiembre 2003. Versión α

Índice

1. Motivación y Origen

En Ciencias, una de las formas de modelar fenómenos físicos es mediante su caracterización a través de una función matemática, digamos $\mathcal{G} = \mathcal{G}(x, y, z; t)$. Desde los albores de la actividad científica contemporánea es imperioso describir los fenómenos físicos en el lenguaje de las matemáticas. Una las formas (la ideal) para modelar los cambios de esta función, $\mathcal{G}(x, y, z; t)$, que depende de la posición y del tiempo, es a través de una ecuación en la cual están involucradas la función, $\mathcal{G}(x, y, z; t)$ y sus derivadas. A esa ecuación la llamaremos *Ecuación Diferencial*. Existe toda una "fauna" de ecuaciones diferenciales y hoy disponemos de un importante arsenal de técnicas, métodos y herramientas para encontrar la función $\mathcal{G}(x, y, z; t)$, la cual será nuestra

*e-mail: nunez@ciens.ula.ve

función incógnita. Este curso trata, parcialmente, de mostrar parte de esta fauna y de indicarles métodos para resolver un tipo particular de ecuaciones diferenciales: *las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.*

Empecemos por recordar que desde siempre hemos tratado, la mayor de las veces sin saberlo o sin explicitarlo, con este tipo de ecuaciones en donde la incógnita no es un número sino un conjunto de números: una función.

El caso más emblemático lo constituye el conjunto de "fórmulas" que aprendimos en nuestra más tierna infancia intelectual cuando estudiábamos bachillerato o, más recientemente, en los primeros cursos de Física General de la Universidad. En aquellos entonces describíamos el movimiento de partículas en una dimensión, a través de dos ecuaciones:

$$V_f = V_0 + at \qquad \text{y} \qquad d = V_0 t + a\frac{t^2}{2} \tag{1}$$

de memoria repetíamos que V_f representaba la velocidad final, V_0 la velocidad inicial, a la aceleración, t el tiempo transcurrido y d la distancia recorrida en ese tiempo. El problema consistía en encontrar, para un sinfín de situaciones físicas, primeramente el valor de la aceleración del móvil y a partir de las Leyes de Newton, luego conociendo la velocidad y la posición inicial, encontrábamos la posición, d, y la velocidad, V_f en todo instante de tiempo. Así, mediante diagramas de cuerpo libre y la utilización de las leyes de Newton, encontrábamos el valor de la aceleración y las "formulitas" (1) resolvíamos el problema.

$$\sum F_{ext} = m\ a \qquad \Rightarrow a = \frac{\sum F_{ext}}{m} \qquad \Rightarrow \begin{cases} V_f = V_0 + at \\ \\ d = V_0 t + a\dfrac{t^2}{2} \end{cases} \tag{2}$$

Lo más probable es que nuestros profesores nos repitieran hasta el cansancio que la sumatoria de fuerzas externas $\sum F_{ext}$ era constante, y lo más seguro que nosotros en aquellos momentos no comprendiéramos la trascendencia de esa suposición. El caso más representativo era el del movimiento de un cuerpo bajo la acción de un campo gravitatorio, más aún: caída libre.

$$-mg = m\ a \qquad \Rightarrow a = -g \qquad \Rightarrow \begin{cases} V_f = V_0 - gt \\ \\ d = V_0 t - g\dfrac{t^2}{2} \end{cases} \tag{3}$$

Lo que está detrás de este "cuento" que nos inició en el estudio de la Física y a muchos de nosotros nos sedujo para seguir estudiando y aprendiendo a tratar de describir la naturaleza, es, efectivamente, la utilización de las Leyes de Newton para modelar el fenómeno del movimiento. De este modo

$$\sum F_{ext} = m\ a = m\frac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2} = m\frac{\mathrm{d}V(t)}{\mathrm{d}t} \qquad \Rightarrow \begin{cases} V(t) = \dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = V_0 + at \\ \\ x(t) = V_0 t + a\dfrac{t^2}{2} \end{cases} \tag{4}$$

Sí la sumatoria de fuerzas externas es una contante tendremos que

$$\frac{\mathrm{d}V(t)}{\mathrm{d}t} = a = \frac{\sum F_{ext}}{m} = \text{constante} \qquad \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} V(t) = \int \mathrm{d}t \ a = t \ a + C_2 \\ \\ x(t) = \int \mathrm{d}t \ \left(t \ a + C_2 \right) = \dfrac{t^2}{2} \ a + C_2 t + C_1 \end{array} \right. \tag{5}$$

Claramente al identificar

$$C_2 = V(t = 0) = V_0 \qquad \text{y} \qquad C_1 = x(t = 0) = x_0 = 0 \tag{6}$$

reobtenemos nuestras "formulitas" ancestrales. Es importante señalar que

$$\frac{\mathrm{d}V(t)}{\mathrm{d}t} = a \qquad \text{y} \qquad \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = t \ a + C_2 \tag{7}$$

constituyen ecuaciones diferenciales donde las funciones incógnitas son la velocidad, $V(t)$, y la posición, $x(t)$, respectivamente. Ambas funciones se encontraban dentro de un signo de derivada y fueron "despejadas" mediante un proceso de integración.

La descripción del movimiento de partículas es más rica y compleja. El movimiento de una gran cantidad de partículas puede ser simulado a través de una ecuación diferencial del tipo

$$\sum \vec{F}_{ext} \left(\vec{r}\,(t)\,, \vec{V}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t}; t \right) = m \ \vec{a} = m \frac{\mathrm{d}^2 \vec{r}(t)}{\mathrm{d}t^2} = m \frac{\mathrm{d}\vec{V}(t)}{\mathrm{d}t} \tag{8}$$

El carácter vectorial implica tres ecuaciones diferenciales, una por cada dimensión del movimiento, vale decir:

$$\sum \vec{F}_{ext} \left(\vec{r}\,(t)\,, \frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t}; t \right) = m \ \vec{a} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sum F^x_{ext} \left(\vec{r}\,(t)\,, \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t}; t \right) = m \ a_x = m \dfrac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2} = m \dfrac{\mathrm{d}V_x(t)}{\mathrm{d}t} \\ \\ \sum F^y_{ext} \left(\vec{r}\,(t)\,, \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t}; t \right) = m \ a_y = m \dfrac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2} = m \dfrac{\mathrm{d}V_y(t)}{\mathrm{d}t} \\ \\ \sum F^z_{ext} \left(\vec{r}\,(t)\,, \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t}; t \right) = m \ a_z = m \dfrac{\mathrm{d}^2 z(t)}{\mathrm{d}t^2} = m \dfrac{\mathrm{d}V_z(t)}{\mathrm{d}t} \end{array} \right.$$

Además del carácter vectorial de la ecuación, las componentes de la fuerza pueden dejar de ser constantes y depender de no sólo del tiempo, sino del vector posición, del vector velocidad o, de ambas simultáneamente. En este caso nuestras "formulitas" dejan de ser válidas en general y debemos integrar las ecuaciones diferenciales para obtener la trayectoria de la partícula $\vec{r}\,(t)$, conocidas: la masa, m, la expresión de la sumatoria de fuerzas externas$\sum \vec{F}_{ext}$, la posición y la velocidad inicial ($\vec{r}\,(t_0) = \vec{r}_0$ y $\vec{V}(t_0) = \vec{V}_0$). Este problema se conoce como el problema de condiciones iniciales y es, como hemos dicho antes, la razón de este curso. Antes, intentaré mostrar como ese conocimiento del movimiento bajo acción de una resultante de fuerzas constante, es decir el movimiento de una partícula con aceleración constante puede resultar muy útil para resolver, de forma aproximada, el caso más general que hemos mencionado: $\vec{F}_{total} = \sum \vec{F}_{ext}\left(\vec{r}\,(t)\,, \frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t}; t\right)$. Veamos con detenimiento que significan estas afirmaciones.

Es claro el tiempo de evolución esta comprendido entre el tiempo inicial y el tiempo final, $t_0 \leq t \leq t_{final}$. Supongamos que dividimos ese intervalo de tiempo en N subintervalos

$$[t_0, t_{final}] = [t_0, t_1] \cup [t_1, t_2] \cup [t_2, t_3] \cup \cdots \cup [t_i, t_{i+1}] \cup \cdots \cup [t_{N-2}, t_{N-1}] \cup [t_{N-1}, t_N = t_{final}] \quad (9)$$

de tal modo que en cada uno de esos N subintervalos la aceleración es constante. En estas situación, nuestras "formulitas" son válidas. Esto es

$$\left.\begin{array}{c} [t_0, t_1] \\ \Downarrow \\ V(t_0) = V_0 \\ \\ d\,(t_0) = d_0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} V(t_1) = V_1 = V_0 + \frac{\sum F_{ext}\,(d_0, V_0; t_0)}{m}\,[t_1 - t_0] \\ \\ d\,(t_1) = d_1 = V_0\,[t_1 - t_0] + \frac{\sum F_{ext}\,(d_0, V_0; t_0)}{m}\frac{[t_1 - t_0]^2}{2} \end{array}\right. \quad (10)$$

$$\left.\begin{array}{c} [t_1, t_2] \\ \Downarrow \\ V(t_1) = V_1 \\ \\ d\,(t_1) = d_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} V_2 = V_1 + \frac{\sum F_{ext}\,(d_1, V_1; t_1)}{m}\,[t_2 - t_1] \\ \\ d_2 = d_1 + V_1\,[t_2 - t_1] + \frac{\sum F_{ext}\,(d_1, V_1; t_1)}{m}\frac{[t_2 - t_1]^2}{2} \end{array}\right. \quad (11)$$

$$\vdots$$

$$\left.\begin{array}{c} [t_i, t_{i+1}] \\ \Downarrow \\ V(t_i) = V_i \\ \\ d\,(t_i) = d_i \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} V_{i+1} = V_i + \frac{\sum F_{ext}\,(d_i, V_i; t_i)}{m}\,[t_{i+1} - t_i] \\ \\ d_{i+1} = d_i + V_i\,[t_{i+1} - t_i] + \frac{\sum F_{ext}\,(d_i, V_i; t_i)}{m}\frac{[t_{i+1} - t_i]^2}{2} \end{array}\right. \quad (12)$$

$$\vdots$$

$$\left.\begin{array}{c} [t_{N-1}, t_N] \\ \Downarrow \\ V(t_{N-1}) = V_{N-1} \\ \\ d\,(t_{N-1}) = d_{N-1} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} V_N = V_{N-1} + \frac{\sum F_{ext}\,(d_{N-1}, V_{N-1}; t_{N-1})}{m}\,[t_N - t_{N-1}] \\ \\ d_N = d_{N-1} + V_{N-1}\,[t_N - t_{N-1}] + \frac{\sum F_{ext}\,(d_{N-1}, V_{N-1}; t_{N-1})}{m}\frac{[t_N - t_{N-1}]^2}{2} \end{array}\right. \quad (13)$$

Nótese que las posiciones y velocidades **finales** para cada intervalo, son las posiciones y velocidades **iniciales** para el intervalo siguiente y que el valor de la aceleración, que es variable, se toma como constante e igual al valor que tiene en el comienzo del intervalo.

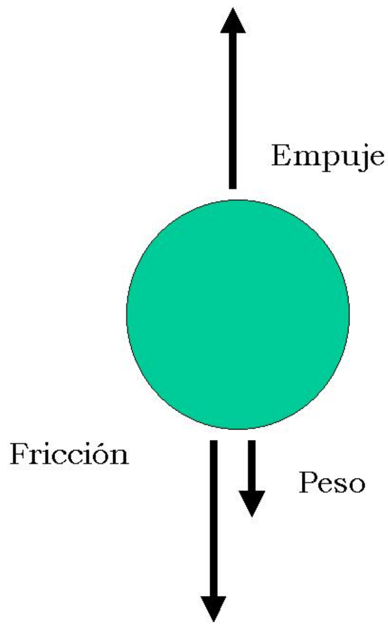

Figura 1: Diagrama de Cuerpo Libre de una esfera de corcho que emerge desde el fondo de un tanque de agua.

Para analizar este caso consideremos el caso de una esfera de corcho, con Radio R y masa M que se suelta desde el fondo de un tanque de agua de profundidad h. Queremos conocer con que velocidad llega la esfera a la superficie.

El diagrama de cuerpo libre se puede observar en la figura 1 y la ecuación de Newton para este caso se expresa como

$$\sum \vec{F}_{ext}\left(\vec{r}\,(t)\,, \frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t}; t\right) = ma \Rightarrow -mg - K\eta V\,(t) + m_f g = m\frac{\mathrm{d}V(t)}{\mathrm{d}t} \tag{14}$$

En la cual hemos identificado

$$\begin{array}{rcc} \text{peso} & \Rightarrow & -mg \\ \\ \text{Fricción} & \Rightarrow & -K\eta V\,(t) \\ \\ \text{Empuje} & \Rightarrow & m_f g \end{array} \tag{15}$$

Como aprendimos también hace algún tiempo el empuje o fuerza de Arquímides es igual al peso del fluido desalojado por el cuerpo. Por ello aparece m_f que representa la masa del fluido. Para el caso en el cual el fluido no es viscoso, es decir, no hay fricción con el fluido, la ecuación se reduce a

$$\sum \vec{F}_{ext}\left(\vec{r}\,(t)\,, \frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t}; t\right) = ma \Rightarrow -mg + m_f g = ma \tag{16}$$

en la cual claramente la aceleración es constante e igual a

$$a = g\left(\frac{m_f}{m} - 1\right) \equiv g\left(\frac{\rho_f}{\rho_c} - 1\right) = cte \tag{17}$$

donde hemos indentificado ρ_f la densidad del fluido y ρ_c la densidad del cuerpo.

Para encontrar la velocidad con la cual llega a la superficie, encontramos primero el tiempo que tarda en subir y luego evaluamos la velocidad en ese tiempo. Esto es

$$h = g\left(\frac{\rho_f}{\rho_c} - 1\right)\frac{t^2}{2} \Rightarrow t = 2\sqrt{\frac{h\rho_c}{2g\left(\rho_f - \rho_c\right)}} \tag{18}$$

$$\tag{19}$$

$$V_{final} = g\left(\frac{\rho_f}{\rho_c} - 1\right)2\sqrt{\frac{h\rho_c}{2g\left(\rho_f - \rho_c\right)}} \tag{20}$$

En el caso general, descrito por la ecuación (14), procedemos del mismo modo: encontramos el tiempo en el cual llega la superficie y luego evaluamos la expresión para la velocidad para ese tiempo. Fíjense que la estrategia para resolver el problema físico es la misma, sólo que tendremos que disponer de un arsenal adicional de herramientas y técnicas para "despejar" la función velocidad. Aprenderemos a resolver ecuaciones diferenciales de la misma manera que antes resolvíamos ecuaciones algebraicas. En este caso la solución exacta para la expresión de la velocidad es

$$-mg - K\eta V\,(t) + m_f g = m\frac{\mathrm{d}V(t)}{\mathrm{d}t} \Rightarrow V\,(t) = \frac{g\,(m - m_f)}{K\eta}\left(e^{-\frac{tK\eta}{m}} - 1\right) \tag{21}$$

Con lo cual

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = V\,(t) = \frac{g\,(m - m_f)}{K\eta}\left(e^{-\frac{tK\eta}{m}} - 1\right) \tag{22}$$

y la función posición surge de integrar la ecuación diferencial

$$Y\,(t) = -\frac{g(m - m_f)}{K^2\eta^2}\left(me^{-\frac{tK\eta}{m}} + tK\eta - m\right) \tag{23}$$

desafortunadamente la no se puede despejar el tiempo de manera exacta por cuanto la ecuación

$$\frac{gm\,(m - m_f)}{K^2\eta^2}\left(e^{-\frac{K\eta\,t}{m}} - 1 + \frac{K\eta\,t}{m}\right) = h \tag{24}$$

es una ecuación trascendente y debe ser resuelta numéricamente. Haciendo algunas sustituciones simplificadoras

$$m_f = \frac{4}{3}\pi\,\xi\,\rho\,R^3; \quad m = \frac{4}{3}\pi\,\phi\,\rho\,R^3 \quad \rho_f = \xi\rho \quad \rho_c = \phi\rho \quad \text{y} \quad K = 6\,\pi\,R \tag{25}$$

Donde ξ y ϕ representan las densidades relativas del fluido y del cuerpo respecto al agua (de densidad ρ), respectivamente. Seguidamente sustituimos los valores numéricos

$$g = 9{,}8; \quad R = 0{,}02; \quad \rho = 10^3; \quad \xi = 1; \quad \phi = 0{,}8; \quad V_0 = 0; \quad \eta = 1{,}002 \times 10^{-3} \tag{26}$$

la ecuación (24) nos queda para $h = 10, mts$

$$10 = 12339{,}72755\,(1 - \exp(-0{,}01409062500t)) - 173{,}8744736t \tag{27}$$

y se obtiene $t_{final} = 2{,}876443096$ sg. con el cual se evalúa la ecuación para la velocidad

$$V\,(t) = 173{,}8744730\,(1 - \exp(-0{,}01409062500t)) \Rightarrow V_{final} = 6{,}9063798 \quad m/s \tag{28}$$

En la siguiente tabla se implementan las ecuaciones (10) a (13) habida cuenta de las simplificaciones (25) y los valores numéricos (26) para $h = 1/10 \sim [t_{i+1} - t_i]$

t_i (s)	V_i (m/s)	d_i (m)	$V(t)$ (m/s)	$d(t)$ (m)
0.100	0.2449999997	0.01224999998	0.2448275	0.01225
0.200	0.4896547791	0.04898273892	0.4893102	0.04895
0.300	0.7339648246	0.11016371910	0.7334487	0.11009
0.400	0.9779306220	0.19575849150	0.9772434	0.19563
0.500	1.221552656	0.30573265540	1.2206949	0.30553
0.600	1.464831412	0.44005185880	1.4638035	0.43976
0.700	1.707767373	0.59868179800	1.7065698	0.59828
0.800	1.950361022	0.7815882177	1.9489943	0.78106
0.900	2.192612841	0.9887369109	2.1910775	0.98807
1.000	2.434523312	1.220093719	2.4328198	1.21926
1.100	2.676092916	1.475624530	2.6742217	1.47462
1.200	2.917322134	1.755295283	2.9152836	1.75410
1.300	3.158211444	2.059071962	3.1560062	2.05767
1.400	3.398761326	2.386920600	3.3963898	2.38529

V_i y d_i representan la velocidad y la posición aproximada, tal y como se expresan en las ecuaciones (10) a (13). Mientras que $V\,(t)$ y $d\,(t)$ ilustran los valores de la velocidad y la posición exactas, calculadas a partir de las ecuaciones (22) y (23). Es clara que la aproximación es buena hasta la primera cifra decimal.